パーコレーションで（少し）理解する感染症の伝播

2021.04.13　原　隆

この1年，SARS-CoV-2による新型肺炎COVID-19が猛威を奮っています．少し収まっていましたが，また変異株が問題を起こしそうです．現場で戦っておられる医療関係者，物流を支えてくださってる皆さん，全てのみなさんに感謝します．

今日は，数学（確率論）のモデルである「パーコレーション」を用いて，感染症の拡大についての一つの見方（描像）を解説する．この見方には様々な限界があり，疫学の専門家の方々の研究の代替になるものではない．

しかし，この描像により，大きな時間スケールでの状況をある程度理解でき，その結果，専門家会議の「みなさんがどう行動すべきか」の理由を理解するのに役立つことを期待する．特に，「臨界確率」と呼ばれる量があり，臨界確率と感染確率の大小が運命の分かれ目であることは，強調したい．（その後，どのように行動するかは，みなさん一人ひとりの判断です．）

1. 初めに：COVID-19について

- CONID-19については不明な点も多い．以下は現時点での暫定的なもの．
- 現在，全世界に感染が拡がっているのはご存知の通り．
- 厄介（拡がりやすい）な性質
    - かなりの人は「軽症」または「無症状」　→ 知らぬ間に感染させる
    - 潜伏期も長め？
    - 感染力はインフルより少し強め？
- ちょっとマシな性質：致死率はそれほど高くないようだ．人々が冷静であれば，社会インフラが破壊されるまでには至らないと期待できる．
- 結論：エボラや SARS ほどではないにしても，ほどほどに厄介．

可能な（考えうる）対策：

- 基本は「予防（病気にかからない）」と「治療（かかっても治す）」
- 予防については，ワクチンの開発が急務だが，いま漸く，できてきたところ．日本国内に行き渡るには時間がかかる.
- 治療薬も模索中（最近の分子設計技術に期待）．こちらはどうも芳しくない.
- 患者が増えすぎると，病院が一杯になって助かる人も助からない（医療崩壊）.
- これが今現在，危惧されていること.
- だから，患者数（重症者数）をできるだけ下げることが最重要.
- そのためには，実質的な感染率を下げることが最重要だ．（病気そのものの感染率は変えられないが，みんなで注意して，かかり易い行動を避けよう．）

ということで，実質的な感染率を下げることの必要性，およびそのためにどうすれば良いのか，原理を納得してもらうべく，病気の感染の簡単な数理モデルを説明する.

なお，実際の対策を考えるには，社会的な影響は無視できない.

- 現代社会は，様々な国，地域，企業，人，が複雑に絡み合って，ギリギリのところで関係を保ちつつ動いている.
- どこか一箇所が弱くなると一気に崩れる可能性が大.
- 例えば，極端な政策として「全員，家から出ないで1ヶ月耐える（食料，インフラはあるとの前提で）」ことをすれば，COVID-19はやっつけられても，経済的なダメージが計り知れず，結果として間接的な死者がより多くなるかもしれない.
- 本稿ではこれらの複雑な問題には触れない. あくまで，「病気にかからないためには，どうすべきか」（の基礎になる考え）を論じる.

2. 基本的な考え方：感染症の伝播をパーコレーションでモデル化する

2.1. はじめに

通常，感染症の拡がりは微分方程式で記述（SIR model 他）.

ここでは，これらとは異なる，確率論（パーコレーション）の視点からの理解（定性的な描像）を述べる.

パーコレーションの見方の利点：

- 定性的な理解（描像）が得られる
- 感染確率が低い場合と高い場合で，本質的に様相が異なることが理解できる．
    - 感染確率が低い（「臨界確率」よりも低い）場合は，少数の人間のみ感染
    - 感染確率が高い（「臨界確率」よりも高い）場合は，多数（人口比で見て正の割合）が感染
    - もちろん，感染者の割合は，感染確率が高くなると 1 に近づく（ほぼ全員感染）
- 結果，「一人一人が感染確率を下げよう」という動機付けが得られる（はず）
- 変異株への正しい対応もわかる（はず）
- 「集団免疫」のイメージもわかる（はず）

この方法の欠点とお断り：

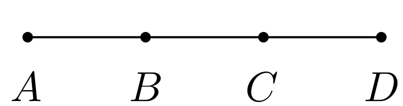
- 問題を簡単化しすぎたので，時間変化（どのように増えるか）を追うことが難しい（本稿では時間変化は扱わない）
- これだけでは定量的な議論は難しい（種々のデータ不足；特に医学的知見が必要）．あくまで定性的な理解のみを目標とする
- かなり粗い近似であり，細部では正しくないことも多い
- 感染爆発を起こしている状況では「ランダムグラフ」の考え方が有効だが，本稿ではほとんど立ち入らない.
- ということなので，あくまで一つの理解の仕方として見て頂きたい.

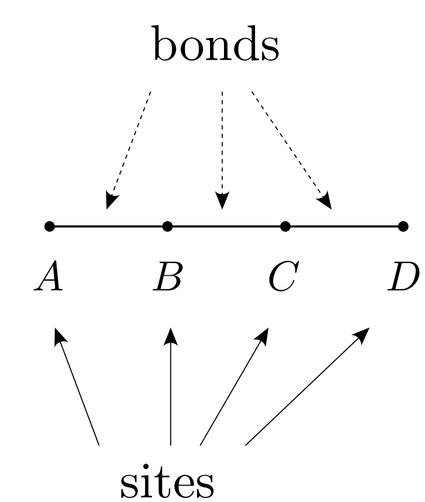
2.2. 基本的な考え方（モデル化）

最も簡単（？）な例

Q1. 以下の状況を考える.

- **A, B, C, D の4人は，家が隣同士で，一直線に並んでいる.**
- **彼らは隣の人とは交流（会話，一緒に遊ぶなど）があるが，それ以外には交流はない．つまり，「AとB」「BとC」「CとD」の間にのみ交流がある.**
- **この交流を通して，感染症が感染する確率は全て p であると仮定する（感染確率の解釈については，後の「注意2」参照）.**
- **最初にA君が感染していた時，最終的にD君が感染する確率はいくらか？**
- **なお，最初のA君の感染以外は，外部からの感染はないものとする.**





（注意1）「人が4人しかいない」「隣の人としか交流がない」「外部からの感染がない」などはもちろん．考えやすくするための簡単化．

（注意2）「感染確率」p の少し強引な解釈は以下の通り：

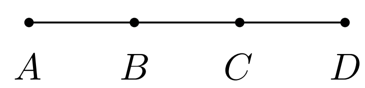
多くの感染症では，感染後に一定時間が経てば，その人から感染することはない．
「その人が 回復/死亡する」「症状が酷いと仕事や遊びでの交流もできなくなる」
「隔離される」などの理由で，ウイルスがばら撒かれなくなるから．

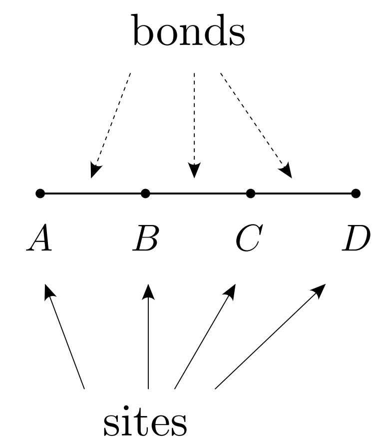
ここの感染確率 p とは，「一人の感染者が，回復/死亡/隔離 されるまでに隣の人に感染させる確率」と思ってほしい．

（注意3）免疫について：上の（注意2）では，
「回復した人は免疫を獲得し，2度とウイルスを撒き散らさない」ことも仮定している．
もし，いつまでもウイルスを撒き散らし続けるなら，上の感染確率 p は 1 になってしまい，全員，確実に感染する．本稿では，そんな悪夢の世界は考えない．
（その場合でも，治療薬ができれば我々は生き残れます．医学に期待しましょう！）

パーコレーションの定義（Q1の場合）

Q1での人の交流を「グラフ」で表す．つまり，A, B, C, D の人を点で，その間の交流を線で表す（下図の左）





人を表す点をサイト(site)と呼ぶ.

人の間の交流を表す線（＝サイトのペア）をボンド(bond)と呼ぶ（上図の右）.

ボンドパーコレーションモデル（の一番簡単バージョン）とは，上の「ボンド」が

確率的に　通行可能/通行不可能　になるモデルである.

それぞれのボンドは独立に

- 確率 p で「通行可能」（open）
- 確率 $(1-p)$ で「通行不可能」（closed）

となる．そして「Aの点からDの点まで『通行可』になる確率は何？」を問う.

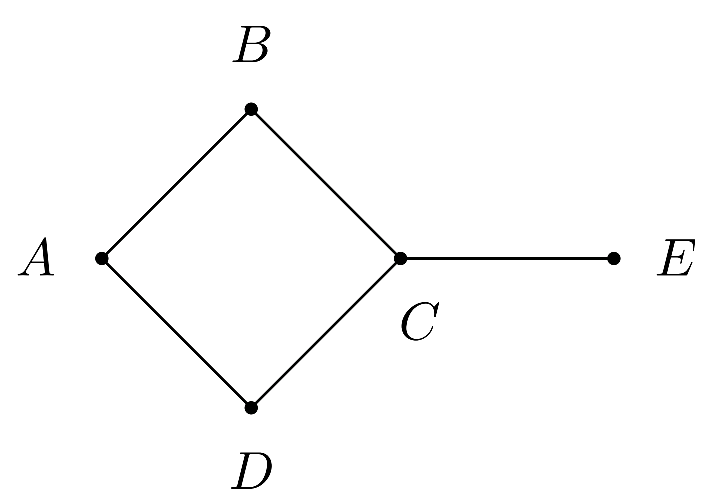
「AからDまで通行可」　＝　「AからDまで感染した」

もう一つの例

Q2. 以下の状況を考える.

- **A, B, C, D, E の5人は，ある会社で働いている.**
- **「AとB」「BとC」「CとD」「DとA」「CとE」の間にのみ交流（会話，資料のやりとりなど）があるが，これ以外の交流はない（挨拶もしない）.**
- **この交流を通して，感染症が感染する確率は全て p であると仮定する**
- **最初にAさんが感染していた時，最終的にEさんが感染する確率はいくらか？**

- **なお，最初のAさんの感染以外は，外部からの感染はないものとする.**



このように，人の交流を表す図（グラフ）と，その上のパーコレーションを考えて，感染をモデル化しよう！

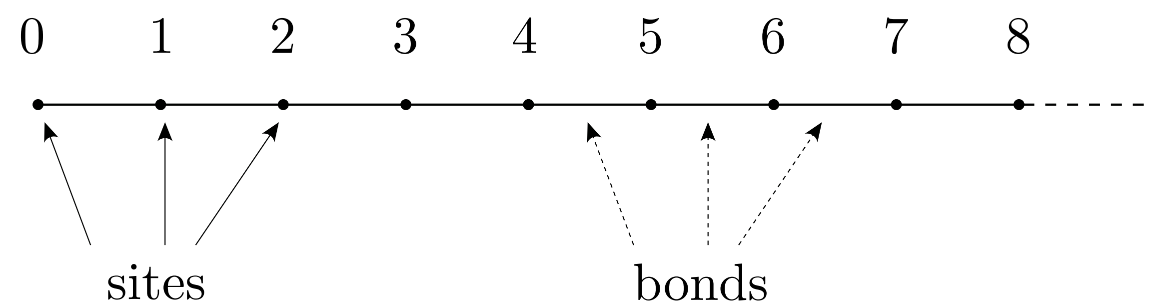
補足

- 人と人との「交流の有無」と「交流を通しての感染確率」だけが必要な情報
- それらの人が「どこに住んで，どのような交流をしているか」は問題ではない
- 現実の交流はもっともっと複雑なので，より複雑なグラフでのパーコレーションを考えて行く
- それでも，普遍的に成り立つ性質はある．それを説明したい
- 感染の時間的遅れは考えていない．「無限時間待った後で，どこまで感染しているか」を問題にする

3. パーコレーションの実際

- **いくつかの典型的なパーコレーションモデルを考えて，その定性的な性質を理解する.**
- **特に（現実に近い）「二次元以上の系」では，「臨界確率」p_c というものがあり，p と p_c の大小で，様相が全く異なることを見る.**

3.1. 1次元系（簡単！）



- 上のように，一直線に人（0, 1, 2, 3, …）が並んでいる.
- 最初は，0の人のみ感染
- 隣の人には，確率 p で感染る
- x 番目の人まで感染する確率は？
- 右端（無限遠）まで感染する確率は？

