解析学 I・演習

2019 年 4 月 9 日配布分

注意 (1) 今回の集合演算の問題に関しては，ベン図などの絵をかいて「証明」とすることは禁ずる．ちゃんと演算の定義に基づき論理を用いて示すこと．(ただし論理的説明の補助として，ちょっと図を書いてみせるのはよい.)
(2) いろいろな概念や記号の定義（例えば「上極限」「べき集合」など）がわからなければ教科書をみること．ごく標準的なものを使っているので，どんな本でも (あるいはインターネットでも) いいと思う．

問題 1-1 集合 X の部分集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と X の部分集合 C に対して，以下の分配則が成り立つことを示せ．

$$\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big)\cap C = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\cap C), \qquad \Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big)\cup C = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\cup C).$$

なお <u>問題 1-1 から 1-4 までを通じて，Λ は任意の添字集合</u> とする（したがって可算集合であるとは限らない）.

問題 1-2 集合 X の部分集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，以下の De Morgan の法則が成り立つことを示せ．

$$\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c, \qquad \Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c,$$

問題 1-3 集合 X, Y と写像 $f : X \to Y$ について，以下を示せ．集合 Y の部分集合の族 $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda), \qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda),$$

(すなわち無限個の場合も逆像と集合演算の相性はよい．)

問題 1-4 問題 1-3 の設定を続ける．集合 X の部分集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，

$$f\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda), \qquad f\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$$

が成立することを示せ．また後者で等号が成立しないことを反例を挙げて示せ．

問題 1-5 集合 X, Y と写像 $f : X \to Y$ について，以下を示せ．

(1). $B \subset Y$ に対して $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$,

(2). $A \subset X$ に対して $f^{-1}(f(A)) \supset A$.

問題 1-6 集合 X, Y と写像 $f : X \to Y$ について，以下を示せ．

(1). $B \subset Y$ に対して $(f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c)$,

(2). $A \subset X$ に対して $f(X) \setminus f(A) \subset f(A^c)$.

問題 1-7 次の $\mathbf{R}$ の部分集合を区間として表示せよ．またその証明も与えよ．

(1) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}(-1,\frac{1}{n}]$ (2) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2},1+\frac{1}{n})$ (3) $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2},1+\frac{1}{n})$ (4) $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty}\big[(-1)^n+1,3\big]$ (5) $\displaystyle\varliminf_{n\to\infty}\big[(-1)^n+1,3\big]$

問題 1-8 $\{A_n\}_{n=1,2,\dots}$ は集合 X の部分集合の列とする．$\varliminf_{n\to\infty}A_n=\varlimsup_{n\to\infty}A_n$ となるときに, $\{A_n\}$ の極限が存在するといい，それを $\lim_{n\to\infty}A_n$ と書く．

(1). 極限が存在しない集合列の例を一つ作れ．　（ただし，このプリントにある例は禁止）

(2). $\{A_n\}$ が単調列のとき，すなわち

$$A_1\subset A_2\subset A_3\subset\cdots\qquad\text{または}\qquad A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots$$

であるとき，極限が存在することを示せ．

問題 1-9 A_n,B_n $(n=1,2,\dots)$ は集合 X の部分集合とする．次を示せ．

$$\varliminf_{n\to\infty}A_n\cup\varliminf_{n\to\infty}B_n\subset\varliminf_{n\to\infty}(A_n\cup B_n)\subset\varliminf_{n\to\infty}A_n\cup\varlimsup_{n\to\infty}B_n\subset\varlimsup_{n\to\infty}A_n\cup\varlimsup_{n\to\infty}B_n=\varlimsup_{n\to\infty}(A_n\cup B_n).$$

問題 1-10 A_n $(n=1,2,\dots)$ は集合 X の部分集合とする．集合の上極限と下極限は定義関数の上極限と下極限と以下の意味で整合していることを示せ．任意の $x\in X$ に対して

$$\varlimsup_{n\to\infty}\mathbf{1}_{A_n}(x)=\mathbf{1}_{\varlimsup_{n\to\infty}A_n}(x),\qquad\varliminf_{n\to\infty}\mathbf{1}_{A_n}(x)=\mathbf{1}_{\varliminf_{n\to\infty}A_n}(x).$$

問題 1-11 集合 X の 2 つの部分集合 A,B に対して対称差を $A\triangle B:=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ で定める．次の「結合法則」$(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$ が成り立つことを示せ．さらに $A\triangle B\subset(A\triangle C)\cup(C\triangle B)$ も示せ．

問題 1-12 集合 X に対してベキ集合 (すなわち X の部分集合の全体がなす集合) を 2^X と書く．また写像 $f:X\to Y$ に対して、$f_*(A):=f(A)$ で写像 $f_*\colon 2^X\to 2^Y$ を定め，$f^*(B):=f^{-1}(B)$ で写像 $f^*\colon 2^Y\to 2^X$ を定める．(像や逆像をとる操作に名前を与えただけである)．このとき以下の問いに答えよ．

(1). f が全射であれば, $f_*(2^X)=2^Y$ となることを示せ．

(2). 以下の 3 条件はすべて同値であることを示せ．(a) f は単射　(b) f_* は単射　(c) f^* は全射

問題 1-13 $f,f_1,f_2,\dots$ が集合 X 上の $\mathbf{R}$ 値関数列とするとき以下を示せ．

$$\{x\in X\colon\lim_{x\to\infty}f_n(x)=f(x)\}=\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\Big\{x\in X\colon|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{l}\Big\}.$$

同じ考え方で，$\{x\in X\colon\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列 $\}$ を書き下すとどうなるか．