解析学 I・演習

2019 年 5 月 7 日配布分

♡ 今回のテーマは積分の初歩です.

記号　このプリントにおいては常に $(X, \mathcal{F}, \mu)$ は測度空間だとする．また問題に登場する X 上の関数は全て $\mathcal{F}$ 可測だとする．$\overline{\mathbf{R}} := [-\infty, \infty] = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ とおく.

問題 4-1 非負の単関数 $\phi\colon X \to [0, \infty)$ に対して，$\int_X \phi d\mu$ は矛盾なく定義されている (well-defined な) ことを示せ.
HINT: すなわち同じ ϕ が複数の表示を持つ時に，どの表示を使って定義した積分値も同じになるかどうかを問題にしている.

問題 4-2 $f \geq 0$ かつ $\int_X f d\mu < \infty$ とする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して，有限の重みを持つ $A \in \mathcal{F}$ で $\int_A f d\mu > \int_X f d\mu - \varepsilon$ となるものが存在することを示せ.
HINT: まず f を非負値の単関数で近似する.

問題 4-3 簡単のため μ を有限測度とする．可積分関数 $f \geq 0$ を用いて $\nu(A) = \int_A f d\mu$ とおく ($A \in \mathcal{F}$)．このとき，ν は測度であり任意の可測関数 $g \geq 0$ に対して, $\int_X g\, d\nu = \int_X gf\, d\mu$ が成立することを示せ.
HINT: 後半は g を非負値の単関数で近似して，なんらかの極限定理を使う.

問題 4-4 可測関数 $f\colon X \to [0, \infty]$ に対して，$A_n = \{x \in X\colon f(x) \geq n\}$ とおく．このとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \int_X f d\mu \leq \mu(X) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

となることを示せ．特に μ が有限測度のときは，f の可積分性は $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ と同値である.

問題 4-5 $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$ とし，$\{a_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ を非負数列とする．$A \subset \mathbf{N}$ に対して, $\nu(A) = \sum_{i \in A} a_i$ とおく.
(1) $(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}}, \nu)$ は測度空間になることを示せ.
(2) $f\colon \mathbf{N} \to [0, \infty]$ に対して，$\int_{\mathbf{N}} f d\nu = \sum_{i \in \mathbf{N}} f_i a_i$ であることを示せ.

問題 4-6 可測関数 $f\colon X \to [0, \infty]$ はある $a > 2$ に対して

$$\mu(\{x \in X\colon f(x) \geq n\}) \leq n^{-a} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

を満たし，さらに $\mu(\{x \in X\colon f(x) \leq 1\}) < \infty$ を満たすとする．このとき，$g := \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{1}_{\{n-1 \leq f \leq n\}}$ および f は可積分であることを示せ.

問題 4-7 可測関数 $f\colon X \to [0, \infty]$ はある $a > 0$ に対して

$$\mu(\{x \in X\colon f(x) \leq n\}) \leq e^{an} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

を満たする．このとき，任意の $c > 0$ に対して $\exp(-cf^2)$ は可積分であることを示せ.

問題 4-8 f が X 上で定義された非負値可測関数で，$\int_X f d\mu = 0$ とする．このとき，$f = 0$ (μ-a.e.) であることを示せ.

問題 4-9 この問題では λ は $(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}(\mathbf{R}^d))$ 上のルベーグ測度だとする.（一意的な存在を認める）．これは d 次元立方体 $\prod_{i=1}^d (a_i, b_i]$ の重みが $\prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$ であるような唯一のボレル測度である.

(1) $C_n = (-n, n]^d \setminus (-(n-1), n-1]^d$ とおく $(n = 1, 2, \ldots)$. このとき，$\lambda(C_n) \le d2^d n^{d-1}$ を示せ.

(2) 可測関数 $f\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ はある $\alpha > 0$ に対して $\sup_{x \in \mathbf{R}^d} (1 + |x|)^{d+\alpha} |f(x)| < \infty$ をみたすとする．このとき，f は λ 可積分であることを示せ.

問題 4-10 この問題では λ は $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ 上のルベーグ測度だとする.（問題 4-9 を参照せよ）．連続関数 $f\colon \mathbf{R} \to [0, \infty)$ で，λ 可積分だが $\overline{\lim}_{|x| \to \infty} f(x) = 0$ とはならない例を作れ.

問題 4-11 この問題では λ は $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ 上のルベーグ測度だとする.（問題 4-9 を参照せよ）．閉区間 $[0, 1]$ 上の関数 g を以下のように定めると，$\int_0^1 g d\lambda = 1/9$ であることを示せ.

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x \in \mathbf{Q} \text{ のとき}) \\ n & (x \notin \mathbf{Q} \text{ かつ } 10 \text{ 進法表示すると小数点直後から連続して } 0 \text{ が } n \text{ 個並ぶとき}) \end{cases}$$

問題 4-12 引き続き λ は $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ 上のルベーグ測度だとする．$g(x) = \exp(-|[x]|)$ とおく．ただし，$[x]$ は実数 x のガウス記号である（すなわち x を超えない最大の整数である）．このとき，$\int_{\mathbf{R}} g d\lambda = (e+1)/(e-1)$ であることを示せ.

問題 4-13 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ は確率測度空間だとし，$0 < \delta < 1$ する．f は X 上で定義された非負値可測関数で至る所 $f(x) > 0$ とする．このとき，次の命題が成り立つことを示せ.

$$\exists M = M_\delta > 0 \text{ s.t. } A \in \mathcal{F},\ \mu(A) \ge \delta \quad \Longrightarrow \quad \int_A f(x) d\mu(x) \ge M.$$