パーコレーションで（少し）理解する感染症の伝播*

原　隆九大数理

hara@math.kyushu-u.ac.jp

Last updated: April 12, 2021

目 次

概 要

この 1 年，SARS-CoV-2 による新型肺炎 COVID-19 が猛威を奮っています．少し収まっていましたが，また変異株が問題を起こしそうです．現場で戦っておられる医療関係者，物流を支えてくださってる皆さん，全てのみなさんに感謝します．

この稿では，数学（確率論）のモデルである「パーコレーション」を用いて，感染症の拡大についての一つの見方（描像）を解説します．本文で詳しく述べるように，この見方には**様々な限界**があり，とてもじゃないけど，疫学の専門家の方々の研究の代替になるものではありません．

しかし，このような描像を持つことにより，大きな時間スケールでの状況をある程度理解でき，その結果として，専門家会議などがおっしゃっている**「みなさんがどう行動すべきか」の理由を理解するのに役立つ**ことを期待します．特に，「臨界確率」と呼ばれる量があり，これと感染確率の大小が運命の分かれ目であることは，強調したいと思っています．（その後，どのように行動するかは，みなさん一人ひとりの判断です．）

*2020-2021 年の COVID-19 の蔓延に際して

1　初めに：COVID-19 について

CONID-19 については不明な点も多い．以下はあくまで，現時点での暫定的なものである．

- 現在，全世界に感染が拡がっているのはご存知の通り．
- 厄介（拡がりやすい）な性質
  - かなりの人は「軽症」または「無症状」で回復　→ 知らぬ間に感染させるかも
  - 潜伏期も長め？
  - 感染力はインフルより少し強め？
- ちょっとマシな性質：幸い，致死率はそれほど高くないようだ．人々が冷静であれば，社会インフラが破壊されるまでには至らないと期待できる．
- 結論：エボラや SARS ほどではないにしても，**ほどほどに厄介**だ．

可能な（考えうる）対策：

- 基本は「予防（病気にかからない）」と「治療（かかっても治す）」
- 予防については，ワクチンの開発が急務だが，いま漸く，できてきたところ．行き渡るには時間がかかる．
- 治療薬も模索中（最近の分子設計技術に期待）．こちらはどうも芳しくない．
- 患者が増えすぎると，病院が一杯になって，助かる人も助からなくなる（医療崩壊）．これが今現在，危惧されていること．
- だから，**患者数（重症者数）をできるだけ下げる**ことが最重要．
- そのためには，**実質的な感染率を下げる**ことが最重要だ．(病気そのものの感染率は変えられないが，みんなで注意して，**かかり易い行動を避ける**.）

ということで，**実質的な感染率を下げる**ことの必要性，およびそのためにどうすれば良いのか，の**原理を納得してもらう**べく，病気の感染の簡単な数理モデルを説明する．

なお，実際の対策を考えるには，社会的な影響は無視できない．

- 現代社会は，様々な国，地域，企業，人，が複雑に絡み合って，ギリギリのところで関係を保ちつつ動いている．
- どこか一箇所が弱くなると一気に崩れる可能性が大．
- 例えば，極端な政策として「全員，家から出ないで 1ヶ月耐える（食料，インフラはあるとの前提で)」ことをすれば，COVID-19 はやっつけられても，**経済的なダメージ**が計り知れず，結果として間接的な死者がより多くなるかもしれない．
- 本稿ではこれらの複雑な問題には触れない．あくまで,「病気にかからないためには，どうすべきか」(の基礎になる考え）を論じる．

2　基本的な考え方：感染症の伝播をパーコレーションでモデル化すること

本稿では，感染症の伝播を「パーコレーション」と呼ばれる確率論のモデルで**定性的に**理解することをめざす．おいおい述べて行くように，この方法には限界もたくさんある．しかし,「感染がどのように拡がるか？」特に「長時間経った後ではどうなっているのか？」「変異株にはどう対応すべきか？」などについては，ある程度の理解（描像）が得られることを期待する．

2.1　はじめに

通常，感染症の拡がりは微分方程式で記述して研究する．特に有名なのは SIR model だが，もっともっと複雑なモデルも多々ある．これらは疫学の専門家の方々が解析されており，その結果は，もちろん，信頼できる．

ここでは，これらとは異なる，確率論（パーコレーション）の視点からの理解（**定性的な描像**）を述べる．

この見方の利点：

- **定性的**な理解（描像）が得られる
- 特に，感染確率が低い場合と高い場合で，**本質的に様相が異なる**ことが理解できる．
  - 感染確率が低い（「**臨界確率**」よりも低い）場合は，少数の人間しか感染しないが,
  - 感染確率が高い（「臨界確率」よりも高い）場合は，多数（人口比で見て正の割合）が感染する
  - もちろん，感染者の割合は，感染確率が高くなると 1 に近づく（ほぼ全員が感染する）
- 結果として,「一人一人が感染確率を下げよう」という動機付けが得られる（はず）
- 変異株への正しい対応もわかる
- 「集団免疫」のイメージもわかる

この方法の欠点とお断り：

- 問題を簡単化しすぎたので，時間変化（どのように増えるか）を追うことが難しい（本稿では時間変化は扱わない）
- これだけでは**定量的**な議論は難しい（種々のデータ不足；特に医学的見地が必要）．あくまで**定性的な理解**のみを目標とする
- かなり粗い近似であり，細部では正しくないことも多い
- 感染爆発を起こしている状況では「ランダムグラフ」の考え方が有効だが，本稿ではほとんど立ち入らない．
- **ということなので，あくまで一つの理解の仕方として見て頂きたい．**

2.2　基本的な考え方（モデル化）

パーコレーションを無理やり感染症に応用（モデル化）する場合の基本的な考え方は：

2.2.1　最も簡単（？）な例

非常に簡単化した，以下の問いを考察しよう．

> Q1. 以下の状況を考える．
>
> - A, B, C, D の 4 人は，家が隣同士で，一直線に並んでいる．
> - 彼らは隣の人とは交流（会話，一緒に遊ぶなど）があるが，それ以外には交流はない．つまり,「A と B」「B と C」「C と D」の間にのみ交流がある．
> - この交流を通して，感染症が感染する確率は全て p であると仮定する（感染確率の解釈については，後の「注意 2」参照）．
>
> 最初に A 君が感染していた時，最終的に D 君が感染する確率はいくらか？　なお，最初の A 君の感染以外は，外部からの感染はないものとする．

（注意 1）「人が 4 人しかいない」「隣の人としか交流がない」「外部からの感染がない」などはもちろん．考えやすくするための簡単化．実際の交流はもっともっと複雑だが，ここは追い追い，一般化する．

（注意 2）「感染確率」p の解釈について： このモデルで一番引っかかるのは,「感染確率」の解釈だろう．少し強引な解釈は以下の通り．

> かなり多くの感染症では，感染後に一定時間が経てば，その人から感染することはない.「その人が 回復/死亡する」「症状が酷いと仕事や遊びでの交流もできなくなる」「隔離される」などの理由で，ウイルスがばら撒かれなくなるから．なので，感染確率 p とは,「一人の感染者が，回復/死亡/隔離 されるまでに隣の人に感染させる確率」と思ってほしい．

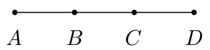
（注意 3）免疫について：上の（注意 2）では,「回復した人は免疫を獲得し，2 度とウイルスを撒き散らさない」ことも仮定している．もし，いつまでもウイルスを撒き散らし続けるなら，上の感染確率 p は 1 になってしまい，全員，確実に感染する．本稿では，そんな悪夢の世界は考えない.（その場合でも，治療薬ができれば我々は生き残れます．医学に期待しましょう！）

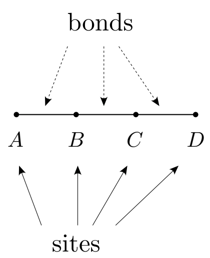
（注意 3′）なお，COVID-19 については，再感染した例も報告されているようだ．それでも,「一旦罹患して治ってしまえば，しばらくは再感染しない」のも確かなようだ．であるので，半年程度のタイムスパンを考える限りでは,「感染後に一定時間が経てば，その人から感染することはない」と思っても，まあ，良いだろう．

