第9回　前橋セミナー (群馬大学教育学部 (荒牧キャンパス))

グロタンディーク群について　- 自然数から整数をつくる

小田 文仁 山形大学理学部数理科学科

2011 年 9 月 23 日

1　グロタンディーク (Alexander Grothendieck)

Alexander Grothendieck, 28 March 1928 in Berlin, Germany.

2　同値関係

集合 S に「同値関係を与える」と，S は互いに交わらない集合に分けられる (「分割を与える」) ということを思い出します．

定義 1. 集合 S の二つの要素 a，b に関係 $a \sim b$ が定義されていて上の 3 つの条件を満たすとき，$\sim$ は S の同値関係であるという

- 反射律: $a \sim a$.
- 対称律: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$.
- 推移律: $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

定義 2. $\sim$ を集合 S の同値関係とする．S の要素 a に対し，

$$C(a) = \{x \text{ は } S \text{ の要素} \mid x \sim a\}$$

を a の**同値類**，a をその代表という．

定義 3. $\sim$ を S の同値関係とする．同値類 $C(x)$ 全体の集まりを $S/\!\sim$ と書き，S **の分割**と呼ぶ．

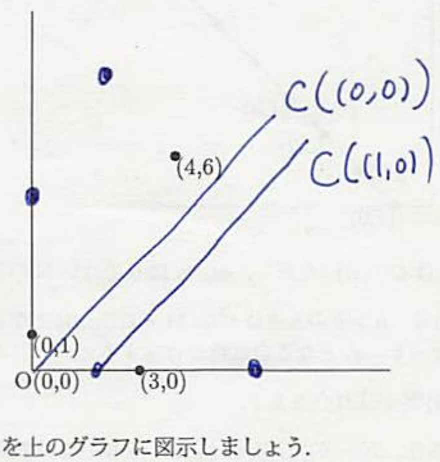
まとめ　集合 S に同値関係 $\sim$ が定義されると，S の分割 $S/\!\sim = \{C(x) \mid x \text{ は } S \text{ の要素 }\}$ が得られる．同値類のすべての要素は代表になることができる．

3　$\mathbb{N}$ から $\mathbb{Z}$

0 と自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ とします．すなわち，$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$．整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ とします．すなわち，$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$．

減法で不都合が生じる集合である自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ の加法だけを使って，減法で不都合が生じない集合 (群) である $\mathbb{Z}$ と「(群として) 同じ集合」をつくることを目標にします．この方法は，モノイドから群をつくる方法に一般化されます．

$\mathbb{N}^2$ は，x 座標と y 座標がともに自然数である点全体とします．たとえば，$\mathbb{N}^2$ の要素 $(0,1)$，$(3,0)$，$(4,6)$ は以下の図のような点とみなすことができます．



$(X\ Y) \sim (x\ y)$

$Y + x = X + y$

練習 1. $\mathbb{N}^2$ の要素 $(0,5)$，$(2,8)$，$(5,0)$ を上のグラフに図示しましょう．

$\mathbb{N}^2$ の要素 (a,b)，(c,d) に対し関係 $(a,b) \sim (c,d)$ を $a+d = b+c$ で定めます．$0+2 = 1+1$ となるので，$(0,1) \sim (1,2)$ となります．$1+3 = 2+2$ となるので，$(1,2) \sim (2,3)$ となります．$0+0 \neq 1+1$ なので，$(0,1) \sim (1,0)$ は成り立ちません．

定理 1. $\mathbb{N}^2$ の関係 $\sim$ は同値関係である.

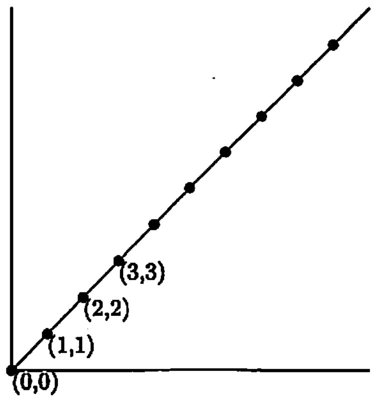
証明. (反射律) $\mathbb{N}^2$ の要素 (a,b) について, $a+b=b+a$ となるので $(a,b)\sim(a,b)$ となる.
(対称律) 要素 (a,b), (c,d) について $(a,b)\sim(c,d)$ が成り立つとする. すると $a+d=b+c$ なので右辺と左辺を入れ換えると $b+c=a+d$, すなわち $c+b=d+a$ が成り立つ. よって $(c,d)\sim(a,b)$ となる.
(推移律) $(a,b)\sim(c,d)$ と $(c,d)\sim(e,f)$ が成り立つとする. すると $a+d=b+c$ と $c+f=d+e$ が成り立つ. 両辺を加えると $a+f+(c+d)=b+e+(c+d)$ となる. 特に $a+f=b+e$ となるから $(a,b)=(e,f)$ となる. □

$(0,1)\sim(1,2)$ と $(1,2)\sim(2,3)$ が成り立つので, 推移律より $(0,1)\sim(2,3)$ となります.

