フォン・ノイマン

廣島 文生　九大・数理

科学基礎論研究会
2026/10/17–18

フォン・ノイマンの生涯

1926 年 量子力学の発見

1927 年 フォンノイマンによる量子力学

ヒルベルト空間の発見

フォンノイマンのバトル

1. フォン・ノイマンの生涯

$$H = \int \lambda dE_\lambda$$

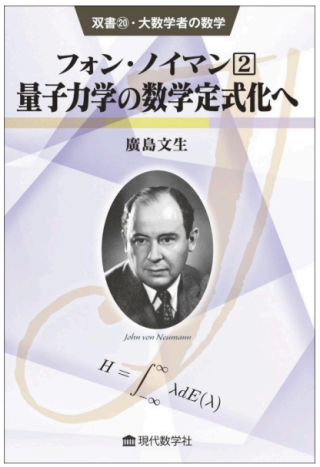
⋆**2013 年**：現代数学社から『フォン・ノイマン』の執筆依頼を受ける.

⋆**2020 年 7 月**：コロナ禍の中, 本格的に執筆を開始.

⋆**2021 年 8 月**：全 3 巻の校了を迎える.

⋆ **執筆方針**

- 一次資料は手元になく, 主に論文集や書簡を参考にした.
- インターネット上の情報は批判的に検討した.
- 哲学的な議論には立ち入らない.
- あくまで数学者の視点から描く.







日本人：高木貞治, 加藤敏夫, 黒田成俊, 江沢弘, 荒木不二洋, 池部晃生

ジョン・フォン・ノイマン（1903–1957）



⋆**Neumann János Lajos**

⋆1903 年 12 月 28 日生まれ.

⋆ オーストリア＝ハンガリー帝国時代のブダペストに, 3 人兄弟の長男として誕生.

⋆ **数学** 集合論・順序数, 量子力学の数学的基礎, 位相群, 関数解析, エルゴード理論, 作用素環, 概周期関数, 数値解析, 束論

⋆ **物理学** 量子力学, 流体力学, 量子統計力学, 量子測定理論

⋆ **ミクロ経済学** ゲーム理論, 経済成長モデル

⋆ **計算機科学** ノイマン型コンピューター, オートマトン

フォン・ノイマンの 3 つの代表的著作

⋆ 量子力学の数学的基礎

1927 年の 3 部作, 教授資格論文, 観測理論の研究を集大成した著書.

Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (1932)

⋆ ノイマン型コンピューター

プログラム内蔵方式のコンピューターの基本構想を示した報告書.

First Draft of a Report on the EDVAC (1945)

⋆ ゲーム理論

O・モルゲンシュテルンとの共著. ゲーム理論を体系化した記念碑的著作.

Theory of Games and Economic Behavior (1944)

1880 年頃 (大御所)	シュミット (76) ヒルベルト・シュミットクラス アインシュタイン (79) 高等研究所で同僚 ヴェブレン (80) 高等研究所に vN を招聘 リース (80) 同郷, リースの表現定理 etc バーコフ父 (84) エルゴード定理, vN とバトル ワイル (85) ワイル関係式, 一様分布定理, コンパクト群 etc ハール (85) 同郷, ハール測度
1900 年代 (同僚)	クープマン (00) バーコフの学生, エルゴード定理 ウィグナー (02) 幼馴染, シュレディンガー方程式 ディラック (02) 妻がウィグナーの妹, 輻射場の理論 ホップ (02) バーコフの学生, エルゴード定理 **vN(03)** 本人 ストーン (03) バーコフの学生, ストーンの定理 ロバートソン (03) バーコフ vsvN のバトルの仲裁 ゲーデル (06) 高等研究所で同僚, 不完全性定理
1910 年代 (弟分)	バーコフ息子 (11) 量子論理と束論 マレー (11) クープマンの学生, vN 代数 タウプ (11) ロバートソンの学生, vN 全集編集

フォン・ノイマンの履歴

ブダペスト・ETH（1903–1926）

↓

ゲッティンゲン（1926–1928）

↓

ベルリン（1928–1930）

↓

プリンストン（1930–1957）

Personal History Record Submitted in Connection
with Application for a Fellowship

International Education Board

61 Broadway, New York, N. Y., U. S. A.

Date (5-11-26)

Name in full John Lewis Neumann v. Margitta

Present Position Doctor of philosophy (mathematics)

Present address Zürich, Uraniastrasse 14

Permanent address Budapest, Vilmos császár út 62

Place of birth Budapest, Hungary

Date of birth 28 XII 1903 Citizenship Hungarian

Single, Married, Widowed, Divorced Single

Wife's name

Wife's address

Name and address of nearest kin if unmarried my father:
Dr. Oscar v. Neumann, Budapest, Vilmos császár út 62.

Age and sex of children

Have you any constitutional disorder or physical defects None

What languages do you speak Hungarian, German, English, French, Italian

What languages do you read Latin as well as the above mentioned

ブダペスト + ETH 時代

ミンタ校	テラー, カルドア
ルーテル校	vN, ウィグナー, フェルナー
レアール校	シラード

プダペストのギムナジウムの同級生


ハール


テラー


リース


シラード


ウィグナー

⋆エトベシュ数学・物理学賞 (全国競争試験) で vN は 1918 年 (14 歳！) に非公式参加が認められ 1 等を受賞.

⋆1928 年までの 1 等受賞者はフェイエール, フォン・カールマン, クーニック, ハール, リース, セゲー, テラー. ※ シラードは 2 等.

集合論の研究

集合論の公理化に関する論文発表数

1923 年 (1 編)→ 1925 年 (1 編)→ 1927 年 (1 編)→ 1928 年 (2 編)→ 1929 年 (1 編)→ 1931 年 (2 編)



ゲーデル

ゲッティンゲン時代

⋆ ゲッティンゲン大学には, 19 世紀初頭以来の由緒ある数学教授職 *Erster Lehrstuhl*（第一講座）があった. その最初の教授はガウスである.

⋆ **第一講座**

ガウス, ディリクレ, リーマン, クレブシュ,
フックス, H. シュワルツ, ヴェーバー,
ヒルベルト, ワイル

⋆ **第二講座**

クライン, カラテオドリ, クーラント

⋆ **第三講座**

ミンコフスキー, E. ランダウ,
ネヴァンリンナ, ジーゲル

1930 年, ゲッティンゲンは世界の数学の中心地だった.

ゲッティンゲン時代：量子力学との出会い



⋆学位取得後, ヒルベルトの待つゲッティンゲンへ.

⋆1926 年 7 月, 行列力学と波動力学の激突に遭遇する.

⋆1926 年以降, 量子力学の数学的基礎付けに関する論文を次々と発表.

⋆1927 年, 現代の関数解析の基礎を築く.

ヒルベルト空間論, 非有界作用素の理論,
スペクトル分解の理論

ベルリン時代



エルハルト・シュミット

⋆1927 年 12 月 13 日, 教授資格を取得.

⋆1928 年, ベルリン大学の私講師に就任.

⋆ 当時のベルリン大学にはヒルベルトの愛弟子エルハルト・シュミットがいた.

プリンストン時代



オズワルド・ヴェブレン

⋆1930 年, ヴェブレンの招聘により, プリンストン大学の客員教授に就任.

⋆ 同年, マリエッタ・ケベシと結婚.

⋆1932 年, プリンストン高等研究所の設立が決定.

⋆1933 年, プリンストン高等研究所に移る.

⋆1938 年, マリエッタと離婚し, クララ・ダンと再婚.

大戦前の研究

⋆1932 年, 『Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik』
⋆1932 年, エルゴード理論の研究. バーコフ (父) らに影響を与える.
⋆1933 年, ヒルベルトの第 5 問題に関する位相群の研究.
⋆1934 年, マレーと共同で作用素環の研究開始.
⋆1934 年, 局所コンパクトアーベル群上の概周期関数の理論を構築.
⋆1936 年, バーコフ (息子) と量子論理 (束論) の研究.
⋆1936 年, 経済拡大モデルの 9 ページの論文.

戦時中の研究

⋆ チャンドラセカールと星の分布による重力場の研究を行う.

⋆1944 年, 『Theory of Games and Economic Behavior』 を出版.

⋆1945 年, 拡大経済モデルの英訳が世に出る.

⋆ 原爆の研究: 爆弾を爆発させる場所とその効果の関係について研究している (下図).