2.2.2　パーコレーションの定義（Q1 の場合）

上の Q1 は，確率論で**グラフ上のボンドパーコレーション**という問題の簡単な例になっている．その定義を述べよう．

まず，Q1 での人の交流を「グラフ」で表す[1]．つまり，A, B, C, D の人を点で，その間の交流を線で表す．下図の左のようになるだろう．





[1] ここでの「グラフ」は高校までの「函数のグラフ」とは意味が違う

人を表す点を**サイト** (site) と呼ぶ．また，人の間の交流を表す線（＝サイトのペア）を**ボンド** (bond) と呼ぶ（上図の右）．

ボンドパーコレーションモデル（の一番簡単バージョン）とは，上の「ボンド」が確率的に　通行可能/通行不可能　になるモデルである．つまり，それぞれのボンドは**独立に**

- 確率 p で「通行可能」(open)
- 確率 $(1-p)$ で「通行不可能」(closed)

なると想定する．そして（例えば）「A の点から D の点まで『通行可』になる確率は何？」と言った問いを考える．(数学的にきちんとした定義は，節を改めて述べる．)

上の問い「A の点から D の点まで『通行可』になる確率は何？」とはまさに,「最初に A が感染していた時に，最終的に D も感染する確率」を問うている．つまり，上のボンドパーコレーションモデルは，Q1 と数学的に等価である．(この意味で,「bond が open」は「この交流を通して感染した」,「bond が closed」は「この交流では感染しなかった」と思って良い．)

この定式化では，人と人との**「交流」の有無**と**交流を通しての感染確率**だけが必要な情報で，それらの人が「どこに住んで，どのような交流をしているか」は問題ではない．例えば：

Q1′. 以下の状況を考える．

- A, B, C, D の四人は，ある会社で働いている．
- 仕事上,「A と B」「B と C」「C と D」の間にのみ交流（会話，資料のやりとりなど）があるが，これ以外の交流はない（挨拶もしない）．
- この交流を通して，感染症が感染する確率は全て p であると仮定する．

最初に A さんが感染していた時，最終的に D さんが感染する確率はいくらか？　なお，最初の A さんの感染以外は，外部や他の社員からの感染はないものとする．

Q1 と Q1′ は数学的には全く同じである．A, B, C, D が隣同士に住んでいてもいなくても,「**誰と誰の交流がどの程度か**」を見れば，答えは出る．このように，**人と人との交流（の深さ）に注目して感染症の伝播を見て行こう**，というのが本稿の目的である．

2.2.3　パーコレーションの定義（もう一つの例）

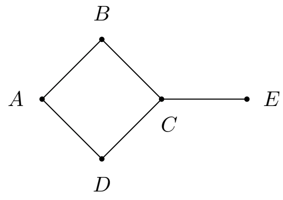
念のため，もう一つ例をあげておこう．

Q2. 以下の状況を考える．

- A, B, C, D, E の 5 人は，ある会社で働いている．
- 仕事上,「A と B」「B と C」「C と D」「D と A」「C と E」の間にのみ交流（会話，資料のやりとりなど）があるが，これ以外の交流はない（挨拶もしない）．
- この交流を通して，感染症が感染する確率は全て p であると仮定する．

最初に A さんが感染していた時，最終的に E さんが感染する確率はいくらか？　なお，最初の A さんの感染以外は，外部や他の社員からの感染はないものとする．

Q2 が以下のグラフを用いて表現できるのは，Q1 を理解した方には大丈夫ですね．



2.2.4　より現実的な例に向けて

より現実的なモデル化には，様々な要素を考慮する必要がある．

- まず，**現実の人間関係は非常に複雑**である．
  - 「幼稚園に通っている子供」に限定しても，その友達関係は Q1 のように簡単なものではないだろう．「A 君と B 君，B 君と C 君，C 君と D 君は大変仲が良い」「A 君と C 君，B 君と D 君もそこそこ仲が良い」「これ以外の組み合わせは仲が悪くて交流なし」などの無数の可能性が無数に考えられる．
  - さらに，幼稚園ならともかく，大学生や働いている人なら，大学や会社のみならず，それぞれの家庭，恋人関係，など様々な交流がある．さらに，通勤途中での（望まぬ）交流などもあるだろう．

  本気で解析するなら，これらの複雑な交流（人と人のネットワーク）を考える必要がある．

- 次に，感染症の伝播には，かならず**時間的遅れ**が生じる．瞬時に感染して瞬時に伝染する病はないだろう．実際には（数日などの）潜伏期間をへて発症し，伝染が始まる（新型コロナでは「潜伏期間中にも伝染するかもしれない」とも言われているが）．本稿では,「十分に時間が経ったあとに感染がどこまで拡がっているか」を考え,「時間とともに感染がどのように拡がるか」にはほとんど触れられない．

本来は，これらの複雑な要素をすべて考えることが必要だが，本稿ではそこまではできない．ただし，**問題の定性的な様相はこれから述べる簡単化されたモデルと（大体）同じ**である．本稿の目的は，簡単化されたモデルを通して，感染症の伝播の定性的な理解を（少し）深めていただくことだ．

次節で，パーコレーションの数学的側面に簡単に触れたあと，その感染症への応用に触れる．

3　確率論のモデル：パーコレーション

本節では，典型的なグラフにおけるパーコレーションモデルの性質とその感染症への応用（解釈）を解説する．その感染症への応用（解釈）については，次の節でも述べる．

3.1　一般のグラフ上のパーコレーション（定義）

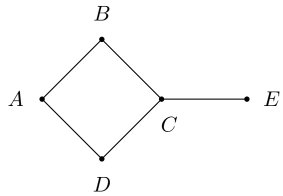
人と人との交流に着目して感染症の伝播を考える際の基本的な考え方を 2.2 節で示した．キーは，人と人との交流を「グラフ」で表現して，そのグラフ上のパーコレーションを考えるというものだった．ここでは一般のグラフ上のパーコレーションを定義する．次の小節から，典型的なグラフについて，そのパーコレーションの性質を解説する．

まず一般のグラフを定義する．

定義 3.1 グラフ (graph) というのは，V と E という二つの集合からなる集合である．記号では (V, E) と書く．ここで,

- V とは頂点 (vertex) の集合
- E とは辺（edge）の集合：辺とは頂点のペアである．

Q2 で考えた例を再掲すれば：



頂点の集合は $V = \{A, B, C, D, E\}$，辺の集合は $E = \{AB, BC, CD, DA, DE\}$ である[2].

定義 3.2 グラフ G 上のボンドパーコレーションモデルでは以下の考察を行う.

- グラフの辺（ボンド）は，**互いに独立に**
  - 確率 p でボンドが通行可 (**bond open**)
  - 確率 $(1-p)$ でボンドが通行不可 (**bond closed**)

  になるとする．ここで p は 0 以上 1 以下の数で，全てのボンドに共通.
- 各ボンドごとにサイコロを振って,「通行可」か「通行不可」を決める．このように決めたボンドの状態を**ボンドの配位** (bond configuration) と呼ぶ.
- ボンドの配位が決まった時，特に以下の事象や量に注目する：
  - **サイト x と y はつながっている** (x and y are connected) 事象：サイト x から y まで『通行可』のボンドを通っていける事象のこと．$x \leftrightarrow y$ と表す.
  - （上への補足）x は自分自身といつでもつながってるとみなす．つまり，ボンドの配位には関係なく，常に $x \leftrightarrow x$.
  - **サイト x の連結成分** (connected cluster of x)：サイト x からつながっているサイトの全体．$C(x)$ で表す．$C(x)$ 内のサイトの数を $|C(x)|$ と書き，$C(x)$ **の大きさ** (size of $C(x)$) と呼ぶ.
- 記号を導入する.
  - ボンドの配位の確率分布に関して，ある事象 A が起こる確率を $\mathbb{P}[A]$ と書く.
  - ボンドの配位の確率分布でに関して，ある量 X の期待値を $\mathbb{E}[X]$ と書く.

