# 解析学 I・演習

2019 年 4 月 23 日配布分

♡ 今回のテーマは「可測関数 (写像)」です．ただし，最後の 3 問はむしろ前回分の内容に含まれます．

## 記号

$\overline{\mathbf{R}} := [-\infty, \infty] = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ とおく．$X$ が位相空間のとき，そのボレル集合族を $\mathcal{B}(X)$ と書く．

**問題 3-1** $d(x, y) = |\tan^{-1} x - \tan^{-1} y|$ により $\overline{\mathbf{R}}$ を距離空間にする．ただし, $\tan^{-1}(\pm\infty) = \pm\pi/2$ とおいた．このとき，$\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}}) = \{A \subset \overline{\mathbf{R}} \colon A \cap \mathbf{R} \in \mathcal{B}(\mathbf{R})\}$ となることを示せ.

**問題 3-2** (1) $1 \le i \le 4$ に対して，$\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}}) = \sigma[\mathcal{C}_i]$ であることを示せ. ただし，以下のようにおいた.

$$\mathcal{C}_1 = \{(a, \infty] \colon a \in \mathbf{R}\} \qquad \mathcal{C}_2 = \{[a, \infty] \colon a \in \mathbf{R}\}$$
$$\mathcal{C}_3 = \{[-\infty, b) \colon b \in \mathbf{R}\} \qquad \mathcal{C}_4 = \{[-\infty, b] \colon b \in \mathbf{R}\}$$

(2) $(X, \mathcal{F})$ を可測空間とする．$f \colon (X, \mathcal{F}) \to (\overline{\mathbf{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}}))$ が可測であることは, 任意の $c \in \mathbf{R}$ に対して $\{x \in X \colon f(x) > c\} \in \mathcal{F}$ と同値であることを示せ.

**問題 3-3** 狭義単調増加な関数 $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ はボレル可測であることを示せ．広義単調増加な場合はどうなるか.

**問題 3-4** $(X, \mathcal{F})$ を可測空間とし，$f_n \colon X \to \mathbf{R}$ を可測写像とする $(n = 1, 2, \ldots)$. このとき, 次を示せ.

$$\{x \in X \colon \text{有限な } \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ が存在 }\}, \quad \{x \in X \colon \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty\} \in \mathcal{F}$$

**問題 3-5** $(X, \mathcal{F})$ を可測空間とし，$A \in \mathcal{F}$ とする．$\{E \subset A \colon E \in \mathcal{F}\}$ は $A$ 上の $\sigma$ 加法族であり，$\{A \cap B \colon B \in \mathcal{F}\}$ と一致することを示せ.

**問題 3-6** $f_n \colon X \to \overline{\mathbf{R}}$ を可測空間 $(X, \mathcal{F})$ 上の可測関数とする $(n = 1, 2, \ldots)$．このとき, 次も可測関数になることを示せ.

$$\sup_{n\ge1} f_n(x), \qquad \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x).$$

**問題 3-7** 測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ が完備だとする（すなわち，任意の $\mu$ 零集合が $\mathcal{F}$ に属しているとする）.
(1) 関数 $f \colon X \to \overline{\mathbf{R}}$ がある $\mathcal{F}$ 可測関数 $g \colon X \to \overline{\mathbf{R}}$ とほとんど至る所等しいとするならば，$f$ も $\mathcal{F}$ 可測であることを示せ.
(2) $\mathcal{F}$ 可測関数の列 $f_n \colon X \to \mathbf{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ がほとんど至る所ある関数 $f \colon X \to \mathbf{R}$ に収束するとならば，$f$ も $\mathcal{F}$ 可測であることを示せ.

**問題 3-8** 測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ の完備化を $(X, \overline{\mathcal{F}}, \mu)$ と書く.（注：完備化とは問題 2-10, または教科書 p. 60 に出てくる操作のことである）．このとき，任意の $\overline{\mathcal{F}}$ 可測関数 $f \colon X \to \overline{\mathbf{R}}$ に対して，それとほとんど至る所等しい $\mathcal{F}$ 可測関数 $g$ が存在することを示せ.