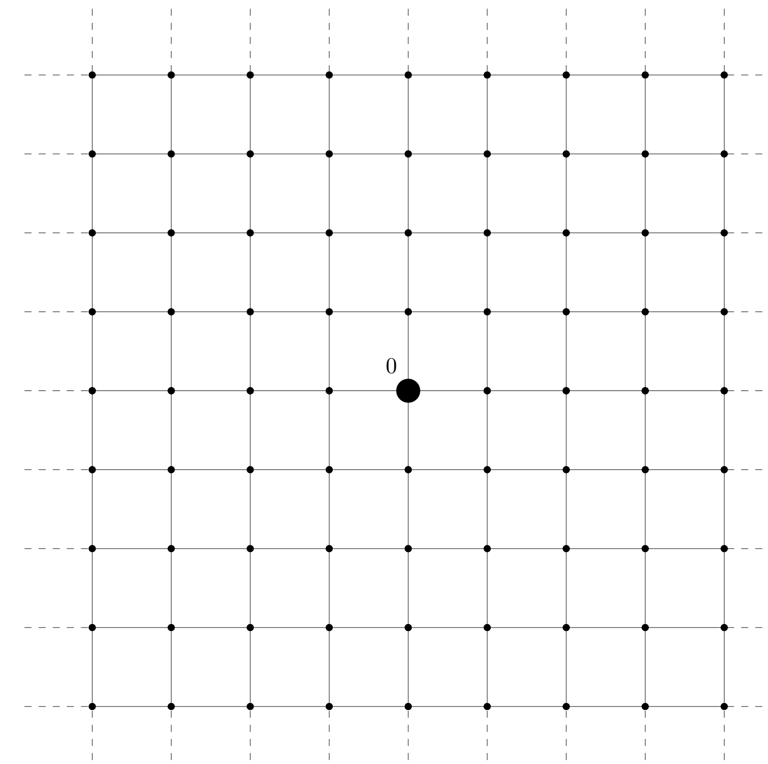
$$P[x \text{ is infected}] = p^x$$

$$(\text{percolation density}) = P[\infty \text{ is infected}] = 0$$

集団にとっては深刻ではない．遠くの人は安泰！

3.2.　2次元系

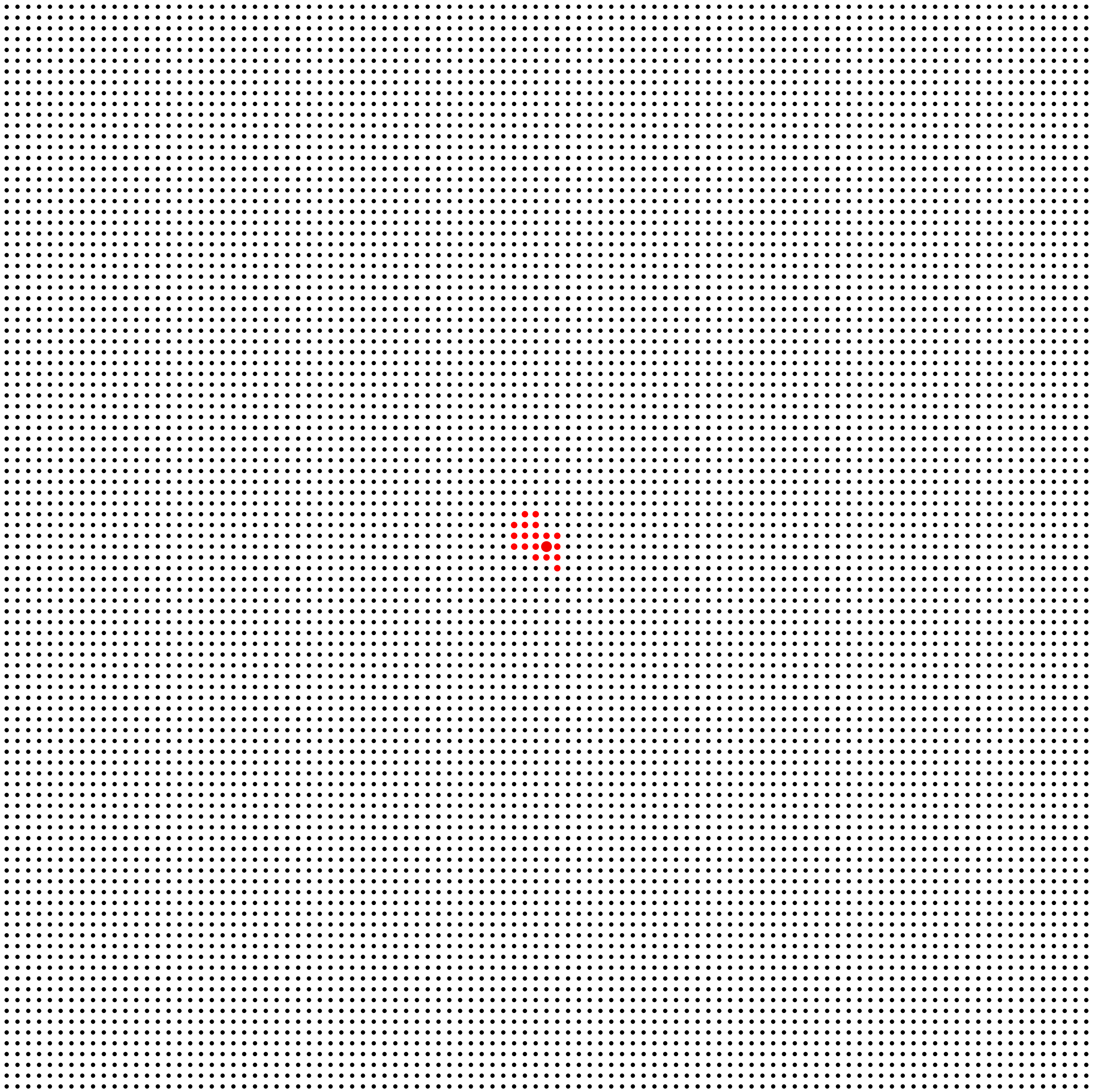
- 右のように，碁盤目に人が並んでる
- 最初は0の人のみ感染
- 隣の人へ，確率 p で独立に感染る
- 遠くの人（無限遠）まで感染る確率は？



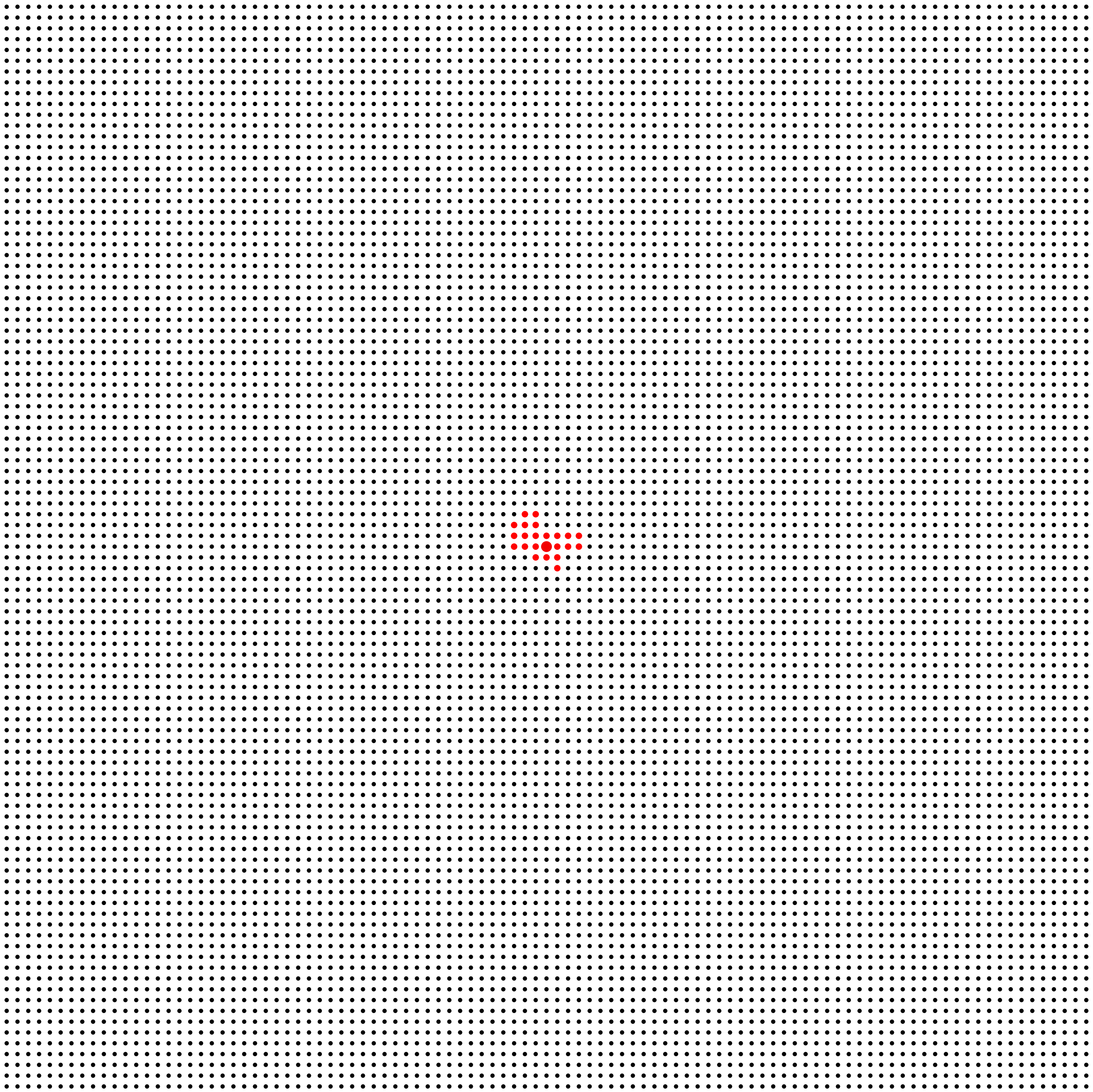
一次元と異なり，これは難しい．例：(0,0)から(2,1)に繋がる道が何通りもあり，繋がる確率が正確には計算できない．