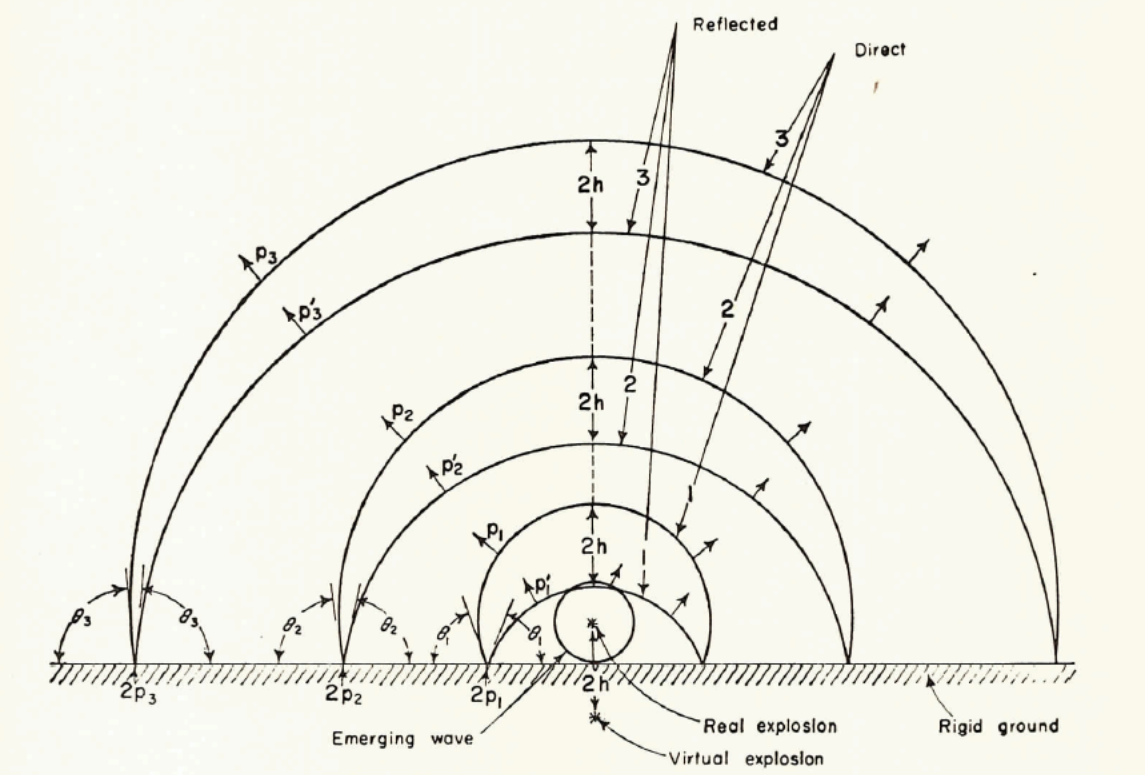
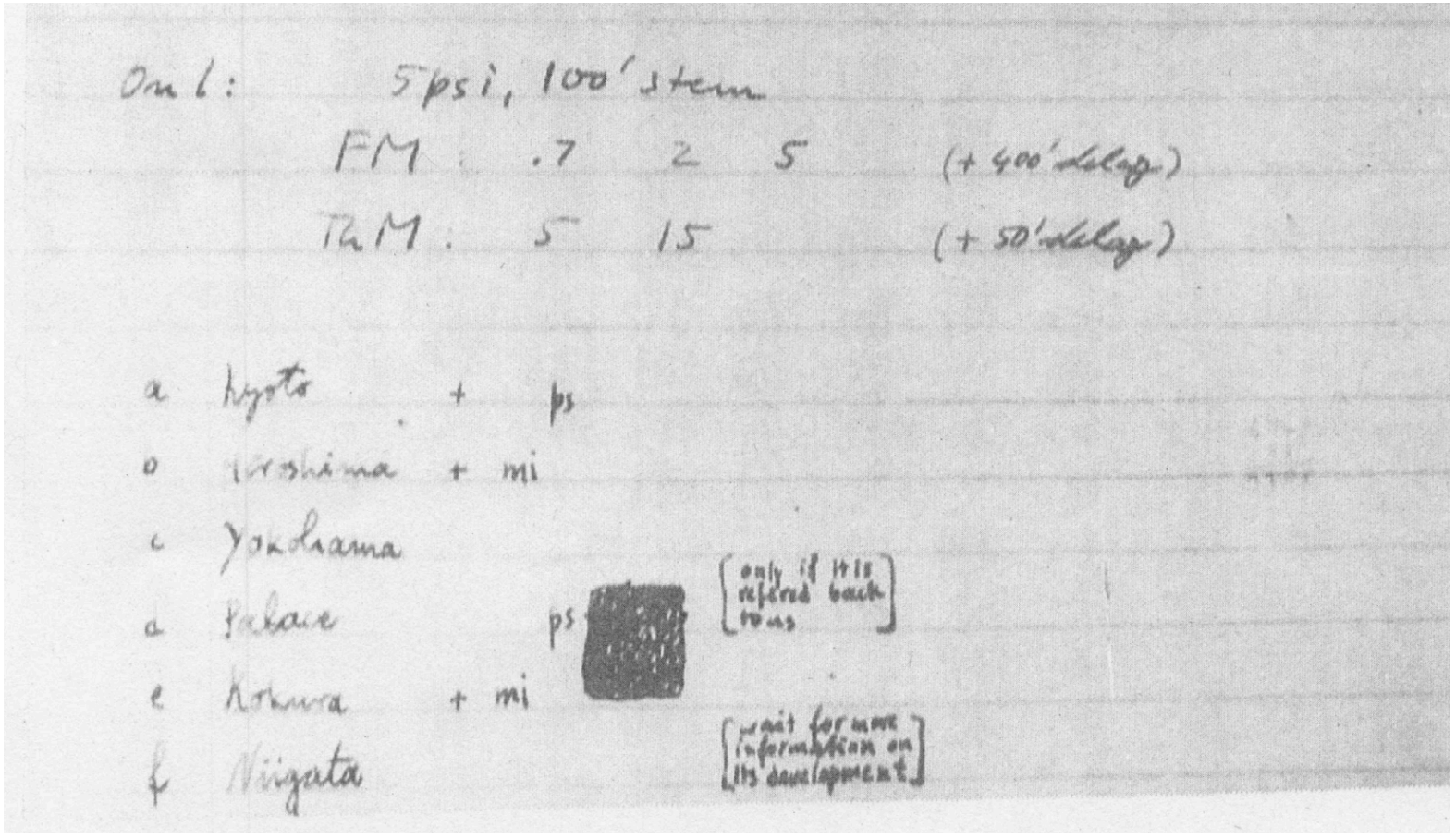


FIG. 6. Reflection of a blast wave in the acoustic limit

原爆の研究

⋆ ロスアラモスでのオッペンハイマーの原爆実験.



vN の原爆投下地候補のメモ

終戦後の研究

⋆ENIAC を用いた数値解析.
⋆ENIAC で計算した 2000 桁の π と e のデータをもとに, π, e に表れる, 非負整数の分布を調べる.
⋆1948 年から, オートマトンに関する 5 編の論文を出版している.
⋆1950 年に米のケンブリッジで開催された ICM(戦争で中断されて 14 年ぶりに開催) で講演.

Shock Interaction and Its Mathematical Aspects.

⋆ フィールズ賞はセルバーグとシュワルツが受賞.
⋆1951-52 年にかけて米数学会会長に就く.
⋆1954 年のアムステルダムで開催された ICM でも講演.

On Unsolved Problems in Mathematics.

⋆1957 年 2 月 8 日永眠. 53 歳

2. 1926年
量子力学の発見

1900 年初頭の物理学会

⋆1900 年の世界中の物理学者の総数は 1200 人-1500 人.

⋆ 独は 1900 年頃の物理学の中心だった.

教授と助手	物理学者数	人口 100 万人当たり
オーストリア・ハンガリー	64	1.5
ベルギー	15	2.3
英	114	2.9
仏	105	2.8
独	145	2.9
イタリア	63	1.8
日本	8	0.2
オランダ	21	4.1
ロシア	35	0.3
北欧	29	2.3
スイス	27	8.1
米	215	2.8

1900 年前後の大学の物理学

物理学の国際的な専門誌

- ⋆英の Philosophical Magazine (1798 年創刊)
- ⋆独の Annalen der Physik (1799 年創刊)
- ⋆仏の Journal de physique (1872 年創刊)
- ⋆イタリアの Nuovo Cimento (1855 年創刊)
- ⋆米の Physical Review (1899 年創刊)

- ⋆ボーアの 1913 年の 3 部作は Philosophical Magazine から出版.
- ⋆アインシュタインの 1905 年の 4 部作は Annalen der Physik から出版.