  これらはもちろん，パラメーター p に依存するが，その依存性はあらわには書かない.
- 我々が特に注目したいのは，
  - サイト x とサイト y がつながっている確率 $\mathbb{P}[x \leftrightarrow y]$
  - サイト x の連結成分の大きさの期待値 $\mathbb{E}[\,|C(x)|\,]$
  - サイト x が無限遠までつながる確率（percolation density） $\theta_p(x) := \mathbb{P}[\,|C(x)| = \infty]$

  の 3 つの量である.（最後の θ_p は，グラフが無限グラフの場合のみ定義される；具体例はこの後で.）これらがパラメーター p の函数としてどう変化するか，に注目する.

3.2 A warm up：1 次元のパーコレーション

この「1 次元モデル」は実際の人々の交流とは程遠い．しかし，計算しやすく，また，後から述べる，より現実的なモデルとの**対比が際立っている**ため，解説する.

より複雑かつ現実的な例は 3.3 節以降で扱う.

[2]辺はサイトのペアなので，通常は $\{A, B\}$ などと集合の記号を使って書くが，ここでは簡単に AB と書く

3.2.1　1 次元のパーコレーション：定義

このモデルの定義は以下の通りで，Q1 の 4 人をたくさん（無限）の人に拡張したものになっている．

Q1″. 以下の状況を考える．

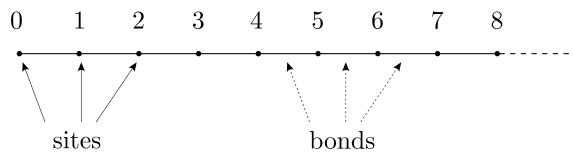
- 無限にたくさんの人がいる．便宜上，人を非負の整数 x で番号づけて区別しよう．
- どの人 x も，$(x-1)$ および $(x+1)$ の人とは交流があるが，これ以外の交流はない（ただし，$x=0$ の人は，$x=1$ の人とのみ交流）．
- この交流を通して，感染症が感染する確率は全て p であると仮定する．

最初に 0 番の人が感染していた時，最終的に x の人が感染する確率はいくらか？

このモデルのグラフ $G=(V,E)$ は，以下のもの：

- 頂点（サイト）の集合：$V=\{$ 数直線上の座標が整数である点 $\}$
- 辺（ボンド）の集合：$E=\{$ 隣り合ったサイトのペア $\}$

要するに下図のように，一直線に人が並んでいる，わけだ．簡単ですね．



3.2.2　1 次元のパーコレーション：解きましょう

1 次元モデルは高校数学の知識で完全に解ける．

原点とサイト x がつながる確率　x を正の整数として，原点とサイト x がつながる確率を計算しよう．この事象が起こる必要十分条件は

$$01,\quad 12,\quad 23,\quad \cdots,\quad (x-1)x \tag{3.1}$$

のすべてのボンドが通行可になってること，だ（0 の左，x の右はどうなっていても良い）．ここには x 本のボンドがあり，これらが独立に確率 p で「通行可」になるので，この事象の確率は，p^x だ．$x=0$ の時はいつでも connected と定義したので確率は 1 だが，これも $p^0=1$ に合致している．以上から，以下が得られる：

$$\mathbb{P}\,[0 \leftrightarrow x] = p^x \tag{3.2}$$

$p=1$ の場合を除いて，この確率は x の増大と共に，ゼロに近づく．つまり，$p<1$ なら，原点と遠くの x がつながってる確率は，非常に小さくなる．

Percolation density　x の人に伝わる確率が p^x なのだから，直感的に考えても「無限遠まで伝わる」確率はゼロだろう．実際，

$$\mathbb{P}\,[\,|C(0)| = \infty] = 0 \tag{3.3}$$

だ．

原点の connected cluster の大きさの期待値　今度は，原点の connected cluster の大きさの期待値を考えよう．そのために，n を正の整数として，$|C(0)| = n$ となる確率を求める．Connected cluster の定義から，$|C(0)| = n$ となるためには,「原点の connected cluster が，(1) ちょうど $x = n-1$ まで届くが，(2) その先にはつながっていない」ことが必要十分であるとわかる．(1) の方は，すぐ上で考えた.「原点と x がつながっている」事象と同じ．(2) の方は,「ボンド $\{x, x+1\}$ が closed」であることと同じ．(1) と (2) は独立なので，積事象の確率を用いて

$$\mathbb{P}\left[|C(0)| = n\right] = p^{n-1}(1-p) \tag{3.4}$$

が得られる．$|C(0)|$ の期待値は

$$\mathbb{E}\left[|C(0)|\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n\, p^{n-1}(1-p) = (1-p) \times \sum_{n=1}^{\infty} n\, p^{n-1} = (1-p) \times \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{1-p} \tag{3.5}$$

とわかる．この期待値は,「何人の人が感染するか」の期待値と考えられる．

3.2.3　1 次元のパーコレーション：まとめ

1 次元のまとめ：せっかく解析したのだが，1 次元ではあんまり大変なことは起きなかった．

- 原点とサイト x がつながる確率は p^x である．これは，$p < 1$ なら，$x \to \infty$ でゼロになる．無限遠まで届くことはない．
- 原点の connected cluster の期待値は $(1-p)^{-1}$ である．これも $p < 1$ なら有限である．つまり，$p < 1$ なら，原点からある程度の有限の距離までは繋がってるけども，その先にはつながらない．

（感染症での解釈）

- 原点にいた人だけが最初に感染していた場合，x にいる人まで感染が伝わる確率は p^x ．$p < 1$ なら，遠い人（x が大）はまあ，安心！
- 原点にいた人だけが最初に感染していた場合，最終的に感染する人の集合が $C(x)$ だった．$|C(0)|$ の期待値は,「最初，原点にいた人が感染していた場合に最終的に感染する人の数」の期待値に他ならない．この期待値が有限である（かつ，$p \approx 1$ でない限りは，大きな数ではない）ことは，最終的な感染者数は大きくない（なので，大多数の人にとっては安心！）ということ．

2 次元以上では全くことなる（恐ろしい）様相になることを，次節以降で見よう．

3.3　本題：2 次元のパーコレーション

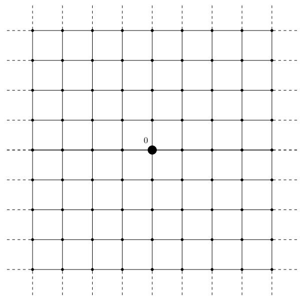
では漸く，本題です．先に考えた 1 次元のモデルを 2 次元に拡張します．

感染症を扱うには，2 次元よりももっと次元が高く複雑なモデルを考える必要があるが，2 次元を十分に理解すれば，複雑なモデルの理解も容易だ．なので，ともかく 2 次元を考えよう．(より複雑なモデルは，この 2 次元の後，3.4 節で考える)．

3.3.1　2 次元のパーコレーション：定義

このモデルのグラフ $G = (V, E)$ は，以下のものになる：

- 頂点（サイト）の集合 V：**2 次元平面**上で，**座標が整数**である点の全体
- 辺（ボンド）の集合 E：「隣り合ったサイトのペア」の全体



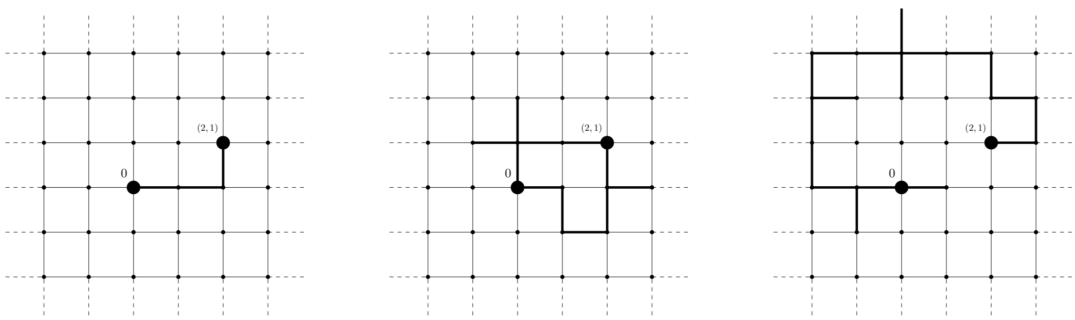
イメージとしては，上図のように碁盤目状に家が並んでいて，「隣の家とのみ交流する」場合に相当．