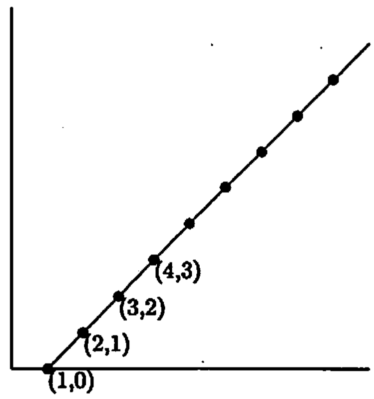
$\mathbb{N}^2$ の同値関係 $\sim$ が与える分割 $\mathbb{N}^2/\sim$ の要素を考えます. $C(0,0)=\{(a,b)\mid(a,b)\sim(0,0)\}$ だったので (a,b) が $C(0,0)$ の要素であることは $a+0=b+0$, すなわち, $a=b$ となることです. よって $C(0,0)$ は「x 座標と y 座標が等しい自然数の組全体」の集合となります. $C(0,0)=\{(0,0), (1,1), (2,2), \cdots, (n,n), \cdots\}$. また, 代表はどの要素にしてもよいので

$$C(0,0)=C(1,1)=C(2,2)=\cdots=C(n,n)=\cdots$$

となります. グラフで表すと半直線 $y=x \quad (x\geqq 0)$ の上にある自然数からなる点の集まりということになります.



$\mathbb{N}^2/\sim$ の要素 $C(1,0)$ を考えます. $C(1,0)=\{(a,b)\mid(a,b)\sim(1,0)\}$ だったので $a=b+1$ となります. よって, $C(1,0)$ は「x 座標と (y 座標 $+1$) が等しい自然数の組全体」の集合となります. $C(1,0)=\{(1,0), (2,1), (3,2), \cdots, (n+1,n), \cdots\}$. また, 代表はどの要素でもよいので $C(1,0)=C(2,1)=C(3,2)=\cdots=C(n+1,n)=\cdots$ となります. グラフで表すと半直線 $y=x-1 \quad (x\geqq 1)$ の上にある自然数からなる点の集まりということになります.



定理 2. $C(a,b)$ は $C(0,0)$, $C(m,0)$, または $C(0,n)$ (ただし, m, n は 0 でない $\mathbb{N}$ の要素) と表すことができる.

証明: $a=b$ のときは $C(a,b)=C(0,0)$ となる. $a>b$ のときは $C(a,b)=C(m,0)$ となる自然数 m $(m=a-b)$ が存在する. 同様に $a<b$ のときも $C(a,b)=C(0,n)$ $(n=b-a)$ となる自然数が存在する. □

$C(7,9)=C(0,2)$, $C(100,1)=C(99,0)$ 等が成り立ちます.

定理 2 より, $\mathbb{N}^2$ の分割は $\mathbb{N}^2/\sim=\{C(0,0), C(m,0), C(0,n)\mid m, n$ は 0 でない $\mathbb{N}$ の要素 $\}$ となることがわかります.

練習 2. 次の同値類から等しいものを選び等号で結びましょう.
$C(5,2)$, $C(2,4)$, $C(3,0)$, $C(1,9)$, $C(0,2)$, $C(0,8)$.

C(3.0) (0 2) C(3.0) C(0 8) C(0.2) C(0 8)
2

定理 3. $\mathbb{N}^2$ の分割 $\mathbb{N}^2/\sim$ には加法が $C(a,b)+C(c,d)=C(a+c,b+d)$ で「うまく定義される」.

$\mathbb{Z}$ における計算

$$1+2=3$$

は, $\mathbb{N}^2/\sim$ における計算

$$C(1,0)+C(2,0)=C(3,0)$$

と対応しています.

加法の定義より $C(0,0)+C(1,0)=C(0+1,0+0)=C(1,0)$ となります. より一般に $C(0,0)+C(a,b)=C(a,b)$ となります. $C(0,0)$ は整数における 0 と同じ役割をもつことがわかります.

$\mathbb{Z}$ における計算

$$2+0=2$$

は, $\mathbb{N}^2/\sim$ における計算

$$C(2,0)+C(0,0)=C(2,0)$$

と対応しています.

加法の定義より $C(1,0)+C(0,1)=C(1,1)=C(0,0)$ となります. より一般に $C(a,0)+C(0,a)=C(a,a)=C(0,0)$ となります. $C(0,1)$ を $-C(1,0)$ と書きましょう. より一般に

$$-C(a,0)=C(0,a)$$

と約束しましょう. すると $\mathbb{Z}$ における

$$2-3=-1$$

は, $\mathbb{N}^2/\sim$ における

$$\begin{aligned} C(2,0)+(-C(3,0)) &= C(2,0)+C(0,3) \\ &= C(2,3) \\ &= C(0,1) \quad (\text{定理 2 を用いた}) \\ &= -C(1,0) \end{aligned}$$

と対応していることがわかります.

