解析学 I・演習

2019 年 4 月 16 日配布分

注意: 距離空間（または位相空間）X に対し，X 上のボレル集合体とは X の開集合族が生成する σ 加法族のことである．

問題 2-1 $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ を $\mathbf{R}$ のボレル集合体とする．

(1). $\mathcal{E}_1 = \{(a,b]\colon -\infty < a < b < \infty\}$ とおくとき，$\sigma[\mathcal{E}_1] = \mathcal{B}(\mathbf{R})$ を示せ．またこの問題の設定における「有限左半開区間全体」を「有限右半開区間全体」「有限開区間全体」「有限閉区間全体」のいずれに取り替えても同じ結論が成り立つことも示せ．

(2). $\mathcal{E}_2 = \{(-\infty, b]\colon b \in \mathbf{R}\}$ とおくとき，$\sigma[\mathcal{E}_2] = \mathcal{B}(\mathbf{R})$ を示せ．

問題 2-2 $\mathcal{A}_0 = \{\cup_{i=1}^n (a_i, b_i]\colon n \in \mathbf{N},\ -\infty \le a_i \le b_i \le \infty\} \subset 2^{\mathbf{R}}$ とおくとき，$\mathcal{A}_0$ は有限加法族であることを示せ．ただし，簡単のために $(a,a] = \emptyset$, $(a,\infty] = (a,\infty)$ と約束する．また $\mathcal{A}_0$ は σ 加法族でないことも示せ．

問題 2-3 X を集合とし，$\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset 2^X$ を σ 加法族とする．

(1). $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ が有限加法族ならば，$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ は σ 加法族であることを示せ．

(2). $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ が有限加法族にならない例を一つ挙げよ．

問題 2-4 $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ を連続写像とする．このとき $\mathbf{R}^m$ の任意のボレル集合 C の f による引き戻し $f^{-1}(C)$ は $\mathbf{R}^n$ のボレル集合になることを示せ．
Hint: まず $\{B \subset \mathbf{R}^m\colon f^{-1}(B)$ はボレル集合 $\}$ が σ 加法族になることを示すとよい．

問題 2-5 X を集合とする．
(1) $\mathcal{A} = \{E \subset X\colon E$ または E^c は高々可算集合 $\}$ とおくと，$\mathcal{A}$ は σ 加法族になることを示せ．
(2) X を非可算集合とし，(1) の記号を使う．このとき，$E \in \mathcal{A}$ に対して，E または E^c のどちらが高々可算かに応じて，それぞれ $\mu(E) = 0$ または $\mu(E) = 1$ とおく．このとき μ は可測空間 $(X, \mathcal{A})$ 上の測度になることを示せ．

問題 2-6 $X = \mathbf{R}^2$, $\mathcal{F} = \{A \times \mathbf{R}\colon A \subset \mathbf{R}\}$, $\mathcal{G} = \{\mathbf{R} \times B\colon B \subset \mathbf{R}\}$ とおく．このとき，$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ はともに σ 加法族になることを示せ．また $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ は σ 加法族か？

問題 2-7 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とする．$E_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbf{N})$ が $\sum_{n=1}^\infty \mu(E_n) < \infty$ をみたすならば，$\mu(\overline{\lim}\, E_n) = 0$ であることを示せ．　　(ボレル・カンテリの定理という確率論で重要な定理)

問題 2-8 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ は測度空間で，$\mu(X) < \infty$ とする．$\nu(X) < \infty$ となる有限加法的測度 $\nu\colon \mathcal{B} \to [0,\infty)$ が次の性質を持つとき，ν は実は可算加法的，すなわち測度であることを示せ．

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad \mu(E) < \delta\ (E \in \mathcal{B}) \Longrightarrow \nu(E) < \epsilon$$

問題 2-9 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ は測度空間で，$(Y, \mathcal{B})$ は可測空間とする．また写像 $f\colon X \to Y$ は，任意の $E \in \mathcal{B}$ に対して $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ となるとする．このとき，$\nu(E) = \mu(f^{-1}(E))$ とおくと，ν は $(Y, \mathcal{B})$ 上の測度になることを示せ．
(これを μ の f による像測度という)

問題 2-10 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする．

$$\overline{\mathcal{F}}^{\mu} = \{B \subset X\colon \exists A_1, \exists A_2 \in \mathcal{F} \text{ s.t. } A_1 \subset B \subset A_2 \text{ and } \mu(A_2 \setminus A_1) = 0\}$$

とおくと，$\overline{\mathcal{F}}^{\mu}$ は $\mathcal{F}$ を含む σ 加法族になり，μ は自然にこの σ 加法族上の測度に延長することを示せ．
(測度の完備化)

問題 2-11 次の (1), (2) はそれぞれ有限加法族 $\mathcal{A}_0$ が σ 加法族となるための同値条件であることを示せ．

(1). $\mathcal{A}_0$ の元からなる任意の単調増大列 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$ に対して $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}_0$.

(2). $\mathcal{A}_0$ の元からなる任意の互いに素な集合列 E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ に対して $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}_0$.

問題 2-12 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ は測度空間で，$\mu(X) < \infty$ とする．$\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ とし，$\mathcal{A}$ に属する任意の可算個の集合の合併は $\mathcal{A}$ に属すとする ($\mathcal{A}$ が σ 加法族だとは仮定してない)．このとき

(1). $\mu(B) = \sup\{\mu(A)\colon A \in \mathcal{A}\}$ となる $B \in \mathcal{A}$ が存在する．

(2). (1) における B は任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して $\mu(A \cap B^c) = 0$ をみたす．

問題 2-13 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ は測度空間で，$\mu(X) = 1$ とする．$E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{B}$ とするとき，以下を示せ．

$$\mu(E_k) \geq 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \quad (k = 1, 2, \ldots) \quad \Longrightarrow \quad \mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\Big) \geq \frac{1}{2}.$$