総合誌

⋆仏パリ科学アカデミーの Comptes Rendus (1835 年創刊)
⋆英の Nature (1869 年創刊)
⋆独のゲッチンゲン科学会の Göttingen Nachrichen (1894 年創刊)

⋆vN の 1927 年の量子力学の数学的基礎 3 部作は GN から出版.
⋆ルベーグの測度論やリース, フレッシェの $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ に関する論文は CR から出版.

量子力学発見の年譜 (1897–1927)

1897	J. J. トムソン（父）	電子の発見
1900	プランク	エネルギー量子 $E = h\nu$
1905	アインシュタイン	光量子仮説
1913	ボーア	水素原子模型
1923	A. コンプトン	コンプトン効果
1924	ド・ブロイ	物質波 $\lambda = h/p$
1925.1	パウリ	排他原理
1925.7	ハイゼンベルク	行列力学の創始
1925.9	ボルン, ヨルダン	正準交換関係
1925.11	ボルン, ハイゼンベルク, ヨルダン	行列力学の体系化
1926.1	シュレーディンガー	波動力学の創始
1926.1	パウリ	水素原子のスペクトル
1926.3	シュレーディンガー	行列力学と波動力学の同等性
1926.6–7	ボルン	波動関数の確率解釈
1927	ハイゼンベルク	不確定性関係
1927	G. P. トムソン（息子）	電子の波動性の実証（電子線回折）
1927	フォン・ノイマン	ヒルベルト空間による数学的基礎づけ

量子力学は誰が命名？

Über Quantenmechanik.

Von **M. Born** in Göttingen.

(Eingegangen am 13. Juni 1924.)

Die Arbeit enthält einen Versuch, den ersten Schritt zur Quantenmechanik der Kopplung aufzustellen, welcher von den wichtigsten Eigenschaften der Atome (Stabilität, Resonanz für die Sprungfrequenzen, Korrespondenzprinzip) Rechenschaft gibt und in natürlicher Weise aus den klassischen Gesetzen entsteht. Diese Theorie enthält die Dispersionsformel von Kramers und zeigt eine enge Verwandtschaft zu Heisenbergs Formulierung der Regeln des anomalen Zeemaneffekts.

1924 年のボルンの論文に現れた Quantenmechanik

行列力学 vs 波動力学



VS



ハイゼンベルク
行列力学（1925）

シュレーディンガー
波動力学（1926）

⋆ **行列力学**

ボーアの対応原理から出発したハイゼンベルクの理論.

⋆ **波動力学**

ド・ブロイの物質波から出発したシュレーディンガーの理論.

⋆1925–1927 年, 両者の間で量子力学の解釈をめぐる激しい論争が巻き起こった.

シュレーディンガー方程式とハイゼンベルク方程式

⋆ シュレーディンガー描像

$$\boxed{i\hbar\frac{d}{dt}\psi(t) = H\psi(t)}$$

状態ベクトルが時間発展する.

⋆ ハイゼンベルク描像

$$\boxed{i\hbar\frac{d}{dt}A(t) = [A(t), H]}$$

観測量が時間発展する.

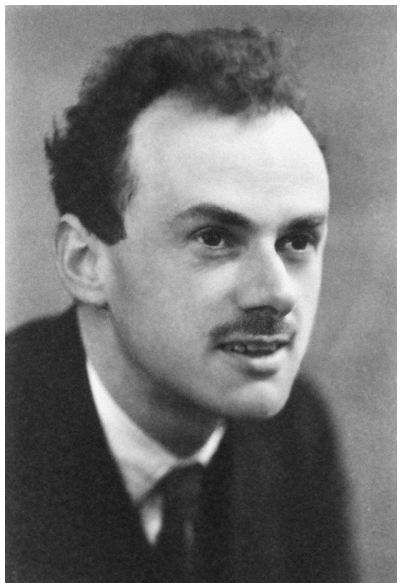
⋆ 両者はユニタリ同値であり, 同じ量子力学を記述する. つまり

$$A(t) = e^{it/\hbar H} A e^{-it/\hbar H}$$

ハイゼンベルクの行列力学

著者	受理日	内容
ハイゼンベルク	1925/7/29	最初の量子力学の論文
ディラック	1925/11/7	行列力学の定式化
ボルン・ハイゼンベルク・ヨルダン	1925/11/16	行列力学の定式化
パウリ	1926/1/17	バルマー系列の導出

行列力学の成立に関する主要論文



P. A. M. ディラック

⋆ **奇妙な男, ディラック**

1925 年 12 月, 米国滞在中のボルンにケンブリッジの学生ディラックの論文が届いた.

その内容は, ボルンら 3 人が完成させた行列力学と本質的に同じものだった.

しかも, その受理日は 1925 年 11 月 7 日.

3 人の論文より 9 日も早かった！

Klassisch:

$$W = \frac{n h \omega_0}{2\pi}. \tag{22}$$

Quantentheoretisch [nach (7), (8)]:

$$W = \frac{(n + \frac{1}{2}) h \omega_0}{2\pi} \tag{23}$$

(bis auf Größen der Ordnung λ^2).

Nach dieser Auffassung ist also schon beim harmonischen Oszillator die Energie nicht durch die „klassische Mechanik“, d. h. (22) darstellbar, sondern sie hat die Form (23).

ハイゼンベルグの 1925 年の論文に現れる調和振動子の基底状態エネルギーの革命的な式

シュレディンガーの波動力学

シュレディンガーは 1926 年に第 1 論文 (1 月 27 日), 第 2 論文 (2 月 23 日), 第 3 論文 (5 月 10 日), 第 4 論文 (6 月 21 日) の 4 編を発表した.

第 1 論文	ハミルトン・ヤコビ方程式と変分原理でシュレディンガー方程式を導入.
第 2 論文	古典力学と幾何光学の対応関係から出発し, 波動光学に対応するものとして波動力学を位置づける.
第 3 論文	摂動論を展開しシュタルク効果を論じる.
第 4 論文	時間に依存するシュレーディンガー方程式が登場する. $\psi\bar{\psi}$ を電荷密度とする解釈を提示し保存則が成り立つことを証明.

1926 年のシュレディンガーの論文

行列力学と波動力学の同値性の証明

⋆ 同値性の問題を, シュレディンガーはワイルに相談した. しかし, ワイルは解けなかった.
⋆ シュレディンガーは両者は数学的に同値であることを示したと主張. 論文受理は 1926 年 3 月 18 日.
⋆ パウリ, ディラック, ヨルダンも独立に行列力学と波動力学の同値性を証明.

3/18	シュレディンガー
4/12	パウリ (非公表)
4/27, 7/9	ヨルダン
8/26	ディラック

1926 年の行列力学と波動力学の同値性の証明

パウリも同値性を発見していた



W. Pauli

⋆ シュレーディンガーの第 1 論文を読んだパウリは，彼とは独立に，行列力学と波動力学の同値性に気づいた.

⋆ その証明を 1926 年 4 月 12 日付のヨルダン宛の手紙で伝えている.

⋆ しかし，シュレーディンガーが先に同値性を示す論文を発表したため，パウリの証明は論文として公表されなかった.