なので，まずは数値シミュレーションの結果を見せる（100✕100）．

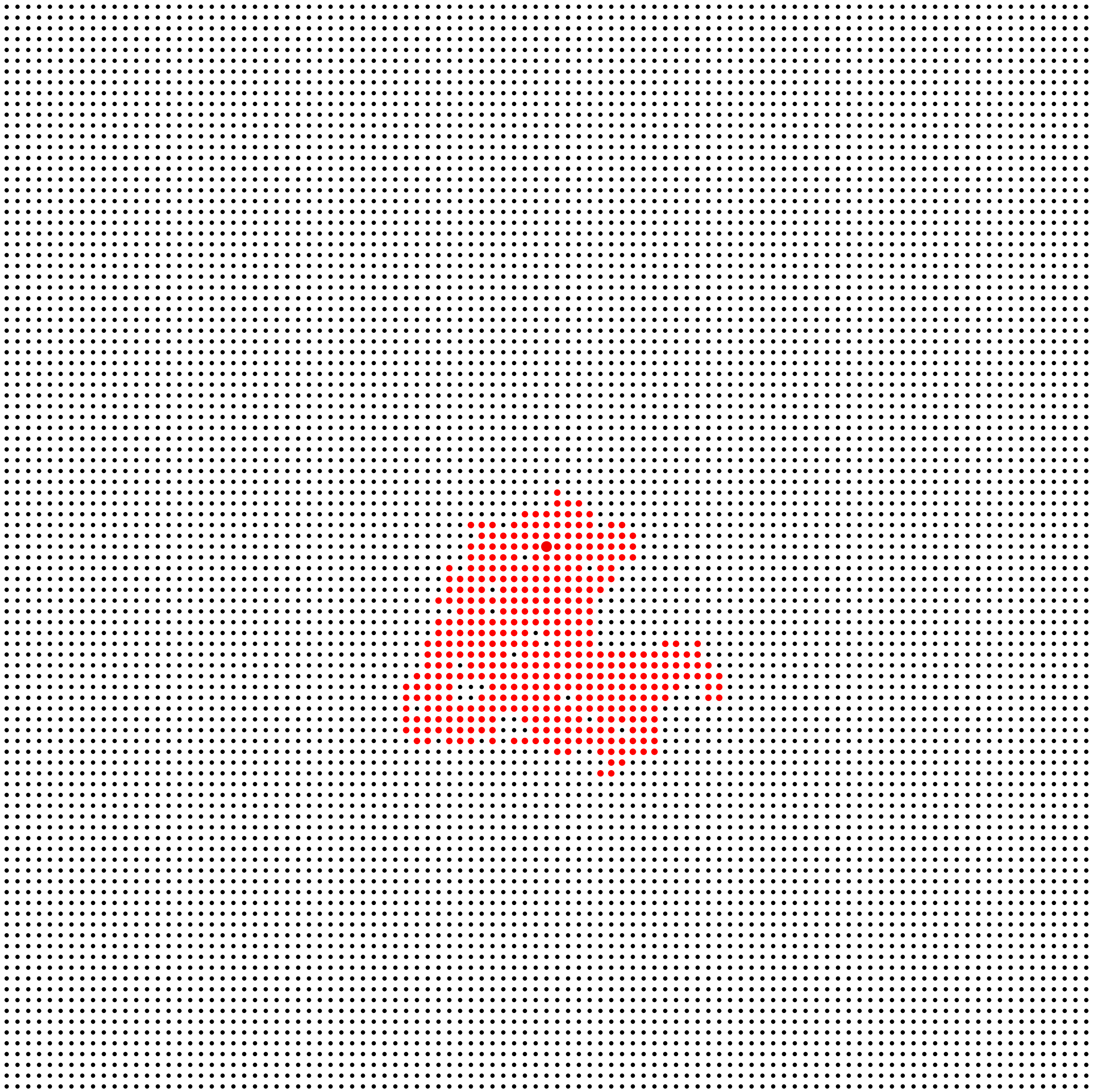
以下の赤い点が，0とつながっている（感染した）人



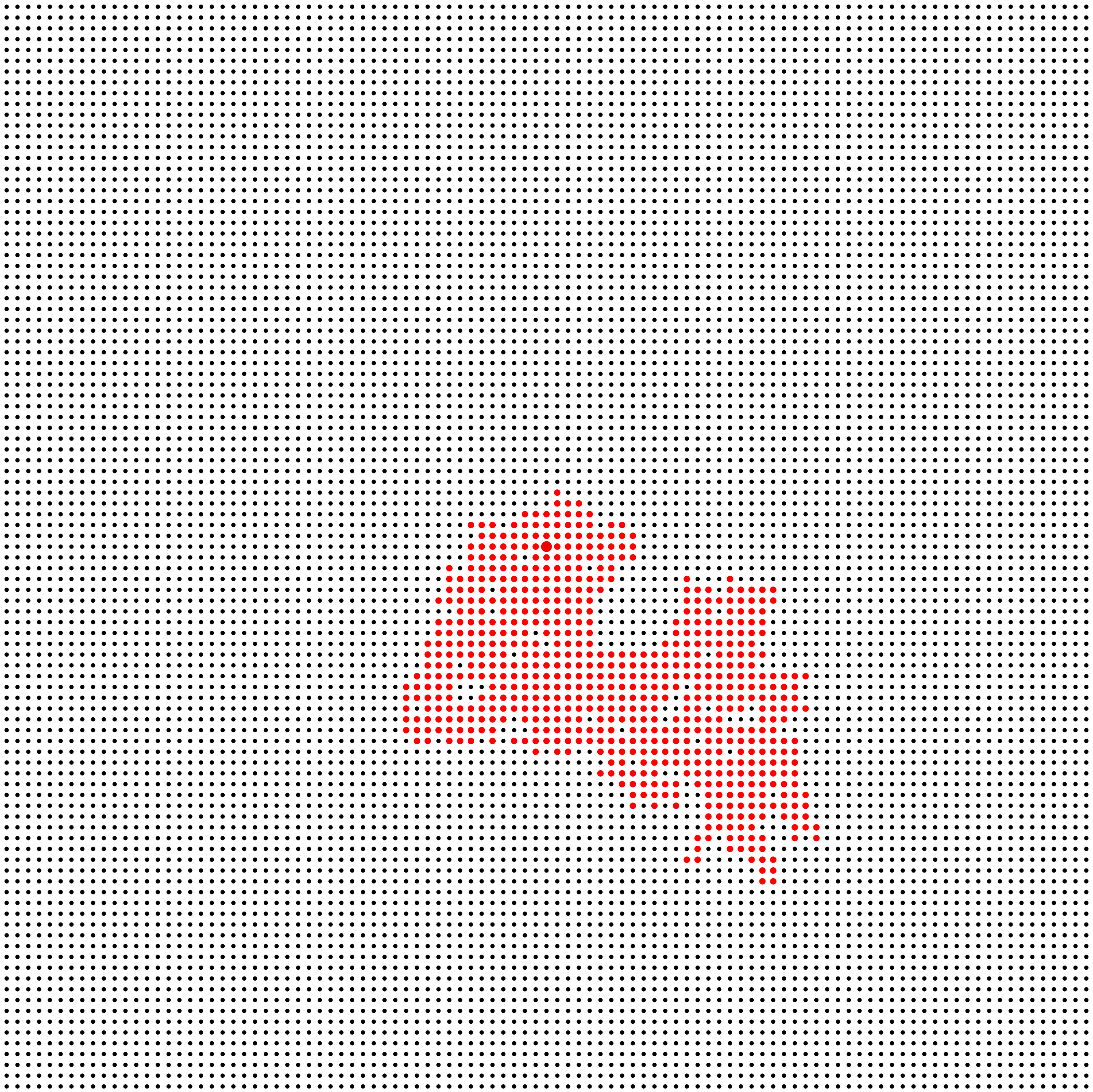
p＝0.30 の例



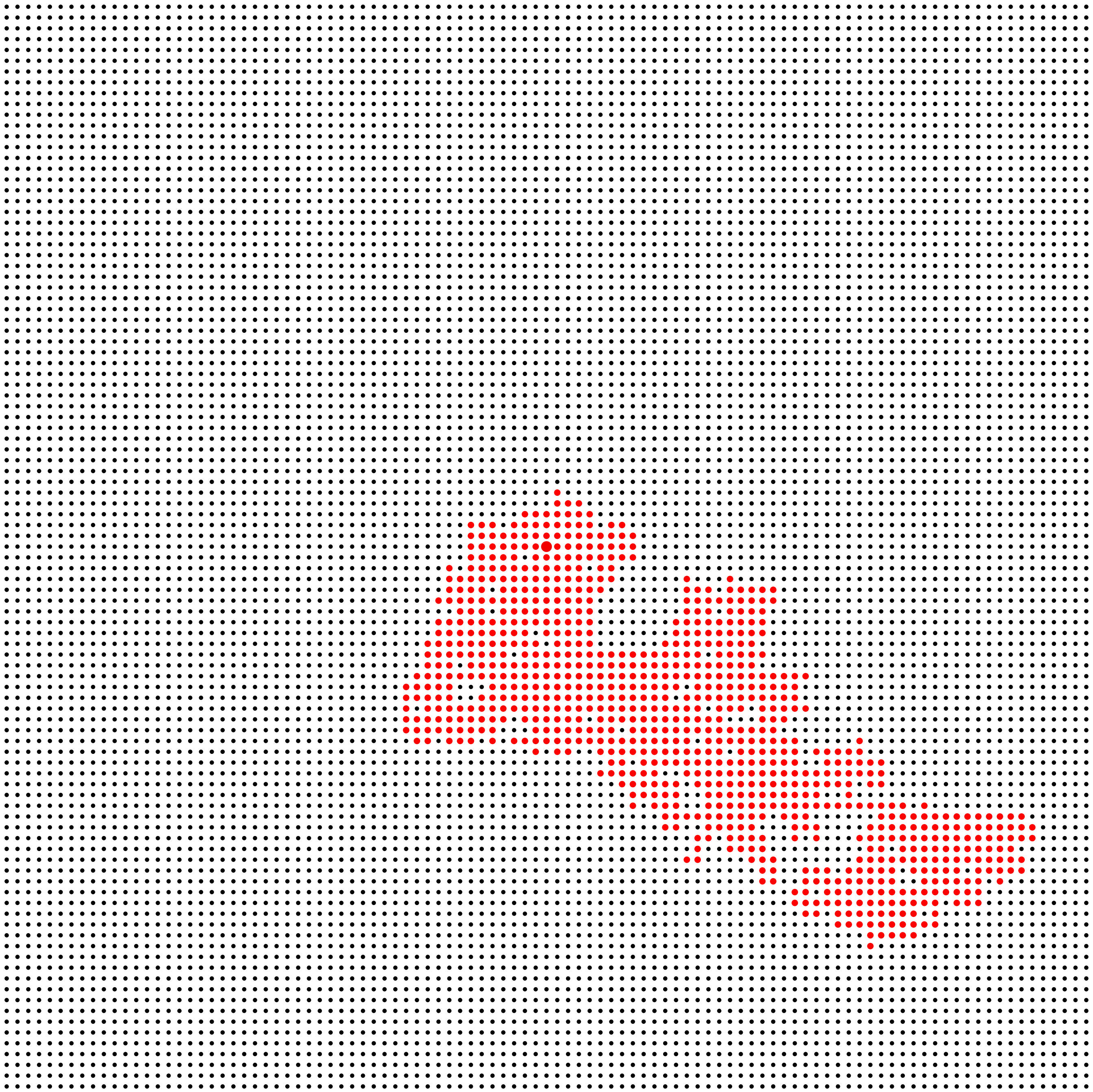
p＝0.40 の例



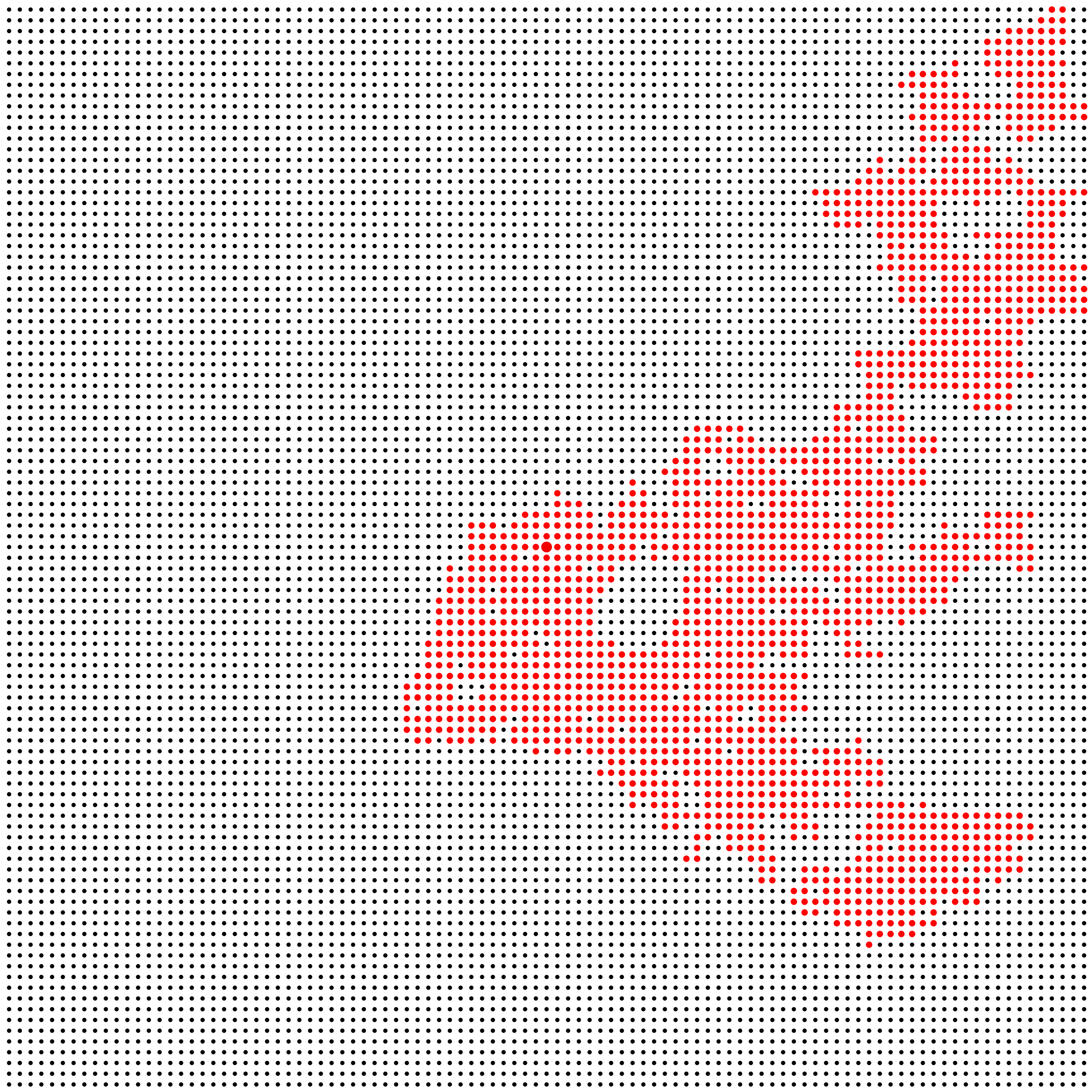
p＝0.46 の例



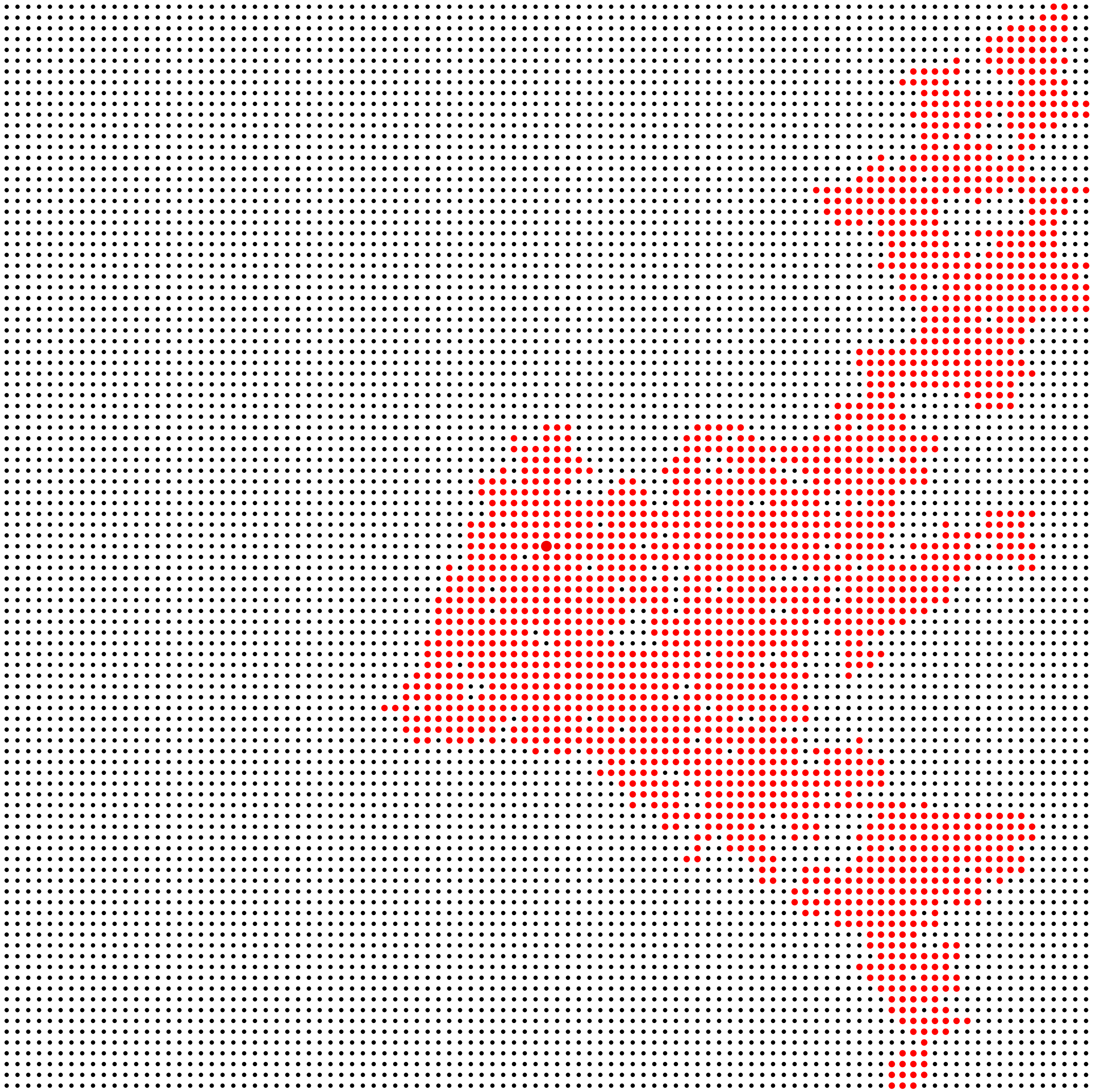
p＝0.48 の例



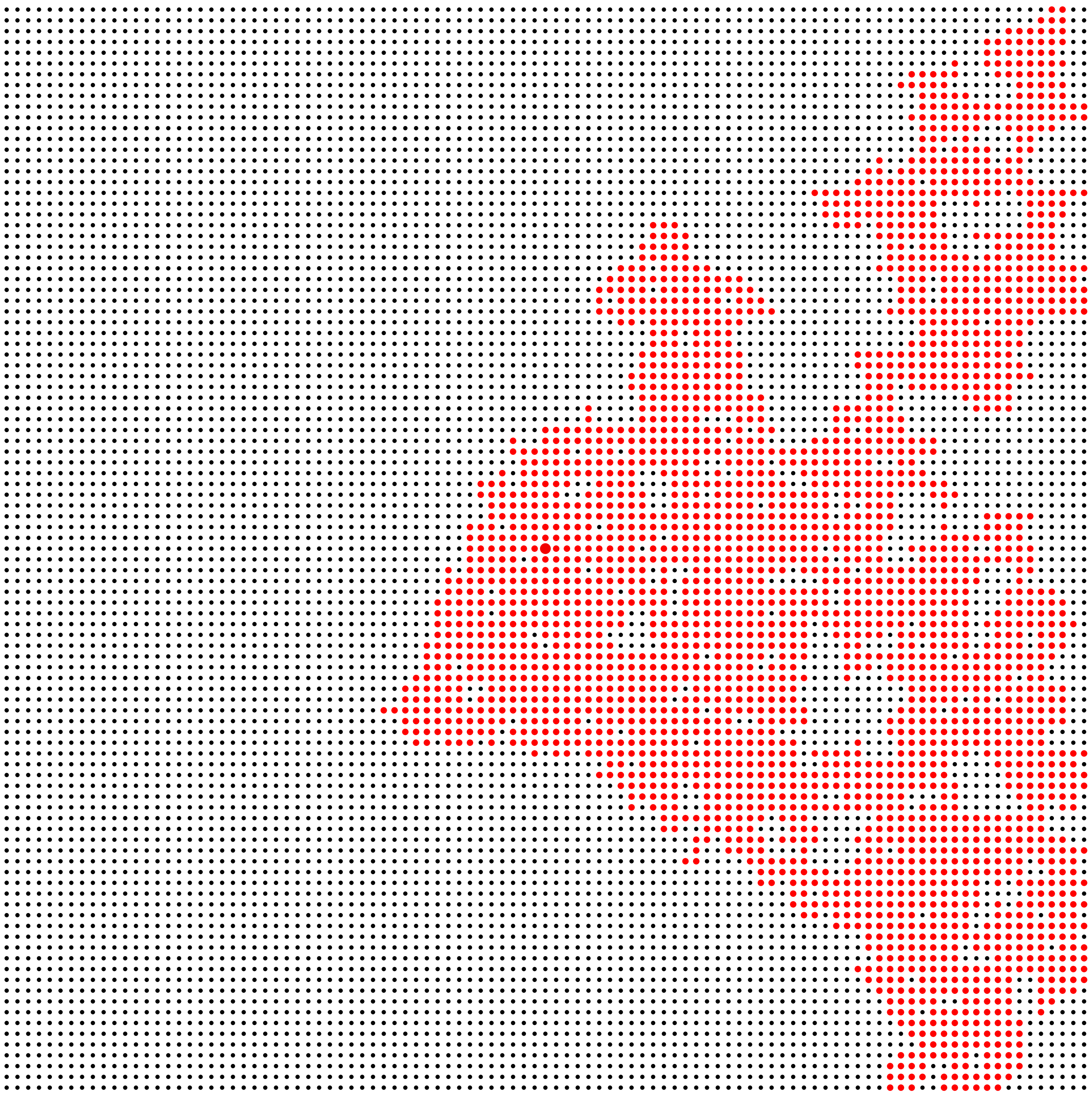