3.3.2　2 次元が 1 次元より格段に難しい理由

この 2 次元モデルは簡単には解けない．その理由は以下の通り．

1 次元の場合，原点から $x > 0$ につながる条件は「原点と x を結ぶ道の上のボンドがすべて open」であること[3]．「原点と x を結ぶ道」は一通りしかないので，この確率は p^x と計算できた．

ところが，2 次元では事情が全く異なる．下図には，原点と $(2, 1)$ の点がつながるボンドの配位の例をいくつか示した（太線が open bonds）．



一番左のは最短なつながり方だが，右例のように，「遠回りして漸くつながる」配位もたくさんある．遠回りする配位の確率は小さいが，場合の数は大きいので，バカにならない．このような配位を全て数え上げ，確率を計算するのは実質上，不可能．これが 2 次元モデルが格段に難しくなる理由である．

[3] ここでの「道」としては，「同じボンドは一回しか使わない」もののみを考える．このような道は self-avoiding walk と呼ばれる

3.3.3　2 次元のパーコレーション：数学の定理

2 次元のパーコレーションについては，ここ 70 年くらいの研究の結果，色々なことがわかっている．特に基本的なことは：

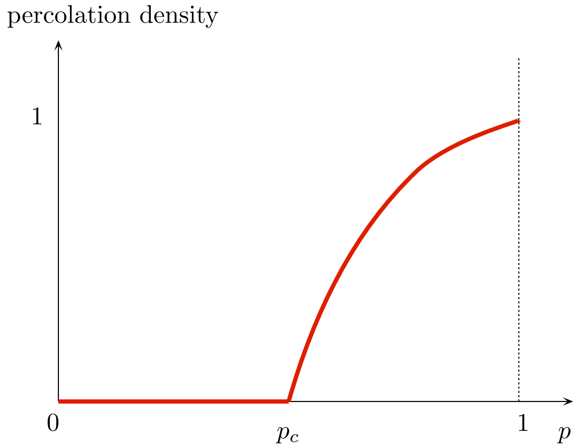
定理 3.3　2 次元のパーコレーションモデルには**臨界値** (critical value) p_c （$0 < p_c < 1$）があって，

- $p < p_c$ では無限クラスターは存在しない：$\mathbb{P}[\,|C(0)| = \infty\,] = 0$．原点から無限までつながる確率はゼロ！
- $p > p_c$ では無限クラスターができる：$\theta_p := \mathbb{P}[\,|C(0)| = \infty\,] > 0$．正の確率で，原点から無限遠までつながってしまう！

この結果だけではわかりにくいという人は，先に 3.3.4 節をご覧ください．

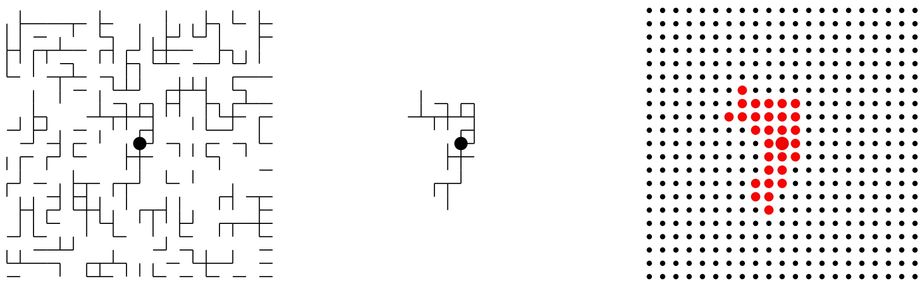
（補足）2 次元なら，上の p_c は厳密に $1/2 = 0.5$ であることが証明されているが，この値は（本稿では）重要ではない．重要なのは，$0 < p_c < 1$ であることだ．

$\theta_p = \mathbb{P}[\,|C(0)| = \infty\,]$ (percolation density) を，p の関数として模式的に表すと，以下のようになる．定理で述べたように，$p < p_c$ では $\mathbb{P}[\,|C(0)| = \infty\,]$ がゼロだが，$p > p_c$ では $\mathbb{P}[\,|C(0)| = \infty\,]$ が正になっている．



3.3.4　2 次元のパーコレーション：シミュレーションの結果

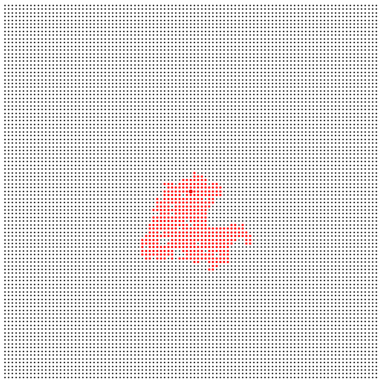
以下の色々な図の見方を最初に説明しよう．わかりやすいように，20×20 の有限の格子に制限し，$p = 0.20$ の場合を示した．配位の一つの例は，以下のようになる（図の見方は図の後で）．



- まず，左側の図は，この格子上の，ボンドの配位を示している（open なボンドは黒線で描いているが，closed なボンドは描いていない；この描き方の方が,「つながってるか否か」が一目瞭然だろう）．サイト同士はこの open bonds （黒線）で互いにつながったりつながらなかったりしている．
- 特に，原点（大きな黒丸）の connected cluster $C(0)$ を取り出したのが，真ん中の図．
- さらに「$C(0)$ が格子の中でどんな格好をしてるか」を強調するため，この $C(0)$ を赤点で，それ以外のサイトを黒点で描いたのが，右側の図．ボンドの配位はここでは描いていない．

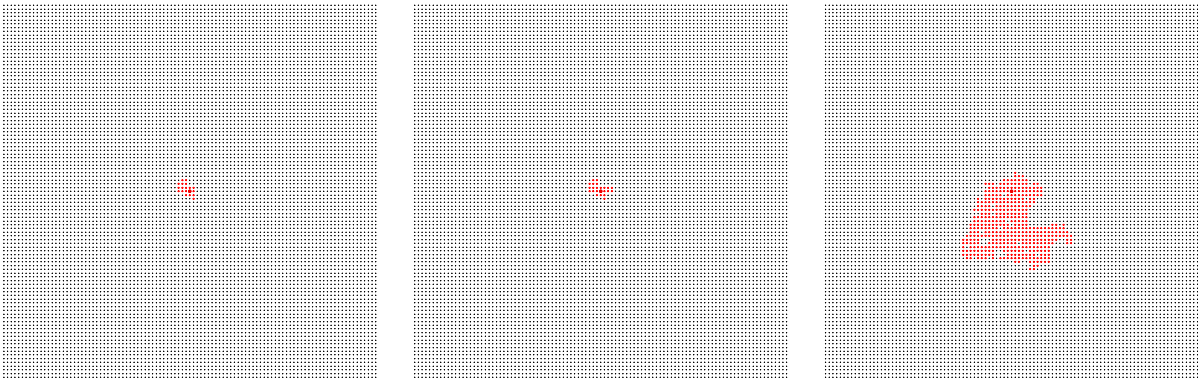
これからの議論では，原点の connected cluster $C(0)$ が主役になるので，上の右側の描き方をする．つまり，ボンドの配位は描かず,「$C(0)$ が全体の中でどんな形になってるか」だけを表す．

では，もう少し大きな格子の例をお見せしよう．最初に，100×100 の格子で，$p = 0.46$ の，一つの配位の例を示す．赤が $C(0)$.