行列力学 vs 波動力学

1926/4/28	ハイゼンベルクがベルリンで講演．アインシュタインの私邸で質問攻めに合う
5/1	ハイゼンベルクがコペンハーゲン大学に移る
6/8	ハイゼンベルクがパウリに手紙を送って，「シュレディンガーの理論には物理がない．．．．．．」
6/25	ボルンによる波動関数の確率解釈
7/21, 23	シュレディンガーがミュンヘンで講演．vN も聴講．ハイゼンベルクが悄然となる
10/1	シュレディンガーがコペンハーゲンでボーアと討論．その後シュレディンガーが寝込む
12/4	アインシュタインのボルンへの返信で「神はサイコロ遊びをしない」
1927/2-3 月	ボーアがノルウェイにスキー休暇．相補性原理に到達．ハイゼンベルクは不確定性原理に到達．
9/26	コモ湖畔国際会議でボーアが相補性原理を公表
10/24	第 5 回ソルヴェイ会議にてアインシュタインが「神はサイコロ遊びをしない」を連発
1930/10	第 6 回ソルヴェイ会議にてアインシュタイン・ボーア論争

長老 vs 若者

ボーア派

ボーア (42)　ハイゼンベルク (26)
パウリ (27)　ボルン (45)
ヨルダン (25)　ディラック (25)

アインシュタイン派

アインシュタイン (48)
シュレディンガー (40)
プランク (69)　ヴィーン (63)

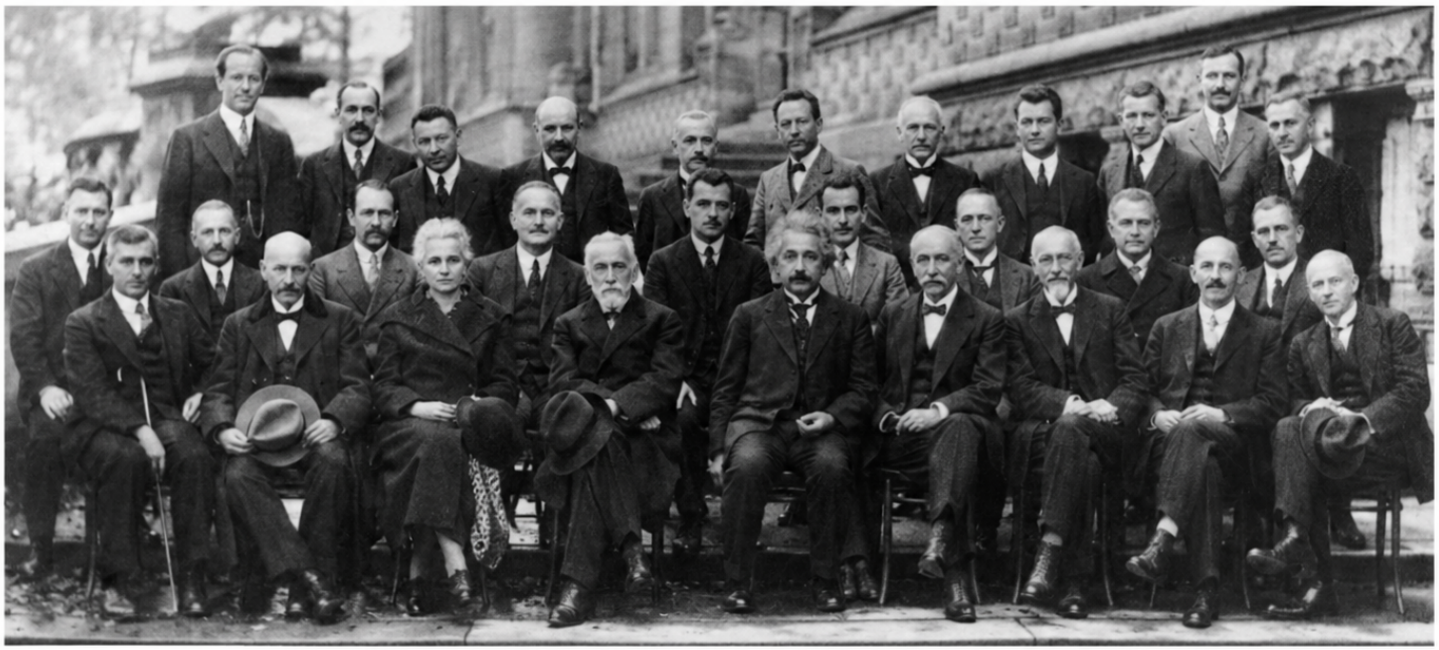


図　1927 年の第 5 回ソルヴェイ会議

確率解釈



マックス・ボルン

⋆1926 年 6 月 25 日, ボルンは波動関数の展開

$$\Psi(t) = \sum_n c_n(t)\Psi_n$$

における係数 $|c_n(t)|^2$ に確率解釈を与えた.

⋆ ただし, この解釈はまだ限定的だった.

⋆ **ヨルダンによる確率解釈**

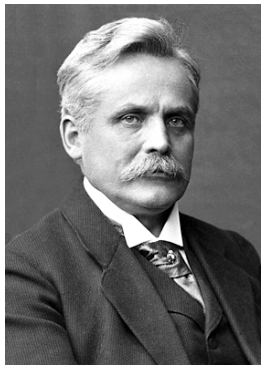
波動関数 $\psi(x,t)$ に対し, $\int_A |\psi(x,t)|^2 dx$ を, 粒子が領域 A に存在する確率と解釈した.

⋆ ヨルダンは, この解釈がパウリのアイデアに基づくことを明記している.

1926 年の激突：波動力学 vs. 行列力学



ゾンマーフェルト



ヴィーン

⋆1926 年 7 月，シュレーディンガーはゾンマーフェルトとヴィーンの招きでミュンヘンを訪問し，2 回の講演を行った．

7 月 21 日 ミュンヘン大学で第 1 回講演．

7 月 23 日 ドイツ物理学会バイエルン支部で第 2 回講演．

⋆ ハイゼンベルクはシュレーディンガーと初めて直接議論した．vN もゲッティンゲンから参加していた．

⋆ 第 2 回講演でハイゼンベルクが反論！両者は激しく衝突した．

⋆vN はすでに論理的な結論に達していた．

⋆ ボーアはシュレーディンガーをコペンハーゲンに招待し，量子力学の解釈をめぐる論争が本格化する．

3. 1927年
vNによる量子力学

量子力学の数学的基礎付けの開始

⋆**1927 年 4 月 6 日**ヒルベルト, vN, ノルトハイムの 3 人が量子力学の数学的基礎に関する論文を執筆.

⋆ 論文にはデルタ関数 $\delta(x)$ が登場する. しかし, vN はこの数学的扱いに不満を抱いた.

⋆**1927 年の 3 部作**

1. **第 1 論文（5 月 20 日）**ヒルベルト空間を定義し, 非有界作用素のスペクトル理論を展開.
2. **第 2 論文**物理量と状態を数学的に特徴付ける.
3. **第 3 論文**量子力学的集団の熱力学とエントロピーの理論を構築.

⋆**1928 年 12 月 15 日**教授資格審査論文を提出. 現代の作用素論の主要な内容がすでに論じられている. 驚くべき仕事！

⋆ 行列力学と波動力学の厳密な同値性を証明.

vN の量子力学の数学的基礎付け

(27/4/6) Über die Grundlagen der Quantenmechanik

(27/5/20) Mathematische Begründung der Quantenmechanik

(27/11/11) Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik

(27/11/11) Thermodynamik quantenmechanischer Gesamtheiten

(28/10/22) Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen

(28/12/15) Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren

(29/2/20) Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren

(30/8/31) Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren
(シュレディンガー作用素の一意性)

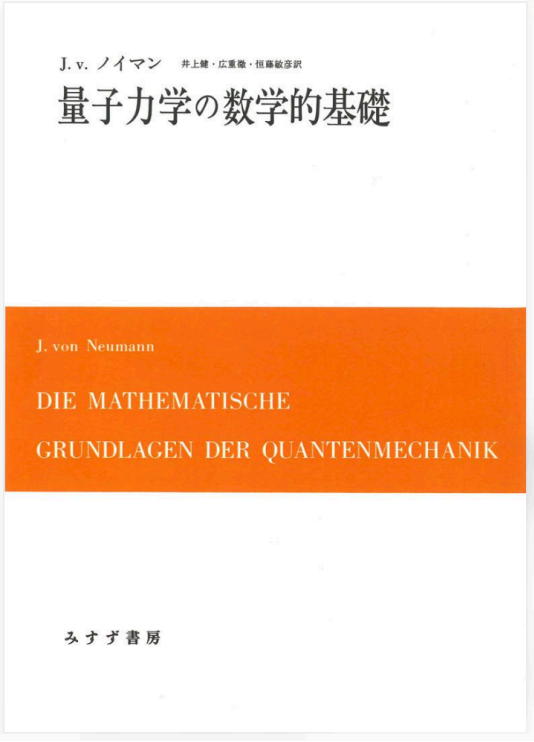
(30/10/20) Über Functionen von Functionaloperatoren

(31/12/9) Über adjungierte Funktionaloperatoren

(32/3/16) Über einen Satz von Herrn M. H. Stone
(M. H. Stone の定理について)

(32) Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik

Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik



第 I 章	序論的考察
第 II 章	抽象ヒルベルト空間の一般論
第 III 章	量子力学の統計
第 IV 章	理論の演繹的構成
第 V 章	一般的考察
第 VI 章	測定の過程

von Neumann (1932)

⋆ この名著は，必ずしも読みやすい書物ではない．

⋆ 純粋数学・量子力学の確率解釈・測定理論という性格の異なる議論が交錯しており，読者を戸惑わせる．

⋆元ネタになっている論文は以下.