p＝0.49　の例



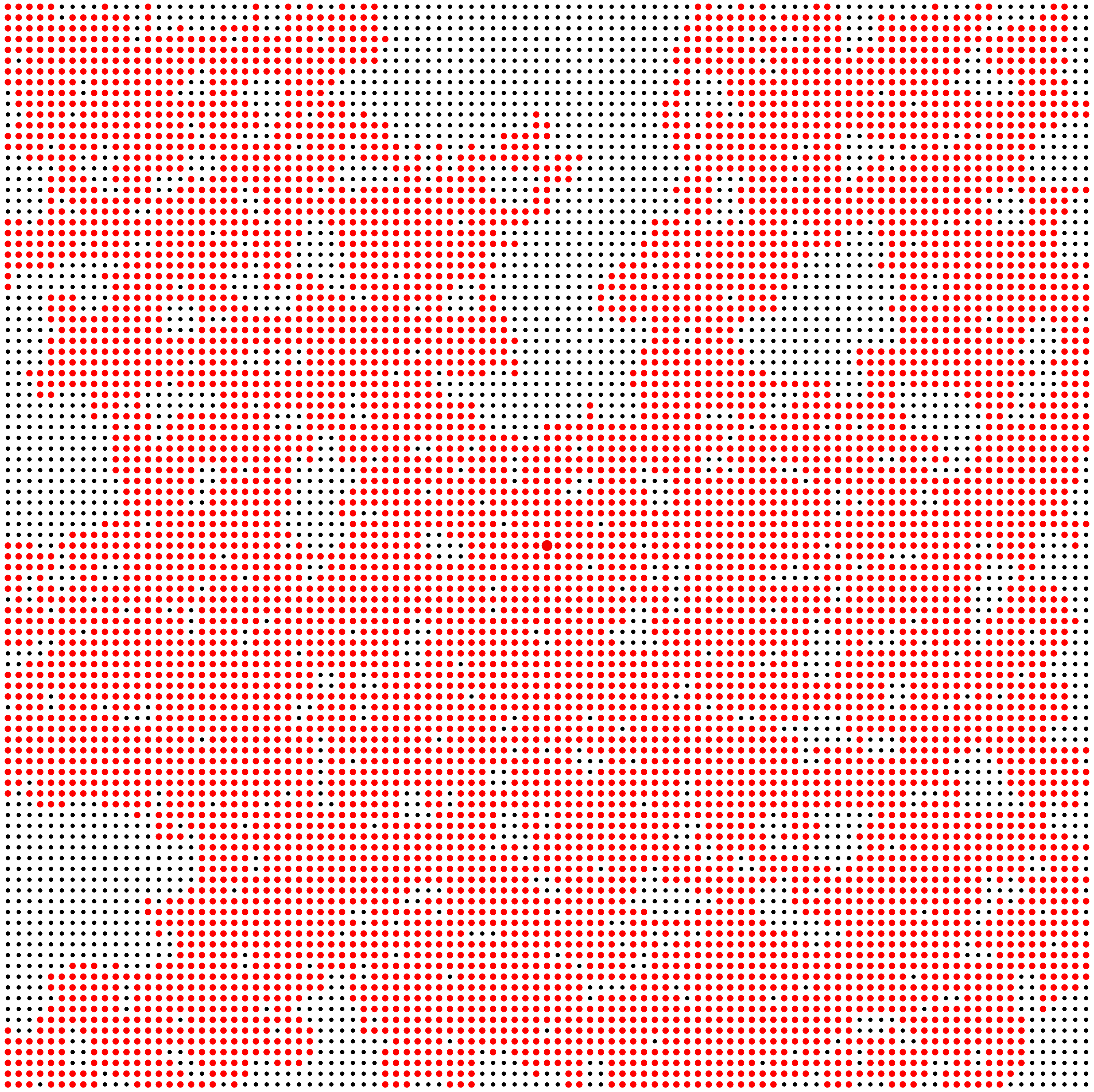
p＝0.50 の例



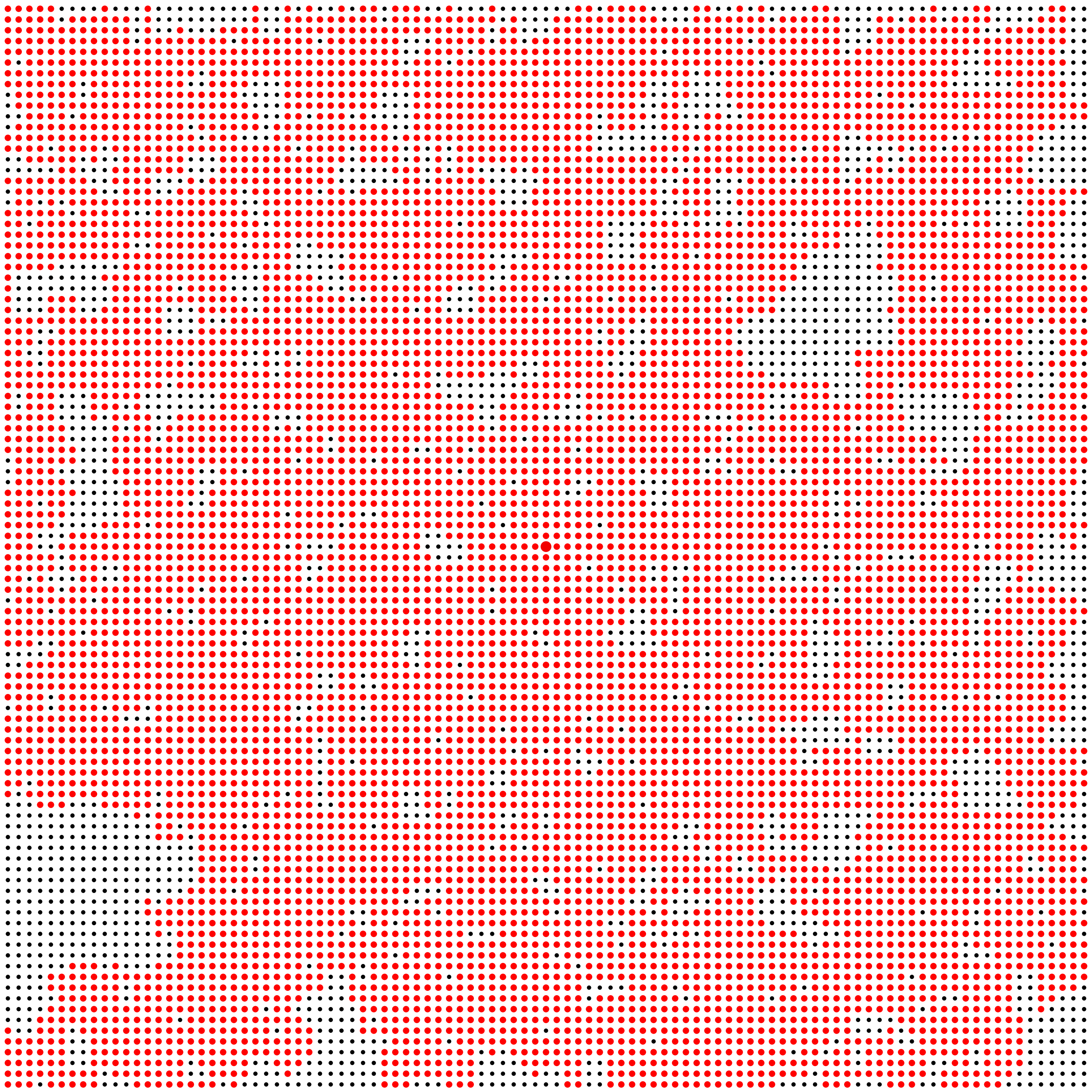
p＝0.51 の例



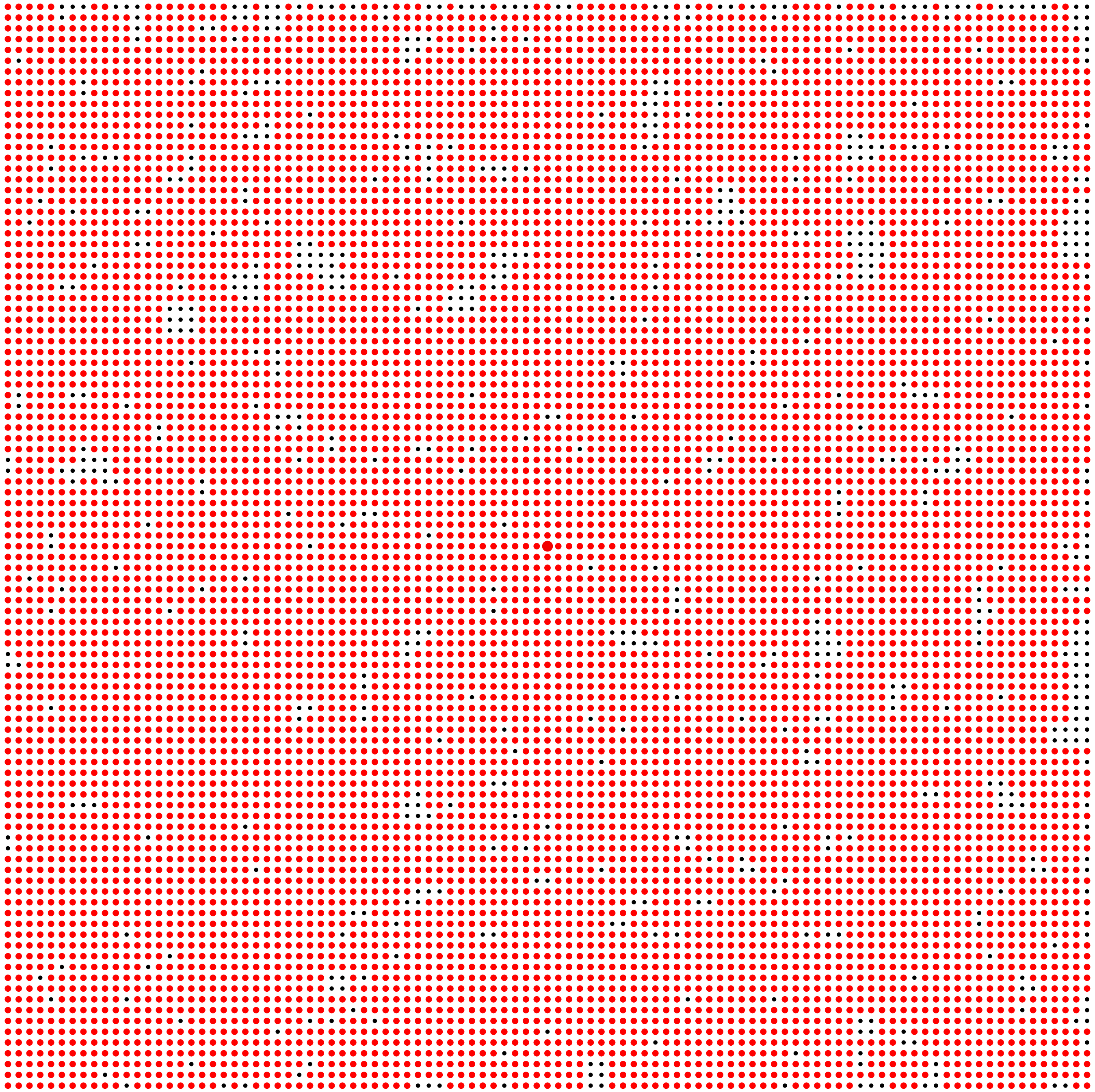
p＝0.52 の例



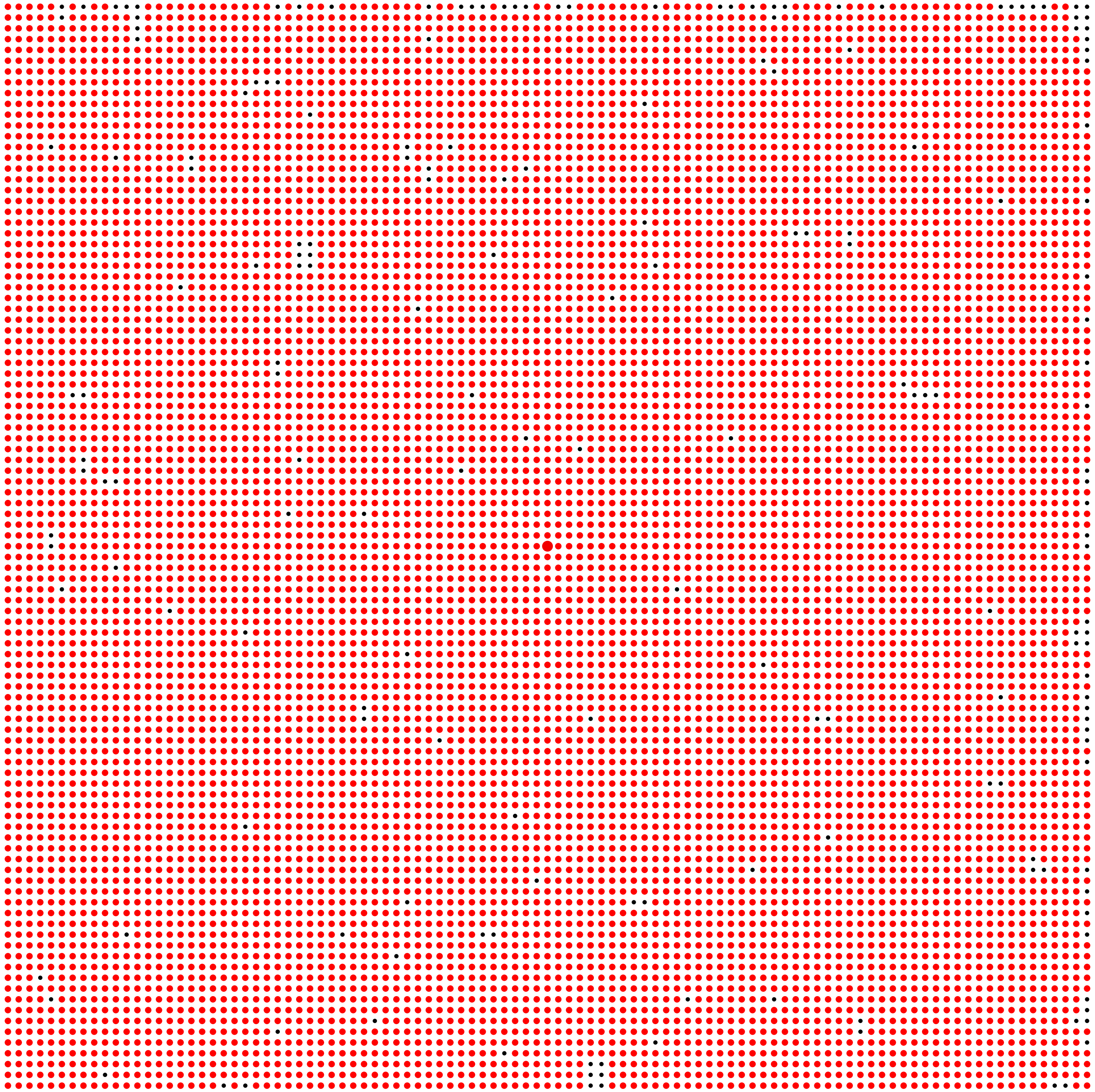
p＝0.53 の例



p＝0.54 の例

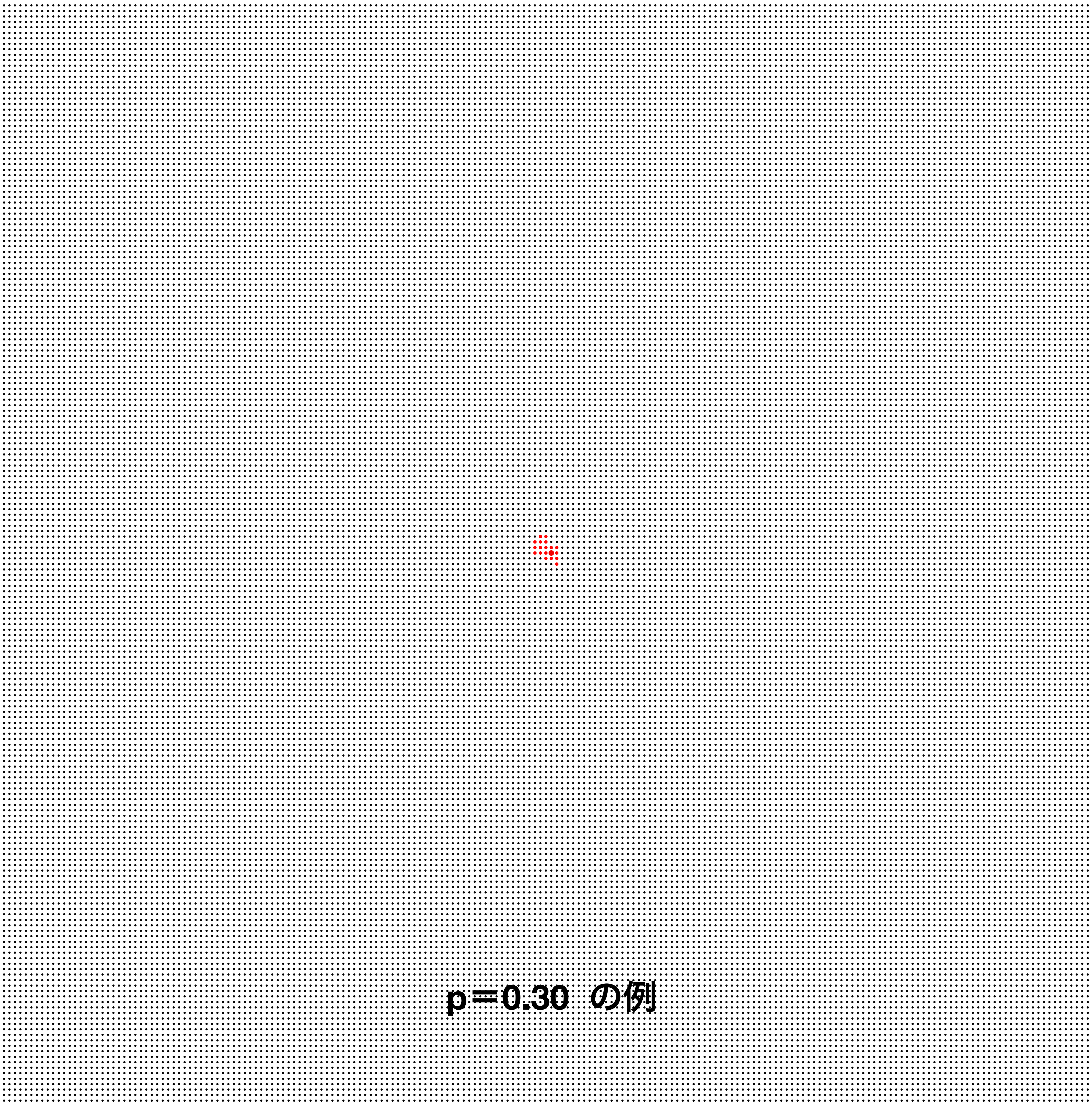


p＝0.60　の例

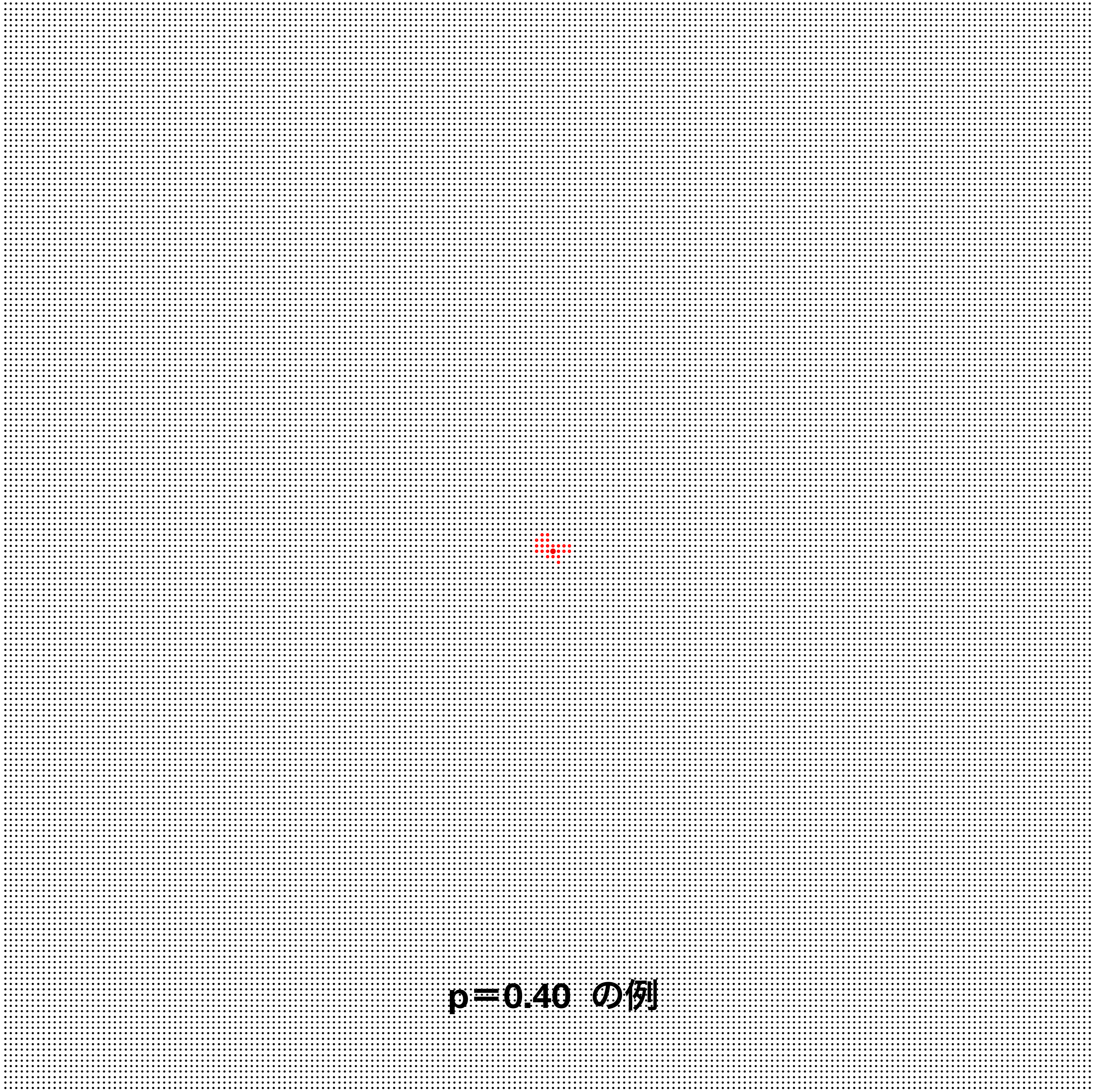


p＝0.70　の例