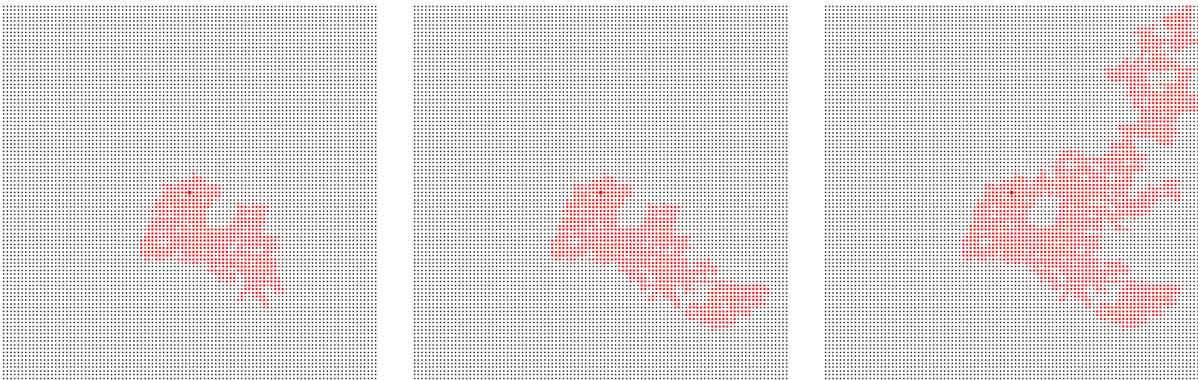
見ての通り，原点からある程度のところまではつながっているが，そこから先にはつながっていない．

他の p の例も並べてみよう．左から $p = 0.30, 0.40, 0.46$ の例



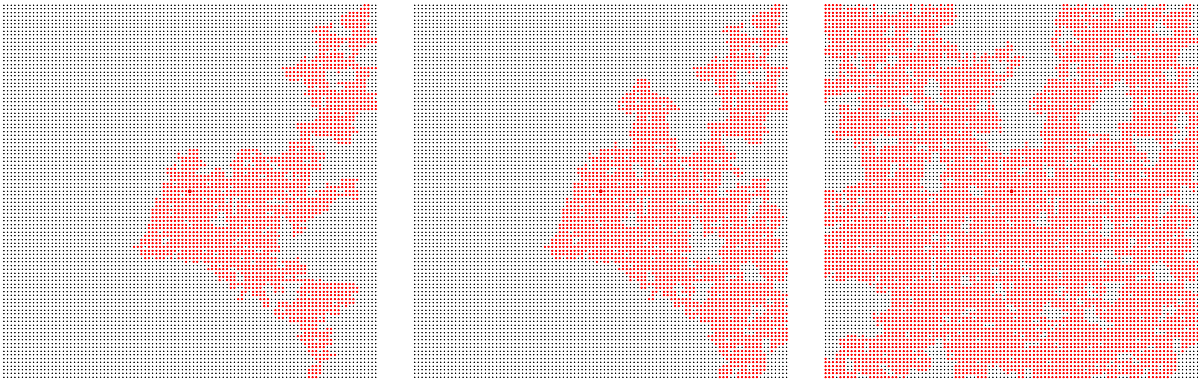
p が増えるに連れて，だんだんと $C(0)$ が大きくなるのがわかる．ただし，これらの例では，$C(0)$ は有限で収まっている感じだ．