原書	記述箇所
27 年の第 1 論文と教授資格論文	第 II 章
27 年の第 2 論文	第 III 章 1,2 節と第 IV 章 1,2 節
ディラックの論文	第 III 章 6 節
27 年の第 3 論文	第 V 章 2,3 節

⋆他の部分は殆どが量子力学の測定理論に関わる記述で論文として学術雑誌に公表されていない.

同時測定	第 III 章 3,4,5 節
測定後の状態	第 IV 章 3 節
測定とエントロピー	第 V 章 3 節
測定過程	第 VI 章

測定理論の記述箇所

4. ヒルベルト空間の発見

ヒルベルト空間という用語をはじめに使ったのは誰か？

	生没年	出身国
シェーンフリース	1853-1928	独
ヒルベルト	1862-1943	独
ハウスドルフ	1868-1942	独
ルベーグ	1875-1941	仏
フィッシャー	1875-1954	オーストリア
シュミット	1876-1959	独
フレッシェ	1878-1973	仏
リース	1880-1956	ハンガリー
ワイル	1885-1955	独
ウリゾーン	1898-1924	ロシア
vN	1903-1957	ハンガリー

ヒルベルト空間命名物語の登場人物

シェーンフリースとフレッシェ



シェーンフリース

⋆ 当時，関数空間に距離を導入することは数学上の難題であった．この問題に挑んだのがアダマールとフレッシェである．

⋆ シェーンフリースはベルリン大学で博士号を取得した．



フレッシェ

⋆ フレッシェはシェーンフリースより 25 歳若いフランスの数学者である．1900 年にエコール・ノルマル・シュペリウールへ進学し，博士論文で関数空間にコンパクト性の概念を導入した．

⋆1907 年頃，シェーンフリースがフレッシェの学位論文について質問したことを契機に，二人の書簡の往復が始まった．

⋆ シェーンフリースはフレッシェの研究成果を積極的に紹介し，その業績は広く注目されるようになった．

⋆ シェーンフリースは集合論で大切なこととして次の 3 つを挙げた.

(1) 集合の極限要素の定義

(2) ボルツァーノ・ワイエルストラスの定理

(3) 集合の閉性

⋆ シェーンフリースは 10 月 27 日の手紙に, なぜコンパクト集合のようなものを考えないのか？と書いている. 2 人の手紙のやり取りは少なくとも 1912 年 12 月まで続いた.

リースとフィッシャー



F. Riesz

⋆ リースはオーストリア＝ハンガリー帝国領のハンガリーに，フィッシャーはウィーンに生まれた．両者にはライバル意識もあったのかもしれない．

⋆1906 年 11 月 12 日，リースは関数 f, g の距離を

$$d(f,g) = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

と定義した．論文ではフレッシェに謝意を表している．

⋆ リースはさらに，L^p 空間の完備性を証明した．

⋆ こうした研究は，リース＝フィッシャーの定理へとつながっていく．

リース＝フィッシャーの定理（1907 年）

⋆ リースは 1907 年 3 月 11 日に発表した論文で，次の定理を示した．

命題 (リース＝フィッシャーの定理)

$\{e_n\}$ を $L^2(\mathbb{R})$ の完全正規直交系とする．写像

$$\iota : \ell_2 \longrightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad a = \{a_n\} \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

は全単射かつ等長である．すなわち，$\|\iota(a)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|a\|_{\ell_2}$, $\ell_2 \cong L^2(\mathbb{R})$.



E. Fischer

⋆ フィッシャーも同様の結果を証明し，1907 年 4 月 29 日に論文を発表した．

⋆ フィッシャーには 1906 年に発表されたリースの論文を読む機会があったため，両者が完全に独立に証明したかどうかには疑問が残る．

「ヒルベルト空間」という名称の誕生

⋆1908 年：シェーンフリース
著書の 266 ページで ℓ_2 を「ヒルベルト空間」と呼んだ. これがこの名称の最初の使用例とされる.

⋆1908 年頃：名称はまだ一般的ではなかった
リースとフィッシャーは $L^2(\mathbb{R}) \cong \ell_2$ を証明したが, この名称は使わなかった. フレッシェやシュミットも, 1908 年の論文では使用していない. シュミットは ℓ_2 の幾何学を研究していた.

⋆1913 年：リース
著書の 78 ページで ℓ_2 を「ヒルベルト空間」と呼んだ.

⋆1914 年：ハウスドルフ
名著の初版 287 ページで ℓ_2 を「ヒルベルト空間」と呼んだ.

名称は 1908 年に登場し, 1910 年代に広まっていった.

ウリゾーンとヒルベルト空間（1923–1924 年）

⋆1923 年 10 月 23 日, ロシアの数学者アレクサンドロフとウリゾーンは, フレッシェに 3 編の論文のコピーを送った. 原稿はすでにルベーグに送られており, Comptes Rendus への投稿論文であった.

⋆ その一つはウリゾーンの単著論文

Les classes (D) séparables et l'espace Hilbertien

である. 1924 年 1 月 2 日号に掲載されたわずか 3 ページの論文で, 可分な距離空間とヒルベルト空間の関係を論じている.

⋆ 実は, ウリゾーンの関連論文は, すでに 1923 年 7 月 22 日にドイツの *Mathematische Annalen* に受理されていた.

Der Hilbertsche Raum als Urbild der metrischen Räume

⋆ 両論文のタイトルには, すでに「ヒルベルト空間」という名称が登場している.

幻のヒルベルト＝ルベーグ＝リース空間

⋆1923 年当時, ℓ_2 はすでに「ヒルベルト空間」と命名され, $\ell_2 \cong L^2$ も証明されていた. しかし, ドイツの ℓ_2 派に対して, フランスの L^2 派には複雑な思いがあったのかもしれない.

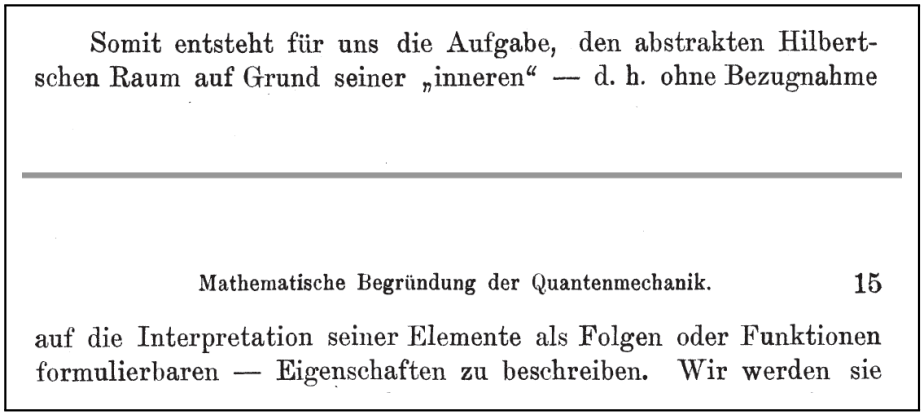
⋆ フレッシェはルベーグに, L^2 空間を次のように命名することを提案した.

ヒルベルト＝ルベーグ＝リース空間

⋆ ドイツ, フランス, ハンガリーの数学者の名を並べた, 国際色豊かな名称である. 同じフランス人のルベーグへの配慮もあったのだろうか.