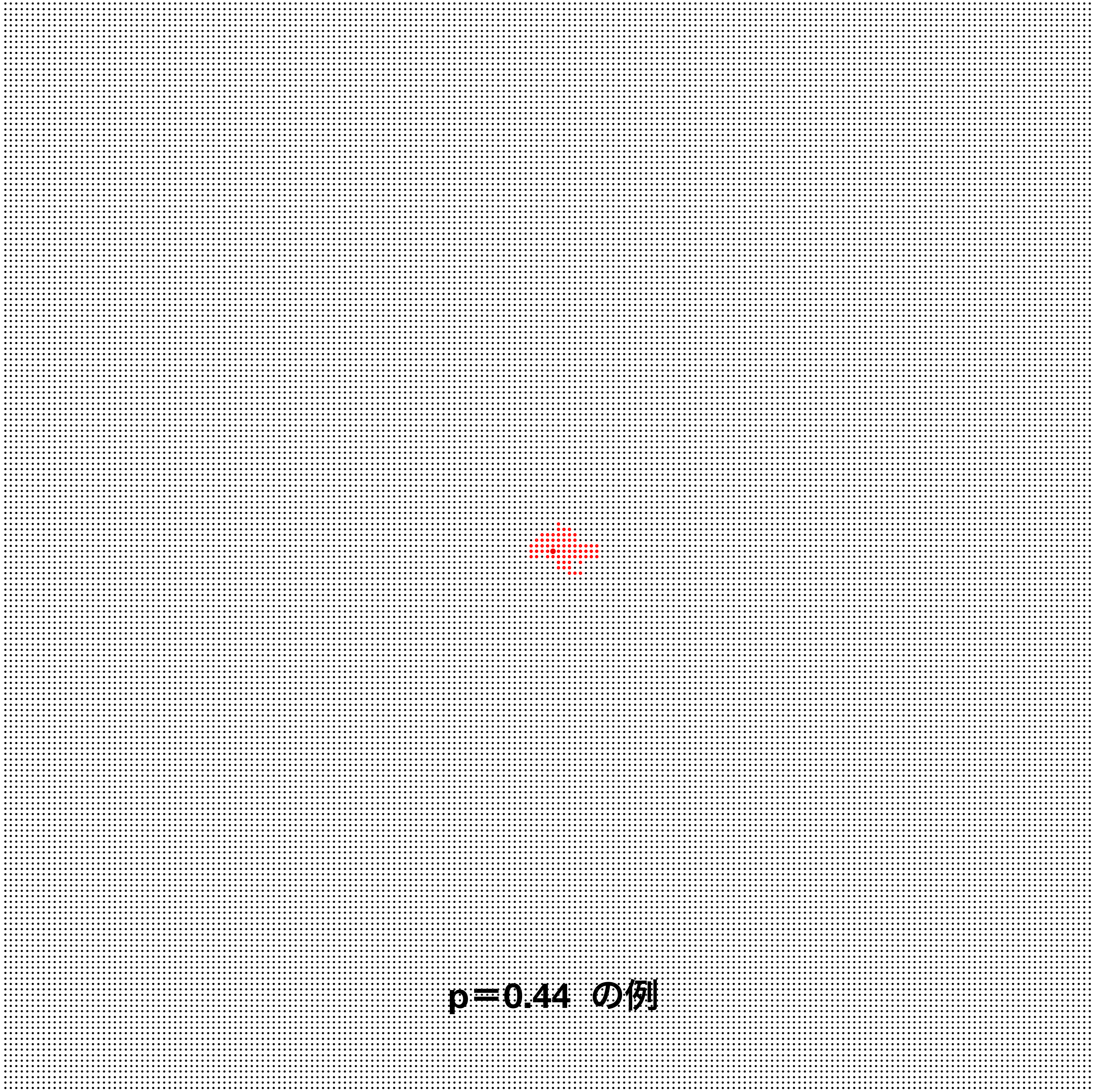
200✖200の例も



p＝0.30 の例



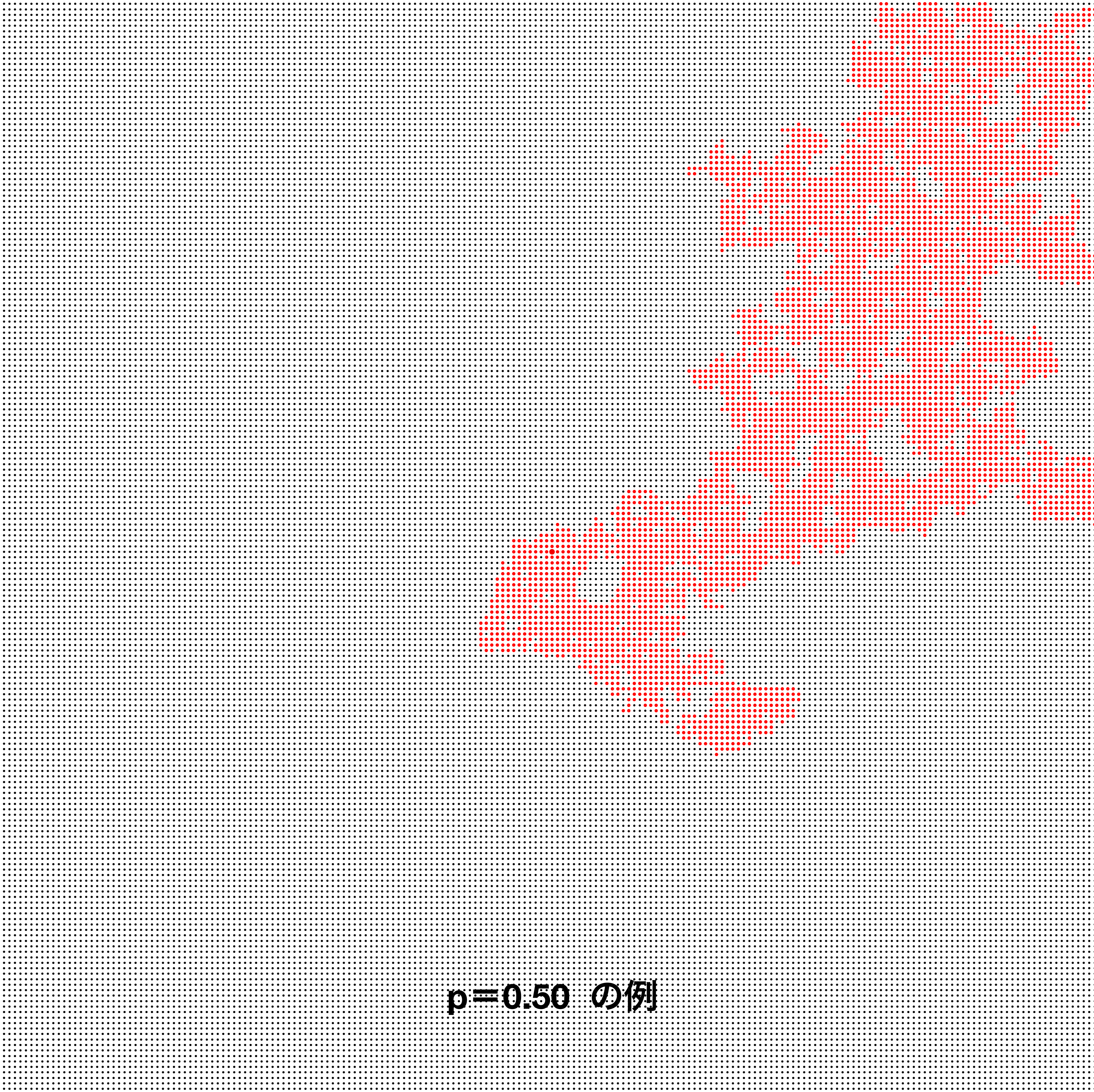
p＝0.40 の例



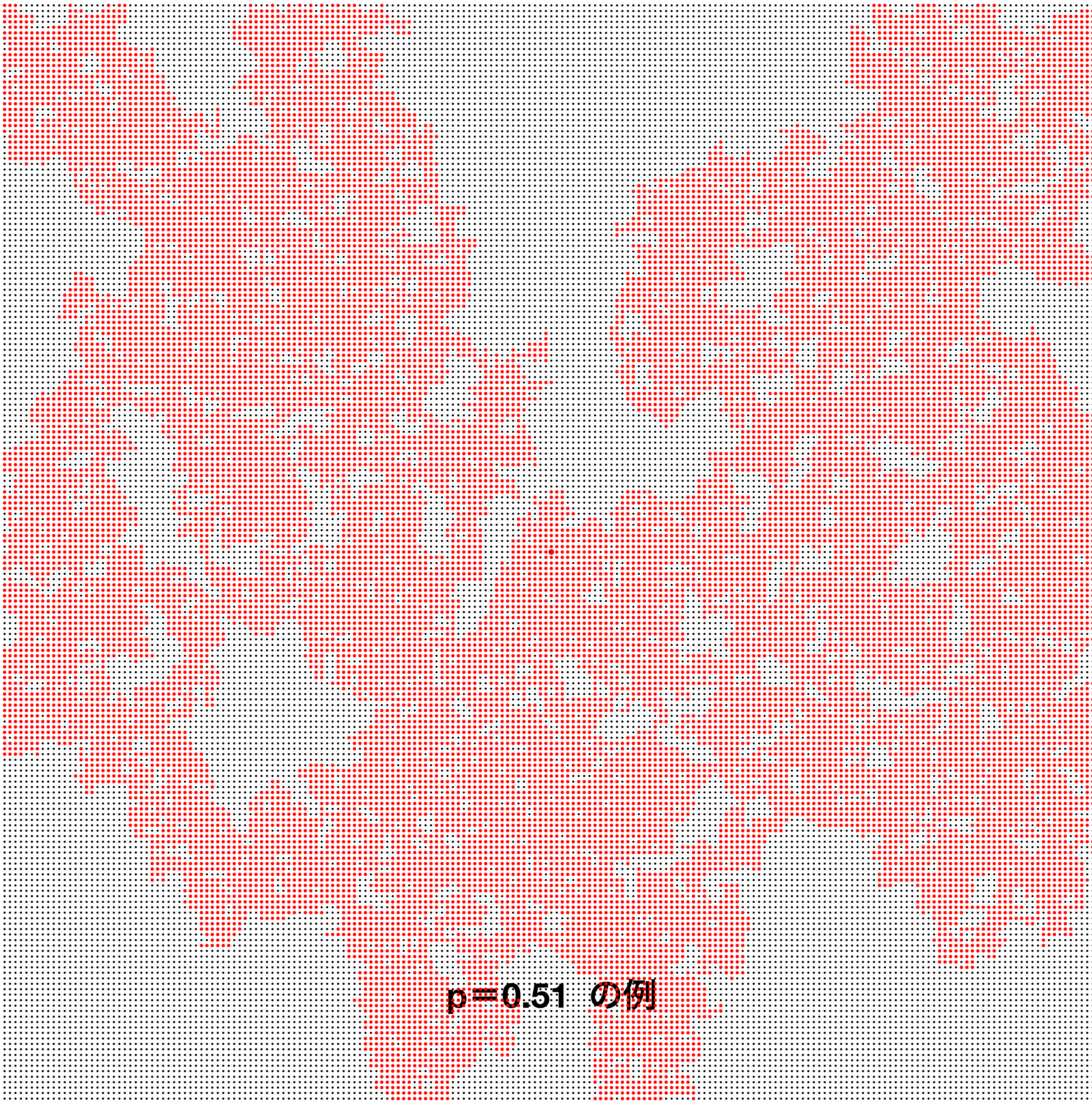
p＝0.44 の例

p＝0.46 の例

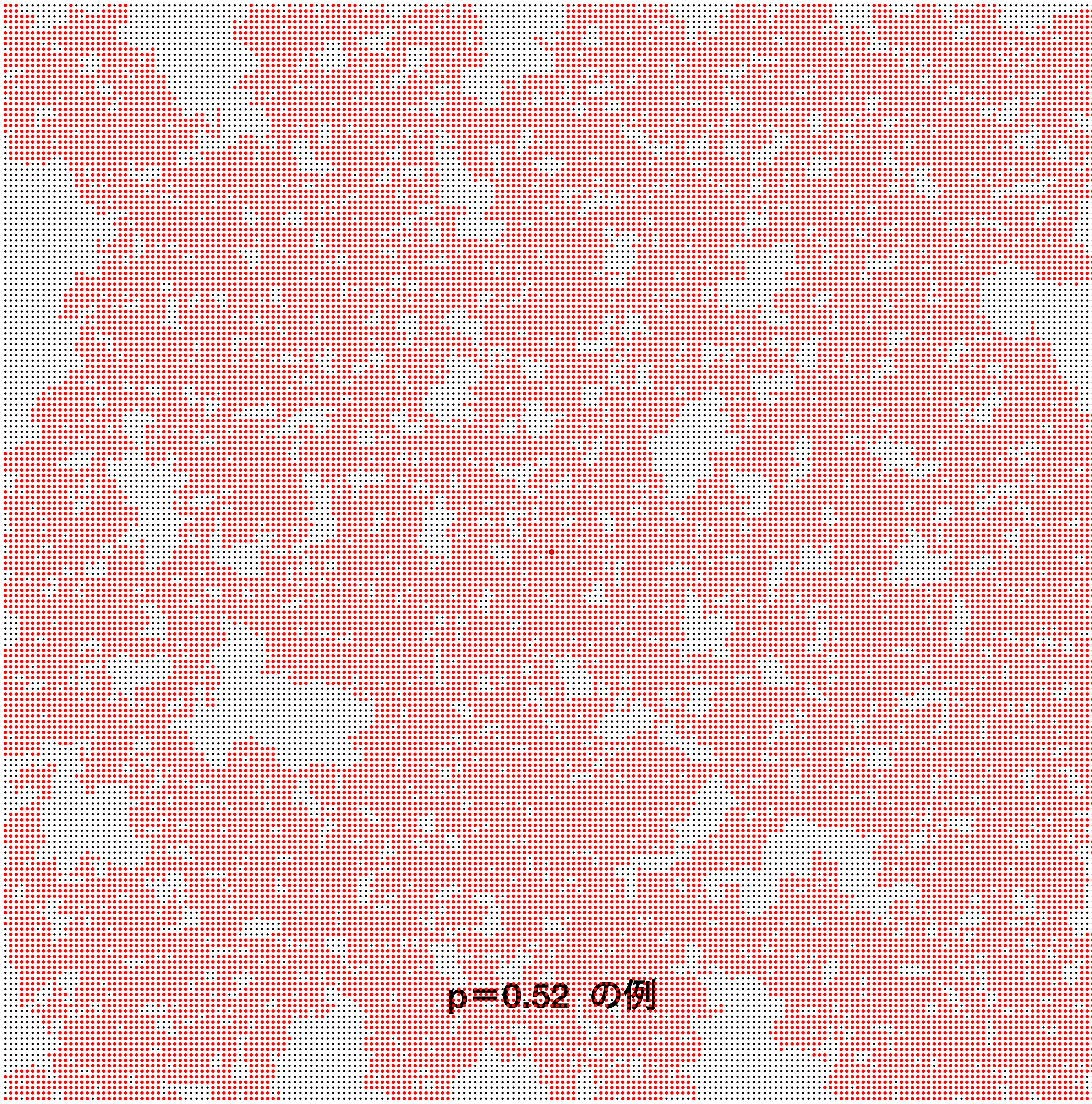
p＝0.48 の例

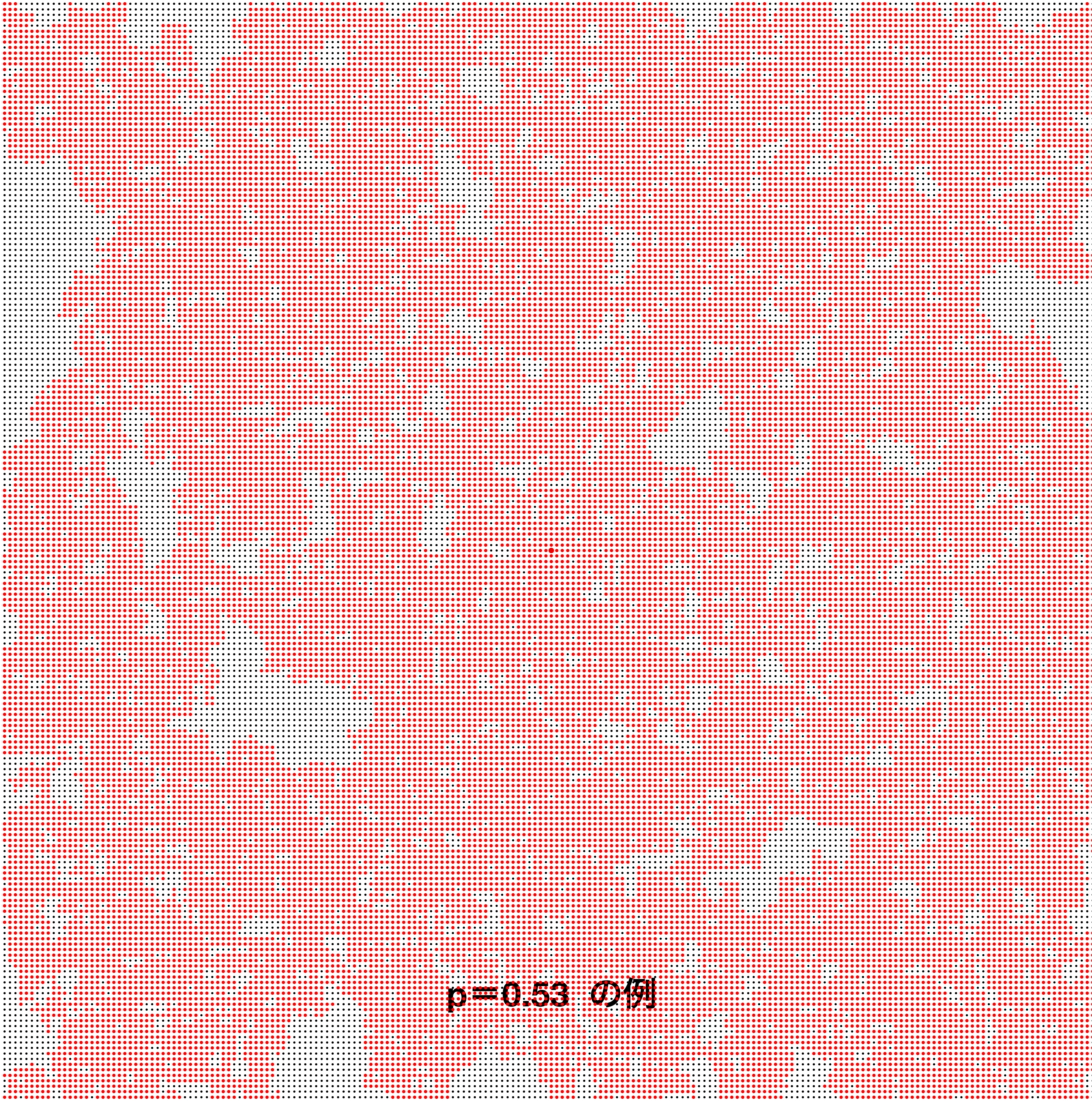


p＝0.50 の例

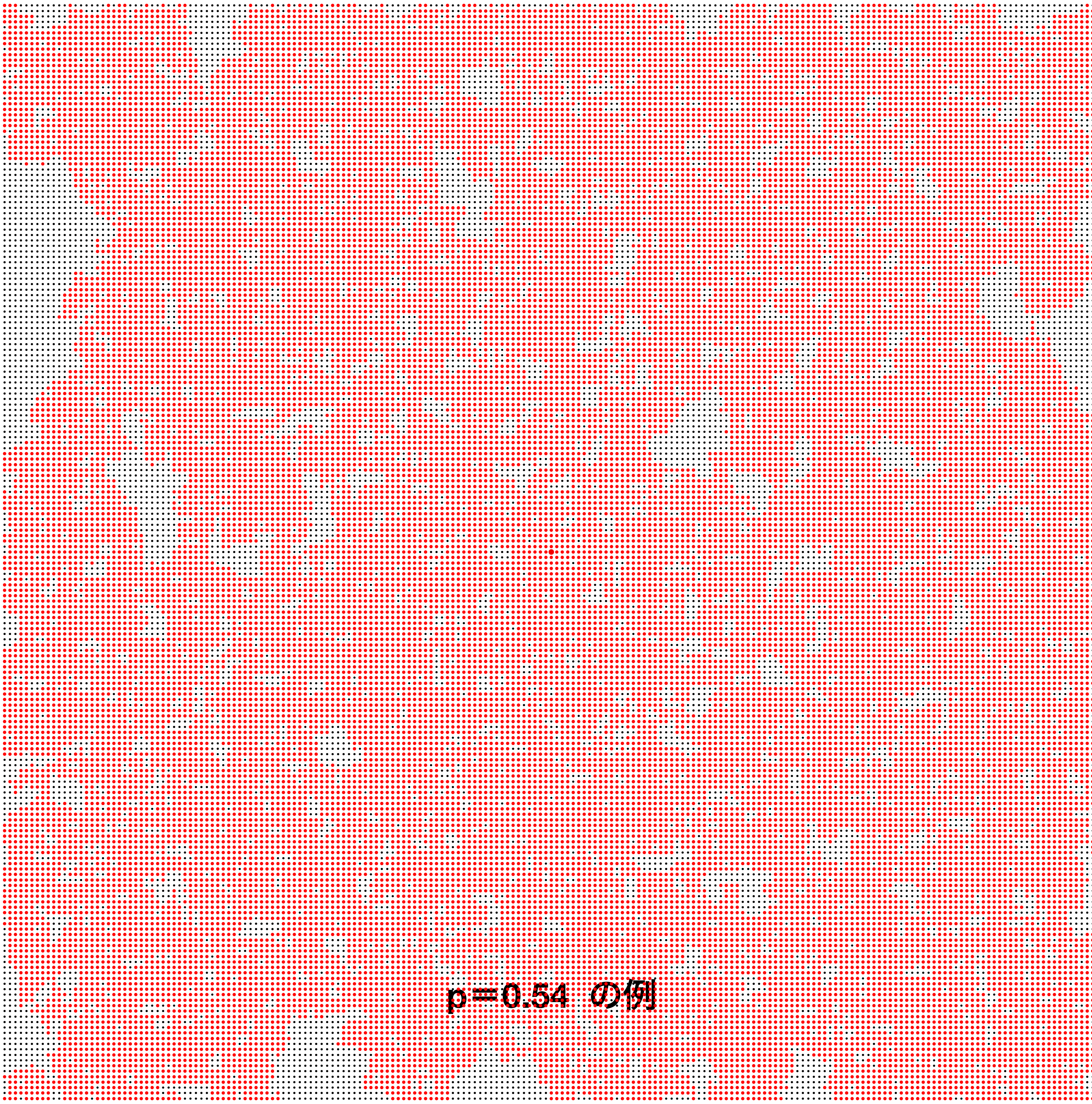


p＝0.51 の例

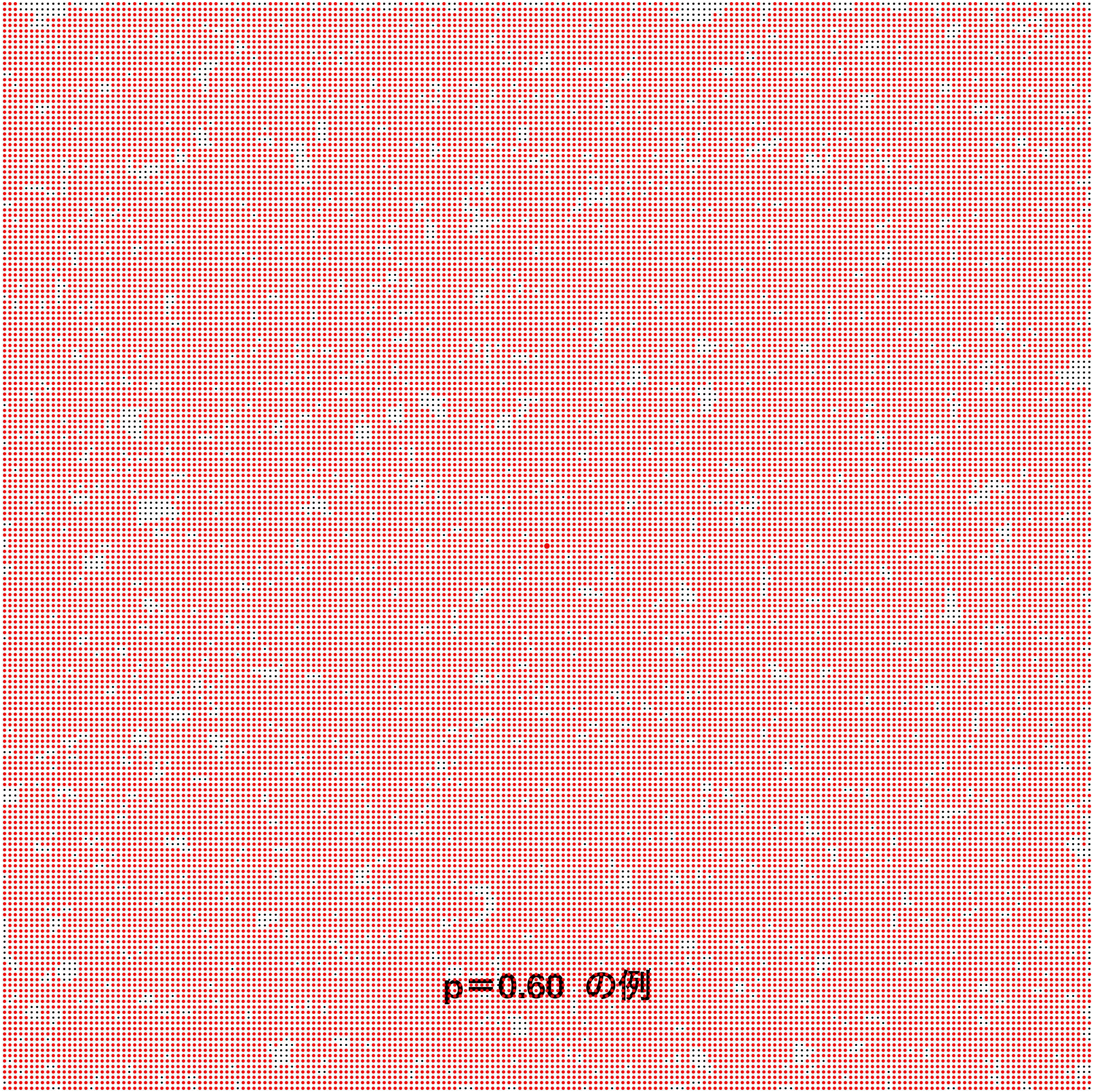