定義 4. 群 $(\mathbb{N}^2/\sim,+)$ を $\mathbb{N}$(有限集合の圏) のグロタンディーク群 (Grothendieck group) といい, $K_0(\mathbb{N})$ と書く.

練習 3. $C(24,43)=-C(n,0)$ をみたす自然数 n を求めましょう.

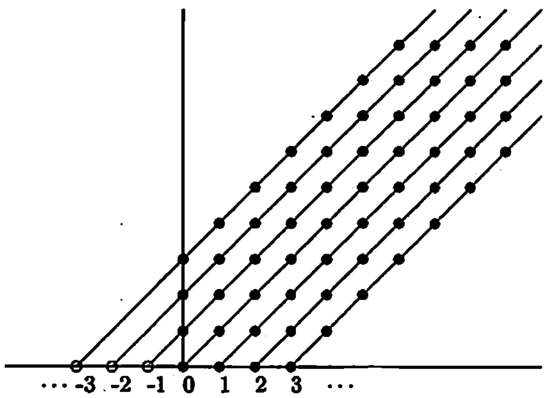
C(0, 19)　　n = 19

定理 4. $\mathbb{N}^2$ の同値関係 $\sim$ が与える分割 $\mathbb{N}^2/\sim$ は整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ と「群として同じもの (群同型)」である.

証明: $\mathbb{Z}$ の要素との対応は, $\mathbb{N}$ の要素 $a>0$ について

$$a\leftrightarrow C(a,0),\quad 0\leftrightarrow C(0,0),\quad -a\leftrightarrow C(0,a)$$

とすればよい. □



($\mathbb{Z}$ と $\mathbb{N}^2/\sim$ の関係)

確認問題.

$\mathbb{N}^2/\sim$ において，次の計算をしましょう．計算結果に対応する整数を書きましょう．

$C(6,15)+C(8,2)$ = C(0,9) + C(6,0) = C(0,3)

まとめ

$\mathbb{Z}$ は $\mathbb{N}$ のグロタンディーク群 (と同型) である．$\mathbb{Z}\cong G(\mathbb{N})$．さらに以下のように一般化できることが知られている．

M がモノイド $\Rightarrow K_0(M)=M^2/\sim$ は (M の加法で定まる加法について) 群となる

4 なぜ Grothendieck 群?

三角錐には 4 つの点、6 つの辺、4 つの面がある．

$$(\text{点の数})-(\text{辺の数})+(\text{面の数})=4-6+4=2.$$

四角柱には 8 つの点、12 本の辺、6 つの面がある．

$$(\text{点の数})-(\text{辺の数})+(\text{面の数})=8-12+6=2.$$

オイラーの凸多面体の定理　凸多面体 X について以下の等式が成り立つ．

$$(X\text{ の点の数})-(X\text{ の辺の数})+(X\text{ の面の数})=2$$

Grothendieck は，ある圏 $\mathcal{C}$ の対象 X について

$$\chi(X)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i q(X)_i$$

という数 (量) を定義した．$\chi(X)$ はオイラー標数と呼ばれている．

5 最近の結果

定理 (Sawabe-O[2009])　有限群 G と部分群の族 X に対して，圏 $\mathcal{C}(G,X)$ で，$K_0(\mathcal{C}(G,X))$ には「ある」積が定義できるようなものが存在する．

$$\text{環 } K_0(\mathcal{C}(G,X)) \text{ の単位元 } = X \text{ の Steinberg 加群}.$$

定理 (Sawabe-O[2011])　環 $K_0(\mathcal{C}(G,X))$ の単位元 $I(G)$ について $\deg I(G)=\chi(X)$ が成り立つ．

例 (Sawabe-O[2011])

$$\begin{aligned}
\deg I(M_{24})-1 &= 21504=2^{10}\cdot 3\cdot 7.\\
\deg I(Co_1)-1 &= -104,144,306,176=-2^{18}\cdot 23^2\cdot 751.\\
\deg I(M)-1 &= 2^{42}\cdot(73,427,837,341,156,925,816,952,881)\\
&= 2^{42}\cdot 23\cdot 5179\cdot 318245027\cdot 1936981015559.
\end{aligned}$$

6 参考文献

[1]「代数学 1　群論入門」，雪江明彦，日本評論社，2010 年．

[2]「Basic Algebra I (second edition)」，Nathan Jacobson，Dover Publications，2009 年．

[3]「A collection of subgroups for the generalized Burnside ring」，F. Oda-M. Sawabe, Advances in Mathematics, 222, 2009 年．

[4]「The generalized Burnside rings with respect to a collection of self-normalizing subgroups」，F. Oda-M. Sawabe, Journal of Algebra, 334, 2011 年．