⋆ しかし, **ルベーグはこの提案を拒否した！**

1927 年, 抽象的ヒルベルト空間の登場

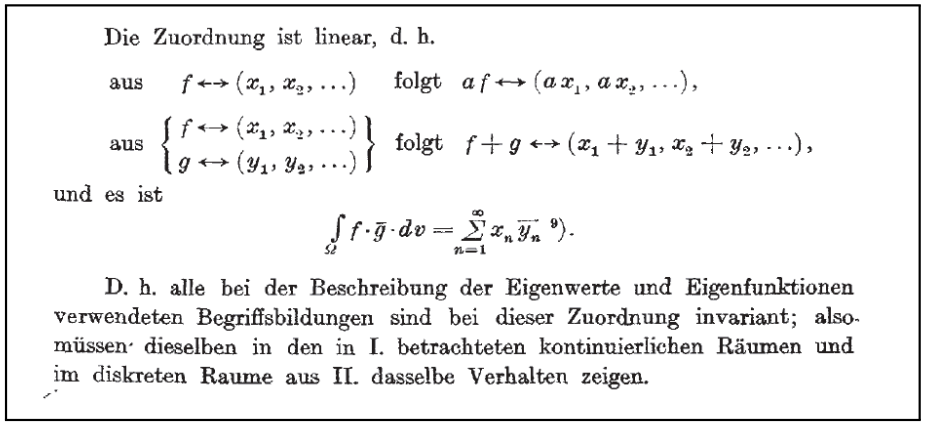


Somit entsteht für uns die Aufgabe, den abstrakten Hilbertschen Raum auf Grund seiner „inneren“ — d. h. ohne Bezugnahme

Mathematische Begründung der Quantenmechanik. 15

auf die Interpretation seiner Elemente als Folgen oder Funktionen formulierbaren — Eigenschaften zu beschreiben. Wir werden sie

vN による抽象的ヒルベルト空間の定義



Die Zuordnung ist linear, d. h.

aus $f \leftrightarrow (x_1, x_2, \ldots)$ folgt $af \leftrightarrow (ax_1, ax_2, \ldots)$,

aus $\left\{ \begin{matrix} f \leftrightarrow (x_1, x_2, \ldots) \\ g \leftrightarrow (y_1, y_2, \ldots) \end{matrix} \right\}$ folgt $f+g \leftrightarrow (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots)$,

und es ist

$$\int_\Omega f \cdot \bar{g} \cdot dv = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}\ ^{9)}.$$

D. h. alle bei der Beschreibung der Eigenwerte und Eigenfunktionen verwendeten Begriffsbildungen sind bei dieser Zuordnung invariant; also müssen dieselben in den in I. betrachteten kontinuierlichen Räumen und im diskreten Raume aus II. dasselbe Verhalten zeigen.

vN による ℓ_2 と $L^2(\mathbb{R})$ の同値性の紹介

⋆vN は

$$\underbrace{L^2(\mathbb{R})}_{\text{連続空間}} \longleftrightarrow \underbrace{\ell_2}_{\text{離散空間}}$$

と捉え, 両者の同値性を論じた.

⋆ さらに, リース・フィッシャーの定理にも言及している.

ワイルとヒルベルト空間

⋆ ワイルの 1928 年の著書 *Gruppentheorie und Quantenmechanik* に, 「ヒルベルト空間」という言葉が現れる.

⋆ 時期的にみて, これは vN 以外の数学者が抽象的な「ヒルベルト空間」という言葉を用いた最初期の例かもしれない.

> Da die Vektorkomponenten eine abgezählte Reihe $x_1, x_2, \ldots$ bilden, besitzt dieser „Hilbertsche Raum" abzählbar-unendlichviele Dimensionen. Daneben spielen Räume mit kontinuierlich unendlichvielen Dimensionen eine Rolle.

29 ページに現れる “Hilbertschen Raum” （ヒルベルト空間）

⋆ 第 1 章第 7 節では, ℓ_2 空間が登場する.

⋆ ワイルは

ℓ_2 可算無限次元

$L^2(\mathbb{R})$ 連続無限次元

と呼び分けている.

abzählbar-unendlichvielen Dimensionen / *kontinuierlich unendlichvielen Dimensionen*

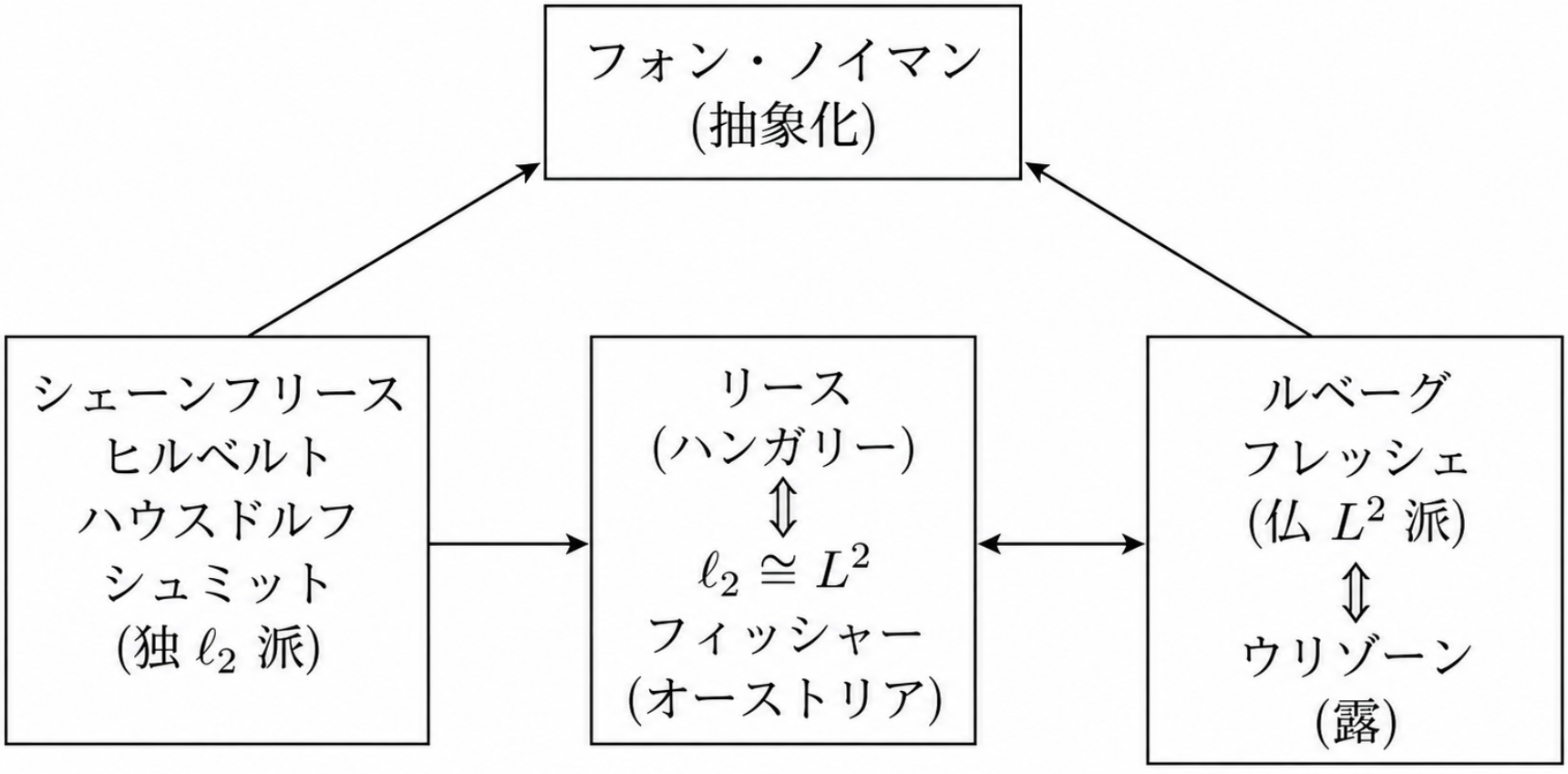


図 1: ヒルベルト空間の命名をめぐって

リース	1907	ヒルベルト空間と呼んでない
フィッシャー	1907	ヒルベルト空間と呼んでない
シュミット	1908	ヒルベルト空間と呼んでない
フレッシェ	1908	ヒルベルト空間と呼んでない
シェーンフリース	1908	ℓ_2 をヒルベルト空間と呼ぶ
リース	1913	ℓ_2 をヒルベルト空間と呼ぶ
ハウスドルフ	1914	ℓ_2 をヒルベルト空間と呼ぶ
ウリゾーン	1923	論文タイトルにヒルベルト空間
フレッシェ	1923	ヒルベルト=ルベーグ=リース空間提案
vN	1927	抽象的なヒルベルト空間を定義
ワイル	1928	抽象的なヒルベルト空間を定義