p＝0.52 の例



p=0.53 の例



p＝0.54 の例



p＝0.60 の例

p=0.70 の例

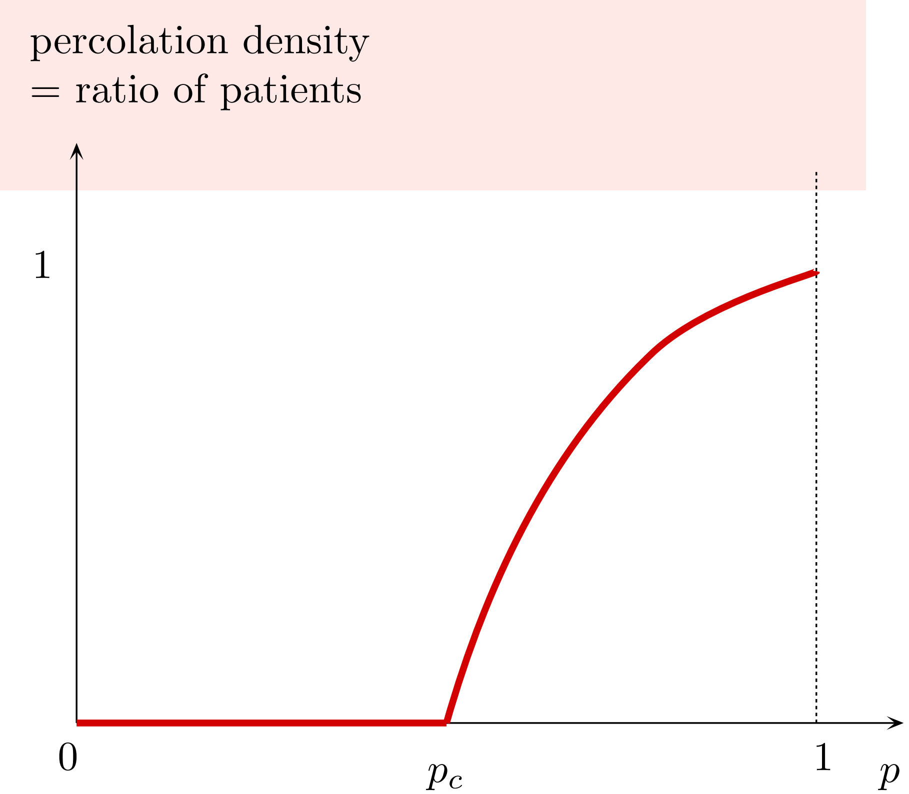
- p の値とともに，赤い部分（感染者の集合）は増える（まあ，当たり前）
- p が小さいなら，赤い部分は有限のようだ
- p が大きいと（$p > 0.5$くらい），赤い部分は遠くまで拡がっている？
- 特に，$p = 0.6$ 以上くらいでは，ほとんど真っ赤っか

数学の定理！！

この二次元パーコレーションモデルには，臨界値（critical value) p_cありて，$p < p_c$では $\theta_p = 0$.

$p > p_c$では，$\theta_p > 0$