もう少し p をあげてみよう．左から $p = 0.48, 0.49, 0.50$ の例

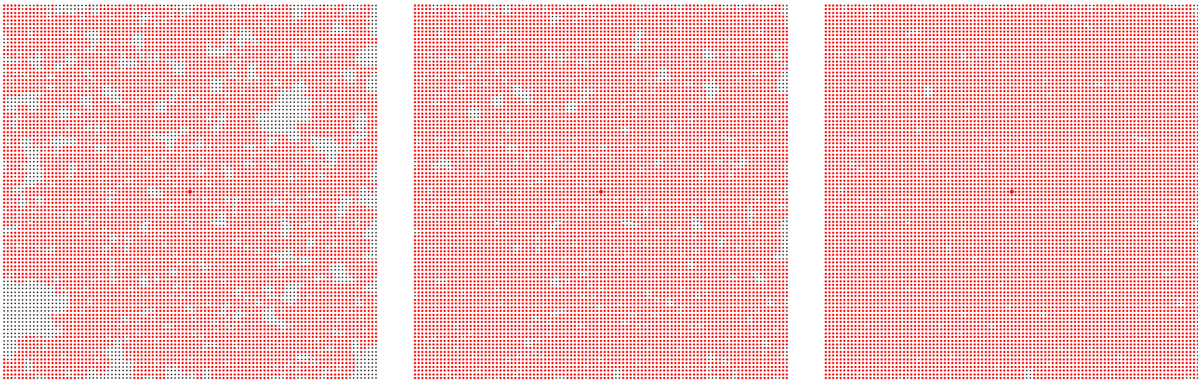


$C(0)$ は段々大きくなって来た．

もう少し続けよう．左から $p = 0.51, 0.52, 0.53$ の例

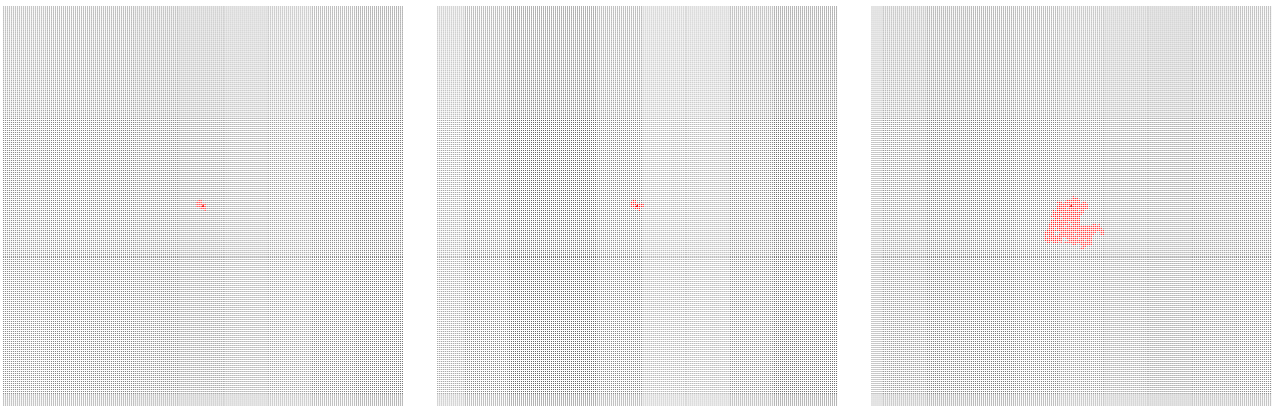


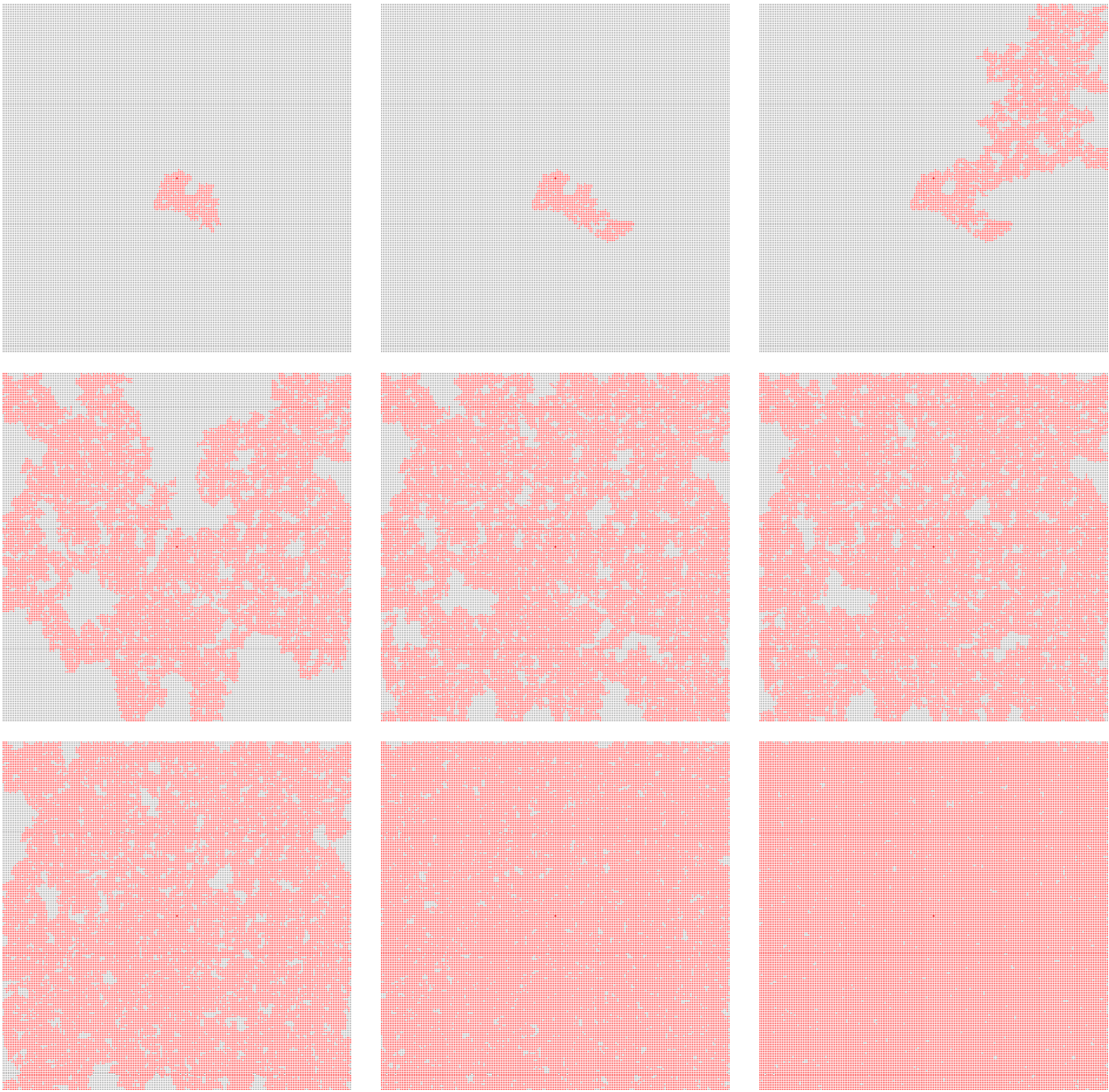
さらに左から $p = 0.54, 0.60, 0.70$ の例



$p = 0.5$ 付近から赤が急に大きくなっていることがわかる．特に，$p \geq 0.7$ くらいではほとんど真っ赤だね（原点から，ほとんどの点につながっている）．

もっと大きな 200×200 の例もあげておこう．p の値は，100×100 と同じく，上段が（左から）$p = 0.3, 0.4, 046$，第 2 段が $p = 0.48, 0.49, 0.50$，第 2 段が $p = 0.51, 0.52, 0.53$，第 4 段が $p = 0.54, 0.60, 0.70$．





やはり，$p = 0.50$ 付近を境にして，**定性的な変化**がみられそうだ．つまり，$p < 0.5$ なら $C(0)$ は有限だが，$p > 0.5$ なら $C(0)$ は無限大 ?? この事情を述べたのが先の定理 1 である．

かつ，赤の領域（$C(0)$）の増えかたは，$p = 0.5$ 付近でかなり急速だ．(この 2 次元ボンドパーコレーションでは，臨界値がちょうど $\frac{1}{2}$ であることが数学的に証明されていることはすでに述べた．)

3.4 3 次元以上，またさらに一般の，パーコレーション

3.3 節では 2 次元平面に限定した話をした．感染症への応用を考えると，さらに一般のモデルを考える必要がある．

段階を追って説明しよう．

3.4.1 3 次元以上の（超）立方格子における percolation

拡張の一つの方向は，モデルの空間の次元を上げることだ．d 次元（$d > 2$）パーコレーションの舞台は，その名の通り，d 次元の世界である．

- d **次元空間**上で，**座標が整数**である点を**サイト**と呼び，サイトの全体を Λ で表す．数学の記号では $\Lambda = \{x \,|\, x$ は座標が整数である d 次元空間の点 $\}$ となる．
- 隣り合ったサイトの組み（ペア）を**ボンド**と呼び，ボンドの全体を $\mathcal{B}$ で表す．数学の記号では $\mathcal{B} = \big\{ \{x, y\} \,\big|\, x, y \in \Lambda,\ |x - y| = 1 \big\}$ となる（$|x - y|$ は x と y の距離）．各ボンドは，両端のサイトをつなぐ橋（または通路，道）のようなものと思ってほしい．

サイトの集合とボンドの集合を定義したので，これで**グラフ**を定義したことになる．今回はこのグラフが d 次元的に広がっていることに注意しよう．このあとは 1 次元と全く同じなので，繰り返さない．

$d \geq 4$ はイメージしにくいが，$d = 3$（3 次元）からの類推でイメージしよう．

このように次元を増やしても，**定性的には 2 次元のパーコレーションとほとんど変わらない**．実際，以下の定理が成り立つ．

> **Theorem 3.4** d 次元（$d \geq 2$）のパーコレーションモデルには**臨界値** *(critical value)* p_c （$0 < p_c < 1$）があって，
>
> - $p < p_c$ では無限クラスターは存在しない：$\mathbb{P}[\,|C(0)| = \infty\,] = 0$．原点から無限までつながる確率はゼロ！
> - $p > p_c$ では無限クラスターができる：$\mathbb{P}[\,|C(0)| = \infty\,] > 0$．正の確率で，原点から無限遠までつながってしまう！
>
> がなりたつ．p_c の値は d に依存するが，d が大きい場合は $p_c \approx \frac{1}{2d}$ である．

3.4.2 隣同士以外のボンドも加えた percolation

これまでに主に考えてきた 2 次元のパーコレーションモデルでは，ボンドは「隣り合った」サイトのペアとしていたので,「隣り合ったサイトの間のみがつながれる」状況だった．結果として，遠くのサイトまで行きたければ，互いにつながっているサイトを一つ一つ経由して行く必要があった．

この点を緩める拡張として,「2 次元世界にいることは同じだが，隣合わないサイトのペアもボンドとみなす」ことが考えられる．そのようにしても，モデルの定性的な性質はほとんど変わらない．やはり，臨界値 p_c があって，定理 3.4 が成り立つ．

4　感染症の伝播とパーコレーションの関係

前節のパーコレーションの描像を基にして，感染症の伝播を考えよう．ある程度は復習の要素もあるが，段々と現実の感染に近づくことを目指す．

まず，簡単にパーコレーションモデルの性質を復習すると，

- 1 次元のモデル（人や家が 1 直線上に並んでいて，隣にしか感染しない）では，感染確率 p が 1 でない限り，感染は有限のところで止まる．遠くにいる人は，ほぼ，安全．
- 2 次元以上のモデルでは，グラフ（人と人との繋がり）の構造から決まる**臨界確率** $p_c < 1$ があって，感染確率 p が p_c よりも大きい場合には，総人口の $\theta_p > 0$ の割合の人が感染する．

ということになっていた．

これからも再々述べるように，我々の実社会での人の繋がりは 2 次元以上（実質，かなり高次元）のものだと考えられる．なので，上の 2 つ目の場合（臨界確率 $p_c < 1$ がある場合）が重要になる．これをこれから見て行く．

4.1　2 次元パーコレーションを例にした感染症の伝播の復習

まずは 2 次元のパーコレーションモデルに忠実な仮想的な世界を考え，復習がてら，感染について考察する．我々の実際の世界により適合した考察は，節を改めて行う．

前章では，以下のようなモデル化を行った．

- 人は 2 次元正方格子の頂点に住んでいる．(それぞれの家が，碁盤目の頂点にある．)
- 最初，中心の人が感染する．
- 感染した人は，隣の人（4 人）に，独立に確率 p で感染させる..
- 感染した隣の人からは，自分の隣の人に独立に確率 p で感染する．
- 以下，くり返し．