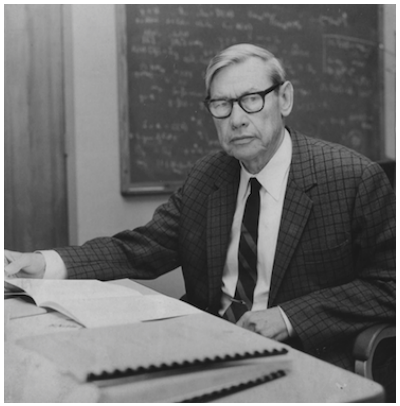
‘ヒルベルト空間’の由来

5. vNのバトル

世代	vN と関わった事項
1880 年頃 (大御所)	シュミット (76) ヒルベルト・シュミットクラス アインシュタイン (79) 高等研究所で同僚 ヴェブレン (80) 高等研究所に vN を招聘 リース (80) 同郷, リースの表現定理 etc バーコフ父 (84) エルゴード定理, vN とバトル ワイル (85) ワイル関係式, 一様分布定理, コンパクト群 etc ハール (85) 同郷, ハール測度
1900 年代 (同僚)	クープマン (00) バーコフの学生, エルゴード定理 ウィグナー (02) 幼馴染, シュレディンガー方程式 ディラック (02) 妻がウィグナーの妹, 輻射場の理論 ホップ (02) バーコフの学生, ザルツブルク出身, エルゴード定理 **vN(03)** 本人 ストーン (03) バーコフの学生, ストーンの定理 ロバートソン (03) バーコフ vsvN のバトルの仲裁 ゲーデル (06) 高等研究所で同僚, 不完全性定理
1910 年代 (弟分)	バーコフ息子 (11) 量子論理と束論 マレー (11) クープマンの学生, vN 代数 タウプ (11) ロバートソンの学生, vN 全集編集

疾風怒濤時代 (1925 年-1940 年) の主な登場者

vN とストーン



ストーンの定理をめぐって.

⋆ この定理はもともとストーンの教科書の群論の章に掲載予定だった. 群論の章は 1930 年 5 月には完成していたが, 最終的に削除することになり, 結局, 1932 年に Annals of Mathematics Vol. 33. No. 3, 643-648 ページに発表.

命題 (ストーンの定理)

$T_t, t \in \mathbb{R}$ を強連続一径数ユニタリー群とする. このとき自己共役作用素 H が一意的に存在して $T_t = e^{itH}$ となる.

命題 (ストーンの定理の vN による一般化)

T_t は (1) $T_t T_s = T_{t+s}$ と (2) $T_0 = \mathbb{1}$ を満たす, 可分なヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の一径数ユニタリー群とする. 任意の $f, g \in \mathscr{H}$ に対して, $t \mapsto (f, T_t g)$ が可測ならば $t \mapsto T_t$ は強連続である.

⋆vN が連続性を可測性にかえて, 定理を一般化したことが第 1 ページ目に言い訳がましく記されている.

⋆ 一般化された定理は同じ号の 567-573 ページに発表されていて, ストーンより前に掲載されている. ストーンは焦っていたに違いない.

不確定性原理, ロバートソン

Daraus gewinnt man (ich verdanke diese Bemerkung Herrn *W. Pauli*) leicht die allgemein gültige Ungleichung

$$\Delta p \cdot \Delta x \geqq \frac{1}{2} h :$$

ワイルの教科書（p. 63）に現れた不確定性関係

⋆ ワイルは, この関係式の導出についてパウリに謝辞を述べている. しかし, 原書には「不確定性関係」という言葉は登場しない.



⋆1929 年, ロバートソン（1903 年生まれ）は, 不確定性関係を一般の非可換作用素へ拡張した. 当時, プリンストン大学に所属していた.

⋆1931 年, ワイルの教科書の英訳版が出版された. 原書にはない *uncertainty principle* が索引に登場する.

その英訳を担当したのは, なんとロバートソン自身だった！

vN とバーコフ

⋆vN は 1932 年に平均エルゴード定理を数学的に証明した.

命題 (vN の平均エルゴード定理)

$(X, \mathscr{B}, \mu, \{T_s\}_s)$ を可測フロー, $f \in L^2(X)$ とする. このとき,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(T_s x) ds = E[f|\mathscr{E}]$$

特に, μ がエルゴード的測度ならば次が成り立つ.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(T_s x) ds = \int f(x) d\mu(x)$$

エルゴード定理の優先権争い



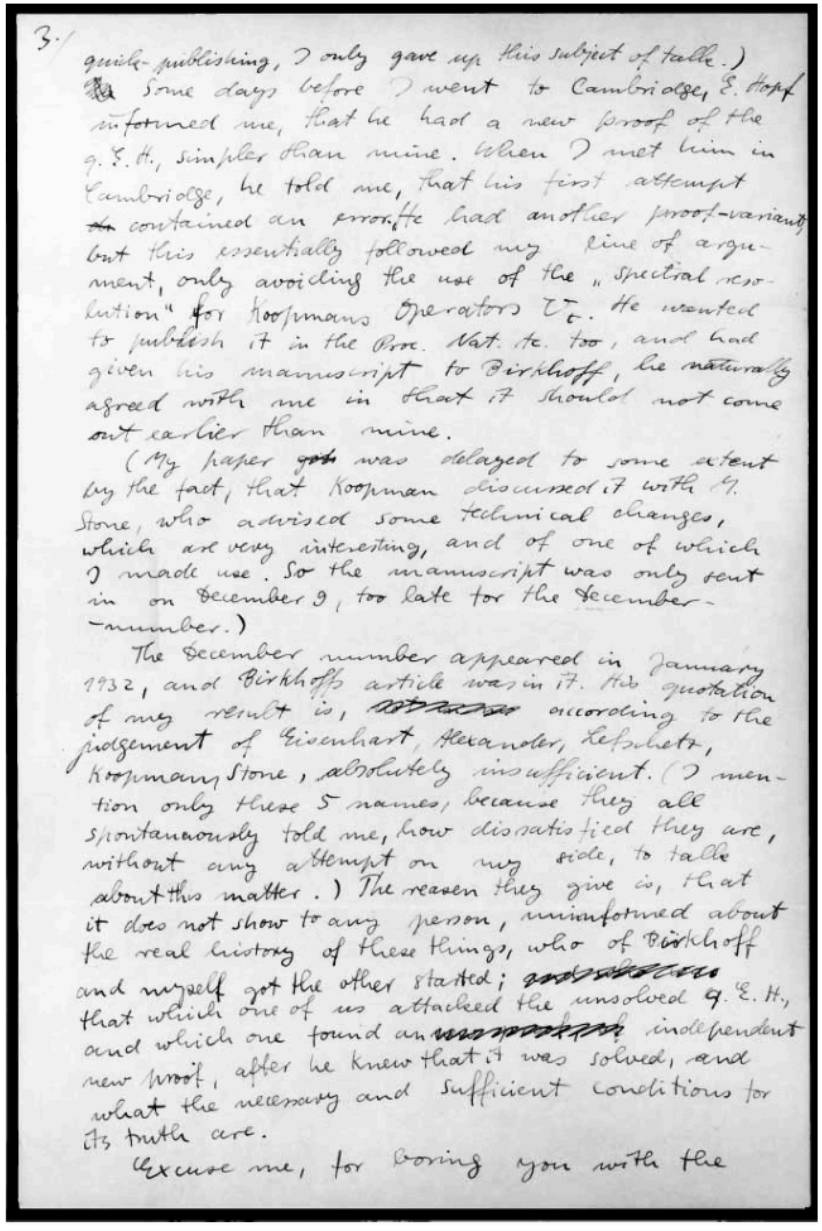
G. D. Birkhoff

⋆ エルゴード定理のもう一人の立役者, ジョージ・デイヴィッド・バーコフは, ストーンの師であった.

⋆1931 年, エルゴード定理の**優先権をめぐって, フォン・ノイマンとバーコフの間に論争**が起こった.

⋆ 後年, フォン・ノイマンがロバートソンに宛てた手紙が発見され, 論争の詳しい経緯が明らかになった.

⋆ この手紙はロバートソンの娘が保管していたもので, Zund が発見し, 公表した.



3.

quick-publishing, I only gave up this subject of talk.)
Some days before I went to Cambridge, E. Hopf informed me, that he had a new proof of the q. E. H., simpler than mine. When I met him in Cambridge, he told me, that his first attempt ~~th~~ contained an error, he had another proof-variant, but this essentially followed my line of argument, only avoiding the use of the „spectral resolution" for Koopmans Operators U_t. He wanted to publish it in the Proc. Nat. Ac. too, and had given his manuscript to Birkhoff, he naturally agreed with me in that it should not come out earlier than mine.