無限遠まで繋がる確率 $= \theta_p$



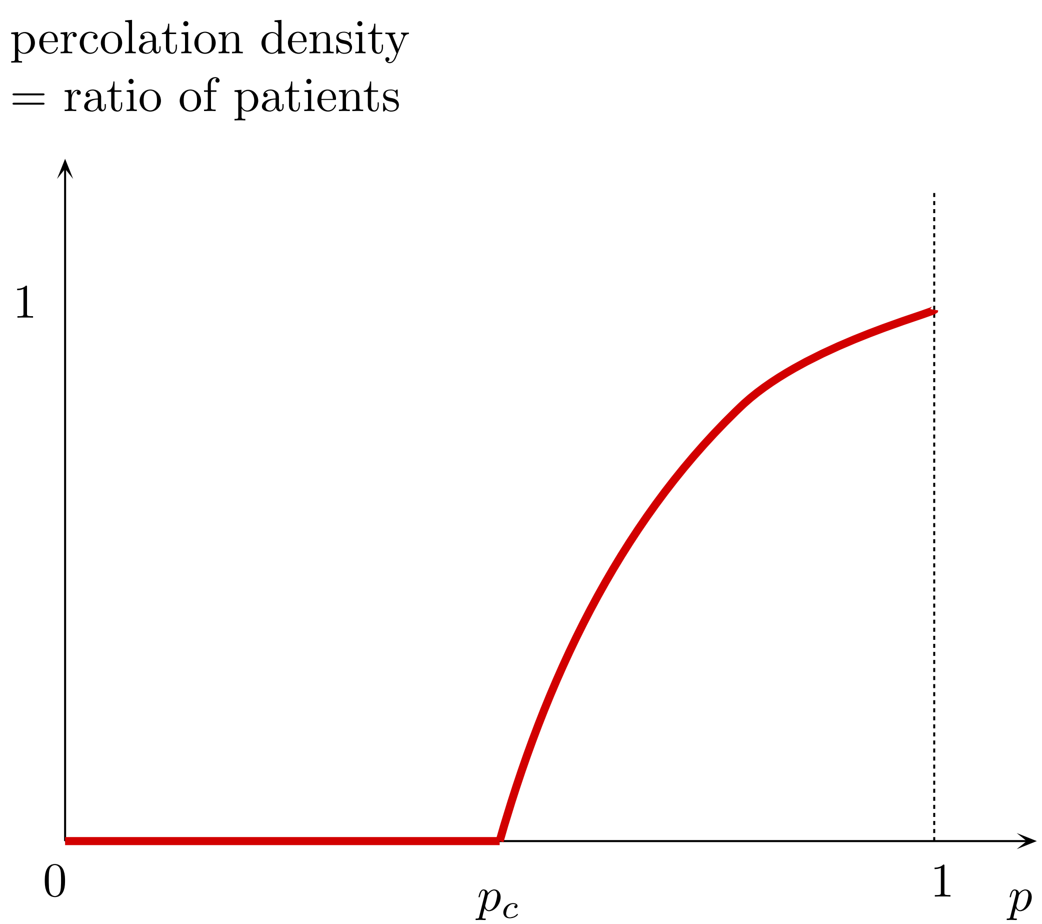
（実は，$p = p_c$ での θ_p の連続性は証明されていない．未解決の大問題）

3.3. 三次元，および一般の場合

- 以上の定性的な性質は，3次元以上のパーコレーションでも，かなり一般に成り立つ.

- 特に，臨界確率 p_c があって，$\theta_p = 0$ for $p < p_c$

  $\theta_p > 0$ for $p > p_c$



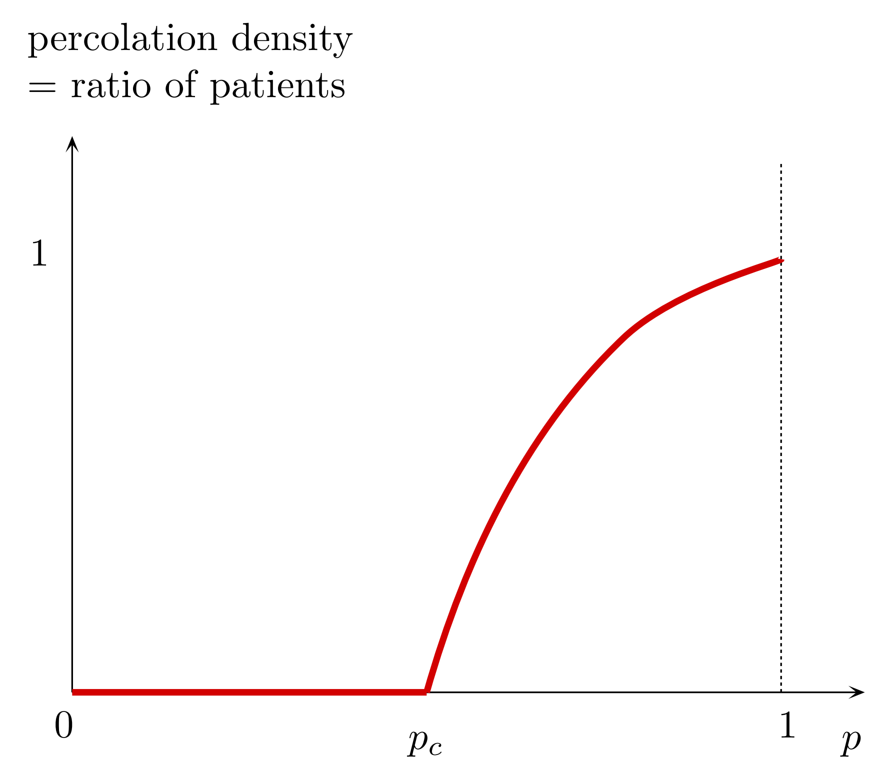
4. 感染症の伝播に関する教訓

最重要：臨界値 p_c と p の大小がすべてを決める.

$$p < p_c \text{ ならば, } \theta_p = 0$$