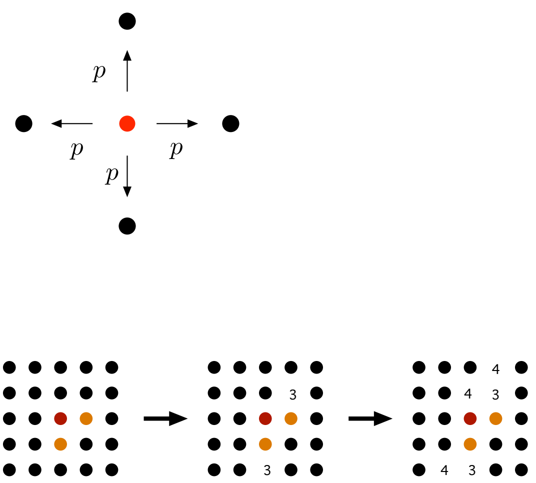


図 1: 感染の時間発展のイメージ例．
（上図）中心の人（赤）から隣の人に確率 p で感染する可能性を示した．
（下図）左側（中心のみ感染）から始まって，感染が拡がる概念図（数字は感染した順番）

実際の時間変化は，次の図で示すように，中心から段々と感染が拡がるものになるだろう．しかし，十分に時間が経った後を考えると,「一人の感染者が回復／隔離／死亡までに隣の人にうつす確率を p」として，前章で述

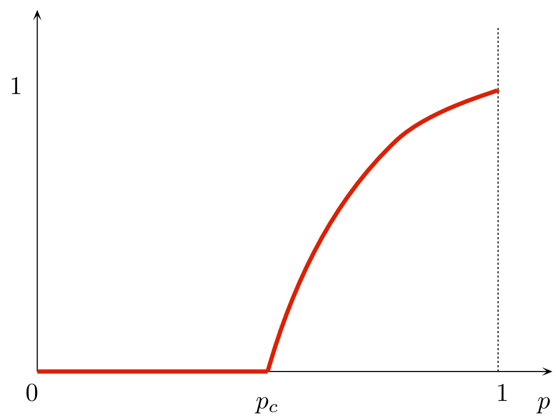
べたパーコレーションモデルになっていることがわかる．この意味で，この節で考えている限定されたモデルに関しては，感染の様子をパーコレーションで近似して考えるのは，それほど悪いことではない．

さてこの場合，どのように感染が拡がって行くかは，前章に simulation の結果と数学の定理を示した通りである．つまり，

> **Theorem 4.1** 人の配置が 2 次元以上なら，上のパーコレーションモデルには**臨界値**
> p_c （$0 < p_c < 1$）があって，
>
> - $p < p_c$ では無限までは拡がらない．(被害，つまり感染者数は有限)．
> - $p > p_c$ では無限遠まで拡がる！(無限に人がいるなら，無限人感染する！ただし，感染者の割合 θ_p は 0 と 1 の間)

ということだった．

上で注目した　感染者比率　＝　（感染者の数）／（全人口）　を，p の函数として模式的に表すと，以下のようになることは既に述べた．Percolation density = ratio of patients というのが感染者の比率で，定理で述べたように，$p < p_c$ では感染者比率がゼロだが，$p > p_c$ では感染者比率が正になる．また，p_c における感染者比率のゼロからの立ち上がりはかなり急[4]であり，p が p_c よりも少し大きいだけで，人口の 1/10 が感染したりする．



4.2　より現実的なモデル化に向けて

今まで考えてきた 2 次元のモデルは，我々の実生活とは全く違うように思う人も多いだろう．この節では，その部分を少し説明したい．

現実社会と 2 次元のパーコレーションモデルの乖離については，難点はいくらでも思いつく．特に大きなものは以下の 2 点だろう．

- 中世じゃあるまいし，今の人が隣の人とだけ付き合ってるなんて現実的じゃない！学校や仕事に行って学校や職場での交流もある．電車やバスにも乗るから，たくさんの人とたくさん繋がってる．
- 我々は知恵があるんだから，やばいと思ったら行動を変える．これまでもそうやってきたのに，このモデルにはそれが入ってない．

[4] $\theta_p \approx (p - p_c)^\beta$ と表した時の指数（臨界指数）β については，$\beta \le 1$ がかなり広範なモデルについてなりたつ．また格子の次元が高い場合には，$\beta = 1$ であることも証明されている（Mean Field Behavior）．実際の感染症の伝播は，後述のように格子の次元がかなり大きい場合に相当するだろうから，この場合の β は，ほぼ 1 であると考えられる

このうち，2 番目の論点については,「その通り」である．最初に断った通り，このモデルには時間発展（時間変化）は入っていない．あくまで,「**人々の行動が一切変わらなかったらどうなるか**」を記述している．しかし，ここまで読んできた人はわかってくれることを期待するが，そのような記述にも十分に意味はあろう．特に,「今のままでいたらどうなるのか」「今のままでダメなら，どのように行動様式を改善すべきか」などを考えるには役に立つと思われる．

問題なのは第 1 の論点だろう．おっしゃる通りで，現実の人の繋がりは全くもって複雑で，かつ，実際の感染で重視すべきは，物理的な家の配置ではなく，学校や職場での人の繋がりの方だろう．これらに加えて,「時々行われる呑み会」「何かのイベントに行った」「通勤や通学の電車やバス」さらには,「気晴らしに旅行した」など，様々な人の繋がりが存在する．

そうなのだが,「それならば，その繋がりをすべてグラフで表しなさい」というのが，本稿でお勧めしたい方向である．つまり，

- グラフの頂点は，これまで通りに，個々の人
- グラフの辺は，辺の頂点の人がどのくらい繋がってるか，を表すもの

と考えれば良い（もし，A さんと B さんが全く没交渉なら，そもそも A, B の間には辺を引かない）．

ただしこの場合，繋がりを表す辺の全てが同じ感染確率ということはないだろう．A さんと B さんが親密なら，当然，感染確率は高くなるだろう．いっぽうで，通学電車でちょっと乗り合わせるくらいの C さんと D さんなら，感染確率はほぼゼロと言っても良いかもしれない（ただし，電車の換気がしっかり行われ，C, D さんともにマスクをしているとして）．

というわけで，考えるべきは

- グラフの頂点 x は，個々の人
- グラフの辺 xy は，x さんと y さんがどのくらい繋がってるか，を表す
- 辺 xy は，確率 p_{xy} で open（感染），確率 $(1-p_{xy})$ で closed（感染しない）

というような，**それぞれの辺によって感染確率が異なる**パーコレーションモデルになる．

正直，このようなモデルを厳密に，特に定量的に考えるのは，かなり難しい．しかし，**定性的な性質は，2 次元モデルとほとんど変わらない**．すなわち，

- p_{xy} がすべて十分に小さければ，$\theta_p = 0$ である．つまり，感染者数の期待値は有限に止まる．
- いろいろな p_{xy} がそこそこ大きいなら，$\theta_p > 0$ である．つまり，全人口のうち，正の割合の人たちが感染する．

ということだ．

「そこそこ大きい」とか非常にええ加減な記述だが，ここをしっかり書くと非常に大変なので省略する．ただ大きさの目安としては，以下のようなものがある：

> ある人 x を固定した時に，この人から感染させられる人数の期待値（の近似値）
>
> $$q_x := \sum_y p_{xy} \tag{4.1}$$
>
> を考える．この q_x が,（大多数の x に対して）1 より大きいなら $\theta_p > 0$ である．なお，この q_x（の平均値のようなもの）が，だいたい,「基本再生産数」R_0 にあたる．

このように考えれば，現実の感染も，ある程度はパーコレーションの描像で理解できることがわかる．特に,「臨界値が重要」「$p < p_c$ となるように，p を下げるか p_c を上げるように努力する」ことは変わらない．

すでに述べたこととも重複するが「マスクをする」「電車やバスの中では会話を控える」などは p_{xy} そのものを下げるために効果的だろう．一方,「誘われた呑み会に行かない」「気分転換したいけど旅行しない」などは，もし我慢しなかったら生じたはずの人との繋がり（グラフの辺）を最初から排除するということで，実質的に p_c を上げることに寄与する．どちらも有効だ．