(My paper ~~got~~ was delayed to some extent by the fact, that Koopman discussed it with M. Stone, who advised some technical changes, which are very interesting, and of one of which I made use. So the manuscript was only sent in on December 9, too late for the December-number.)

The December number appeared in January 1932, and Birkhoffs article was in it. His quotation of my result is, ~~[illegible]~~ according to the judgement of Eisenhart, Alexander, Lefschetz, Koopman, Stone, absolutely insufficient. (I mention only these 5 names, because they all spontaneously told me, how dissatisfied they are, without any attempt on my side, to talk about this matter.) The reason they give is, that it does not show to any person, uninformed about the real history of these things, who of Birkhoff and myself got the other started; ~~[illegible]~~ that which one of us attacked the unsolved q. E. H., and which one found an ~~[illegible]~~ independent new proof, after he knew that it was solved, and what the necessary and sufficient conditions for its truth are.

Excuse me, for boring you with the

vN が 1932 年に残した手紙

平均エルゴード定理の発見

⋆1930 年 5 月, クープマンは自身の研究成果をフォン・ノイマン（vN）に伝え, エルゴード仮説を証明したいと語った.

⋆1931 年, クープマンの論文が *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*（PNAS）に掲載された. vN はこの研究からエルゴード仮説を連想した.

⋆1931 年 8-9 月頃, vN は**平均エルゴード定理の証明**に成功した. しかし, クープマンがすでに証明している可能性を考え, 結果の公表を控えた.

⋆ 同年 10 月, ニューヨークでクープマンと会い, 自身の結果を伝えたところ, PNAS への投稿を勧められた.

エルゴード定理の優先権争い（1931 年）

⋆10 月, クープマンとバーコフがプリンストンを訪問. vN は, クープマンの手法を用いて平均エルゴード定理を証明したことをバーコフに伝えた.

⋆11 月, バーコフからの手紙により, 彼がエルゴード定理の別の形の証明を試みていることを知った.

⋆12 月 4-5 日, バーコフは vN よりも強い結果を証明したと伝えた.

⋆ 両者の論文の出版時期が問題となった.

vN： 1932 年 1 月号（PNAS）
バーコフ： 1931 年 12 月号を目指す

⋆vN は優先権を主張し, バーコフに出版の延期を求めたが, 拒否された.

⋆ ただし, バーコフは論文中で vN の優先権を認めることを約束した.

バーコフの論文と周囲の反応

> The important recent work of von Neumann (not yet published) shows only that there is convergence *in the mean*, so that (1) is not proved by him to hold for any point P, and the time-probability is not established in the usual sense for any trajectory. A *direct* proof of von Neumann's results (not yet published) has been obtained by E. Hopf.

バーコフの論文における vN の仕事への言及

和訳：最近の vN の重要な研究（未発表）は, 平均での収束を証明したにすぎない. 結果 (1) は任意の点 P について証明されておらず, 時間確率についても, 通常の意味での収束は示されていない. vN の結果の直接的な証明（未発表）は E. ホップによって得られている.

⋆1931 年 12 月号に掲載されたバーコフの論文では, vN の研究がこのように紹介された. **事実としては間違っていなくても, 優先権への配慮を欠いた記述**であった.

⋆ これに対し, 5 人の数学者

Eisenhart, Alexander, Lefschetz, Koopman, Stone

は, バーコフの論文における vN の優先権への言及はまったく不十分だと, 直ちに vN に伝えた.

優先権争いの幕引き

⋆ 手紙の発見者 Zund は, ロバートソンが vN に経緯を書かせ, その手紙をヴェブレンに見せたと推測している.

⋆ ヴェブレンはバーコフに, エルゴード定理の歴史と vN の優先権を明記するよう促したと考えられる.

⋆ その後, バーコフとクープマンの共著論文では, vN が平均エルゴード定理を最初に証明したことが明記された.

III. *The Mean Ergodic Theorem.*—The first one actually to establish a general theorem bearing fundamentally on the Quasi-Ergodic Hypothesis was J. v. Neumann,[13] who, with the aid of the above theory of the U_t-operator, proved what we will call the Mean Ergodic Theorem, to the following effect:

バーコフとクープマンの共著論文

和訳： 擬エルゴード仮説の基礎となる一般的定理を最初に確立したのは J. von Neumann である. 彼は作用素 U_t に関する定理を用いて, 平均エルゴード定理を証明した.

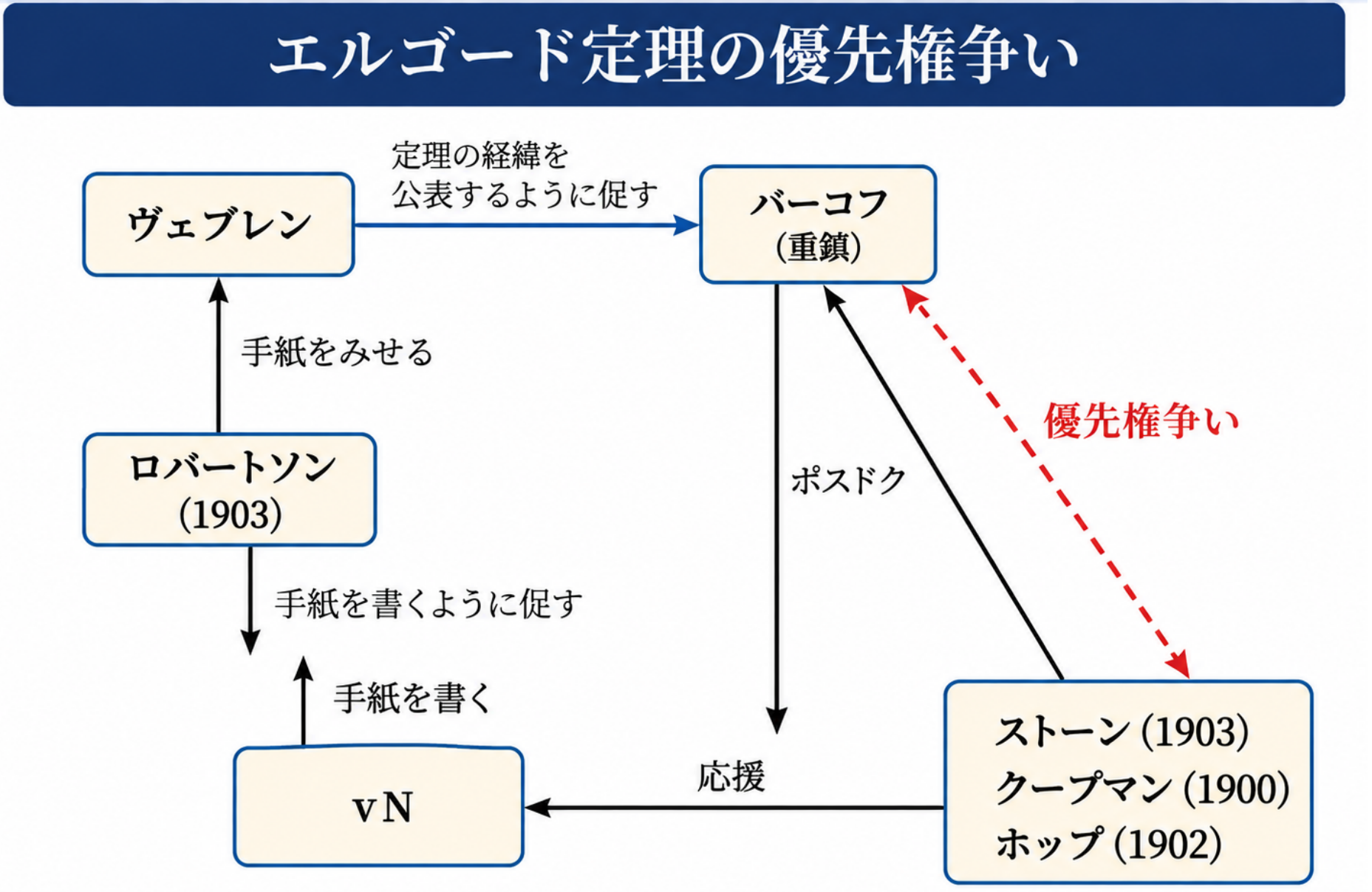


図　エルゴード定理の優先権争い