**問題 3-9** $f \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ が次の条件を満たすときに下半連続であるという．下半連続関数がボレル可測であることを示せ.

$$f(x) \le \varliminf_{y\to x} f(y) \qquad (x \in \mathbf{R}^n).$$

**Hint:** $a \in \mathbf{R}$ に対して，$\{x \in \mathbf{R}^n \colon f(x) > a\}$ が位相空間論の言葉で言うとどういう集合になっているかを見れば, 自然に答えが見える.

**問題 3-10** $(X, \mathcal{F})$ を可測空間とする．
(1) $f, g\colon X \to (-\infty, \infty] = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ と $c \in \mathbf{R}$ に対して，

$$\{x \in \mathbf{R}\colon f(x) + g(x) > c\} = \cup_{r \in \mathbf{Q}}\big(\{x \in \mathbf{R}\colon f(x) > r\} \cap \{x \in \mathbf{R}\colon g(x) > c - r\}\big)$$

を示し，これを利用して $f, g$ の可測性から $f + g$ の可測性が導けることをみよ．
(2) 上と同じ論法を用いて 2 つの可測関数 $f, g\colon X \to \mathbf{R}$ の積 $f \cdot g$ は可測関数になることを示せ．
**HINT:** これは指定教科書の証明とは違うやり方です．

**問題 3-11** $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)/\mathcal{B}(\mathbf{R})$ 可測な $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ が偏微分可能であるとする．このとき，各偏導関数 $\partial_i f(x)$ は $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)/\mathcal{B}(\mathbf{R})$ 可測であることを示せ．

**問題 3-12** $\mu$ を可測空間 $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$ 上の確率測度とする．このとき，$\mu$ の値は外側から開集合で，内側から閉集合で近似できることを示せ．正確には任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ に対して次を示せ．

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F)\colon F \subset A, \quad F \text{ は閉 }\} = \inf\{\mu(G)\colon G \supset A, \quad G \text{ は開 }\}.$$

**HINT:** 上の式が成立するような $A$ の全体がなす集合を $\mathcal{C}$ とおいて，$\mathcal{C} = \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ を示すのが定石．

**問題 3-13** $X$ を集合とする．$\mathcal{D} \subset 2^X$ がディンキン族であるとは，可算直和 (非交差和) および固有差 ($A \subset B$ に対する差 $B \setminus A$ のこと) で閉じ，かつ $X \in \mathcal{D}$ をみたすことをいう．このとき，以下の問題に答えよ．

(1). 任意の $\mathcal{C} \subset 2^X$ に対して $\mathcal{C}$ を含む最小のディンキン族が存在することを示せ．

(2). $A, B \in \mathcal{C}$ ならば $A \cap B \in \mathcal{C}$ とする．このとき $\mathcal{C}$ を含む最小のディンキン族は $\sigma[\mathcal{C}]$ と等しくなることを示せ．

(3). $A, B \in \mathcal{C}$ ならば $A \cap B \in \mathcal{C}$ とする．$(X, \sigma[\mathcal{C}])$ 上の 2 つの確率測度 $\mu, \nu$ が $\mathcal{C}$ 上で一致していれば，実は $\mu = \nu$ であることを示せ．

**問題 3-14** $X$ を集合とする．$\mathcal{M} \subset 2^X$ が単調族であるとは，以下の 2 条件が成り立つことをいう．

- $E_n \in \mathcal{M}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\quad E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots \Longrightarrow \cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$,
- $E_n \in \mathcal{M}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\quad E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots \Longrightarrow \cap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$.

このとき，以下の問題に答えよ．

(1). 任意の $\mathcal{C} \subset 2^X$ に対して $\mathcal{C}$ を含む最小の単調族が存在することを示せ．

(2). (1) の $\mathcal{C}$ として特に有限加法族 $\mathcal{A}_0$ を取ると，$\mathcal{A}_0$ を含む最小の単調族は $\sigma[\mathcal{A}_0]$ と等しくなることを示せ．

(3). (2) の続き．$(X, \sigma[\mathcal{A}_0])$ 上の 2 つの確率測度 $\mu, \nu$ が有限加法族 $\mathcal{A}_0$ 上で一致していれば，実は $\mu = \nu$ であることを示せ．