4.3 以上から読み取りたい教訓

すでに述べたこととも重複する部分もあるが，強引に教訓を読み取りたい．

4.3.1 臨界確率の重要性

パーコレーションモデルによる教訓の一つは以下のようになろう：

- 人と人の繋がりの様子から決まる，パーコレーションの**臨界確率** $p_c < 1$ があって，
- 感染確率 p が p_c よりも小さいならば，それほど困ったことではない（感染者数の期待値は有限）．
- しかし，感染確率 p が p_c よりも大きいならば，大変に困る．事態を放置すれば，全人口の θ_p の割合の人が感染してしまう（$\theta_p > 0$）．

たとえ $\theta_p = 1/10$ であっても，日本の場合，これは 1000 万人もの感染者ということになるから，大変．つまり，**臨界確率と実際の感染確率の大小が最重要**なのだ．

4.3.2 じゃあどうすれば良いのか？ $p < p_c$ を目指そう！

では感染を抑えるにはどうすべきか？答えは至極，常識的なもので，**上の p を小さくするか，p_c を大きくするか（その両方か）を努力して，最終的に $p < p_c$ となるように**すれば良い．しつこいかもしれないけど，ここの事情をもう少し書いておくと，

- パーコレーションの臨界確率 p_c は，人と人のつながりの様子から決まる．2 次元の例では,「各人は隣の家と付き合う」としていた（この場合は $p_c = 1/2$ であることはすでに述べた）．しかしここで「感染が怖いから 4 軒とも付き合うのをやめて，3 軒にします」とするだけで，p_c の値は上がる．そうすれば，例えば $p = 0.55$ であったとしても，新しい p_c なら $p < p_c$ を満たさせられるかもしれない．
  より現実的な例では,「誘われていた呑み会をキャンセル」するだけで，それに相当するグラフの辺がなくなるから，効果的だ．
- 一方，感染確率 p とは,「一人の感染者が回復／隔離／死亡までに隣の人にうつす確率」のつもりだった．これを下げるためには，まさに，我々の行動を変えることが有効だ．例えば,「マスクをする」「換気をする」「対面での会話を避け，Zoom を使う」など色々考えられる．それらを頑張れば，p を下げて，結果的に $p = 0.4$ などとできるかもしれない．

「何を当たり前のことを言ってるんだ！」と思った人が大半だろうが，ここで強調したいのは，あくまで，

$$（\text{感染確率} = p） < （p_c = \text{臨界確率}） \tag{4.2}$$

を満たさせることが至上命題である，ということだ．

4.3.3 変異株の脅威と対応について

このところ，世界各地が原産らしい変異株が報告されている．そのうちのいくつかは感染力が高いと言われている．僕は医学者ではないので，確実なことは言えないが，**仮に感染力が 2 倍**[5]**の変異株があったとして**どうなるのかを少し述べたい．

そもそも「感染力」がどういう意味かもよくわからないのだが，ここでは仮に「従来株の 1/2 の量を吸い込んでも感染する」くらいの意味にとっておこう．もうややこしいから，**我々がこれまで使ってきた感染確率 p が 2 倍になるような変異株があったとして**話を進めたい．

[5]イギリスで見つかった変異株は，感染力が 1.5 倍から 1.7 倍との報道を見た．2 倍というのは，議論を簡単にするための仮の設定だ

これまでに何度も,「臨界確率 p_c と感染確率 p の大小が重要」であることは注意してきた．例えば，変異株が来る前は $p = 0.4$ だったとすると，変異株のために，$p = 0.8$ になるだろう．2 次元のモデルでは $p_c = 0.5$ だから，$p = 0.8$ は p_c を軽く超えてしまうことになる．前章の simulation を思い出せば，$p = 0.8$ が非常にヤバイ（古い意味で）ことは明らかだろう（ほぼ全員感染！）

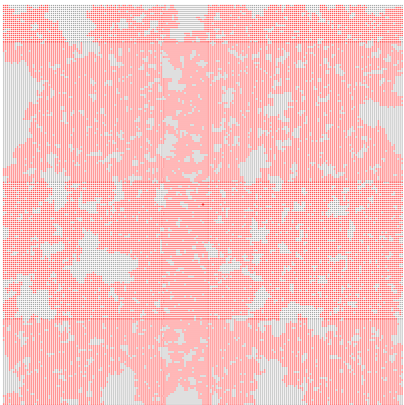
特に日本の場合，国民のかなりの犠牲と努力により，感染者数はそこそこ抑えられてきた —— 感染爆発が起こりそうになっても，なんとかギリギリで踏みとどまっているような感じがあった．これは要するに，国民の行動変容により,「感染確率 p が p_c の少し下に（意図せず）調節されている」ことを示唆している．

さてここで変異株が登場するとどうなるか？上で見たように，新しい感染確率は p_c を大幅に上回る可能性が高く，感染爆発の危険性がある．感染力が変化することの恐ろしさはここにある.「感染力が 2 倍になったら感染者数も 2 倍」では**決してない**．感染確率が 2 倍になっても，それが p_c 以下なら，あまり怖くない．しかし一方で，2 倍になった感染確率が p_c を超えたら大変で，感染者は爆発的に増える．かつ，これは今の時期（2021 年 4 月），十分に起こりうることである —— いや，大阪などでは既に起こっているのかも．

なお，このような変異株が来た場合，我々のすべきことは単純である．新しい変異株を用いて計算した感染確率 $\tilde{p}$ が p_c よりも小さくなるように，我々の行動を変えるしかない．最も単純には,「従来と比べて，**人と会う機会を全て半分にする**」ことが有効な対策だろう．しかし，これは我々に更なる犠牲を強いることになる．特に，これまで辛抱に辛抱を重ねてきた我々が更に頑張れるのか，かなり疑問だ．このようなことにならないためにも，変異株をたくさん国内に持ち込ませないような対策が重要であると原は考える[6][7]．

4.3.4 集団免疫の可能性

パーコレーションの描像からは,「集団免疫」についても定性的に理解することができる．前章の simulation 結果，特に $p = 0.52$ の場合などは,



のようになっている．人口のほとんどがやられてしまっているのだが，ところどころ,「赤くならずに取り残された島」が存在する．

これは幸運にも感染せずに済んだ人だが，このモデルの範囲では，これらの人が再び感染することはない．なぜなら,「一旦感染して回復したら，再感染はしない」という仮定を認める限り[8]，周りの赤い人には，これ以上感染させる力はない．なので,「赤くならずに取り残された島」の人たちは安全なのだ．

また，ワクチンが有効で，結果的に「ワクチンを打った人は，自分も感染しないし，他の人にもうつさない」となったとしよう．この場合は，図の赤の部分がワクチンを打った人であったとして，全く同じ議論が成り立つ．つまり，人口のかなりの割合が，感染するかワクチンを打つかで抗体を持てば，集団免疫が成立することになる．

[6]変異株はもちろん，突然変異によって起こる．これはほぼランダムな現象と思われるが，当然，試行回数に比例して起こりやすくなる．世界の感染者状況を見ると，日本以外で変異株が生じやすいと考えるのはおかしなことではないだろう

[7]この直前の分は，2021 年 2 月に書いたものだ．残念ながら，2021 年 4 月の初めにおいて，全国各地で変異株がたくさん見つかっている —— どころか，兵庫では 8 割が変異株のようだ．非常に残念だが，変異株を水際で食い止めることには，完全に失敗した模様である

[8]この仮定が怪しいのではないか，と言われているのも事実

ただし，あくまでこれは,「一旦感染して回復したら（または，ワクチンを１セット打てば），再感染はしない」という仮定に基づいたものである．ここが崩れれば，周りの赤い人たちも再感染して,「赤くならずに取り残された島」にも感染が拡がるかもしれないので，集団免疫が成り立たなくなるだろう．

5 まとめ

- 感染症の数理モデルを見た．
- 感染率が**ある臨界値を超えると，全体にひろがって，どうしようもなくなる**．
- 実質的感染率を下げる（p_c を上げる），結果として $p < p_c$ を実現することが肝要
- 変異株への理想的な対応も理解できる