$$p > p_c \text{ ならば, } \theta_p > 0$$

よって，我々は，$p < p_c$ を実現すべきである.



- 実質的感染率 ≒ 実効再生産数 ≒
  （病気の感染率）✖（一人が接触する人数）

4.1. じゃあ，どうするか？

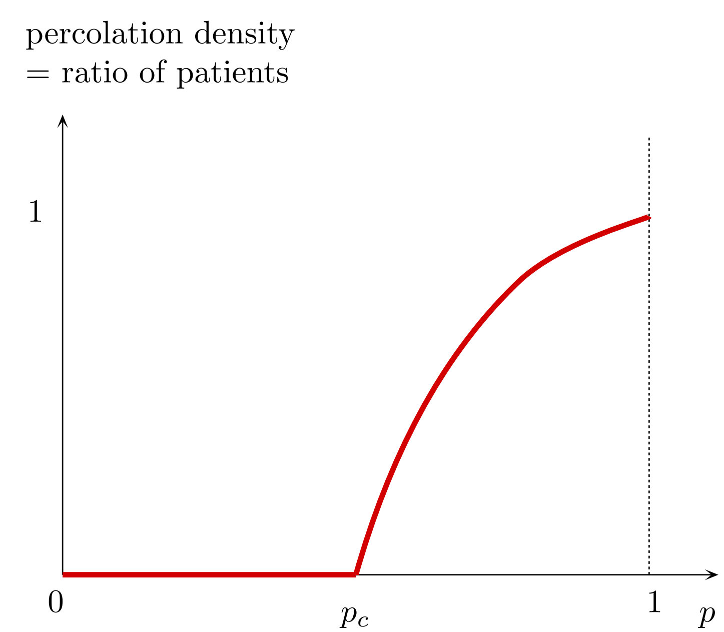
- p を下げる，または，p_c を上げる．または両方を目指す．
- 付き合う人（回数）を減らす．グラフの繋がり方が弱くなる．
  結果，p_c が上がる．
- マスクなどで防御する．結果，p が下がる．

この結果にはサプライズはない．これまでにも散々，言われてきたこと．

ただし，「どこまで努力すれば良いのか」「p_c が目安」と思えるのは良いことだろう．

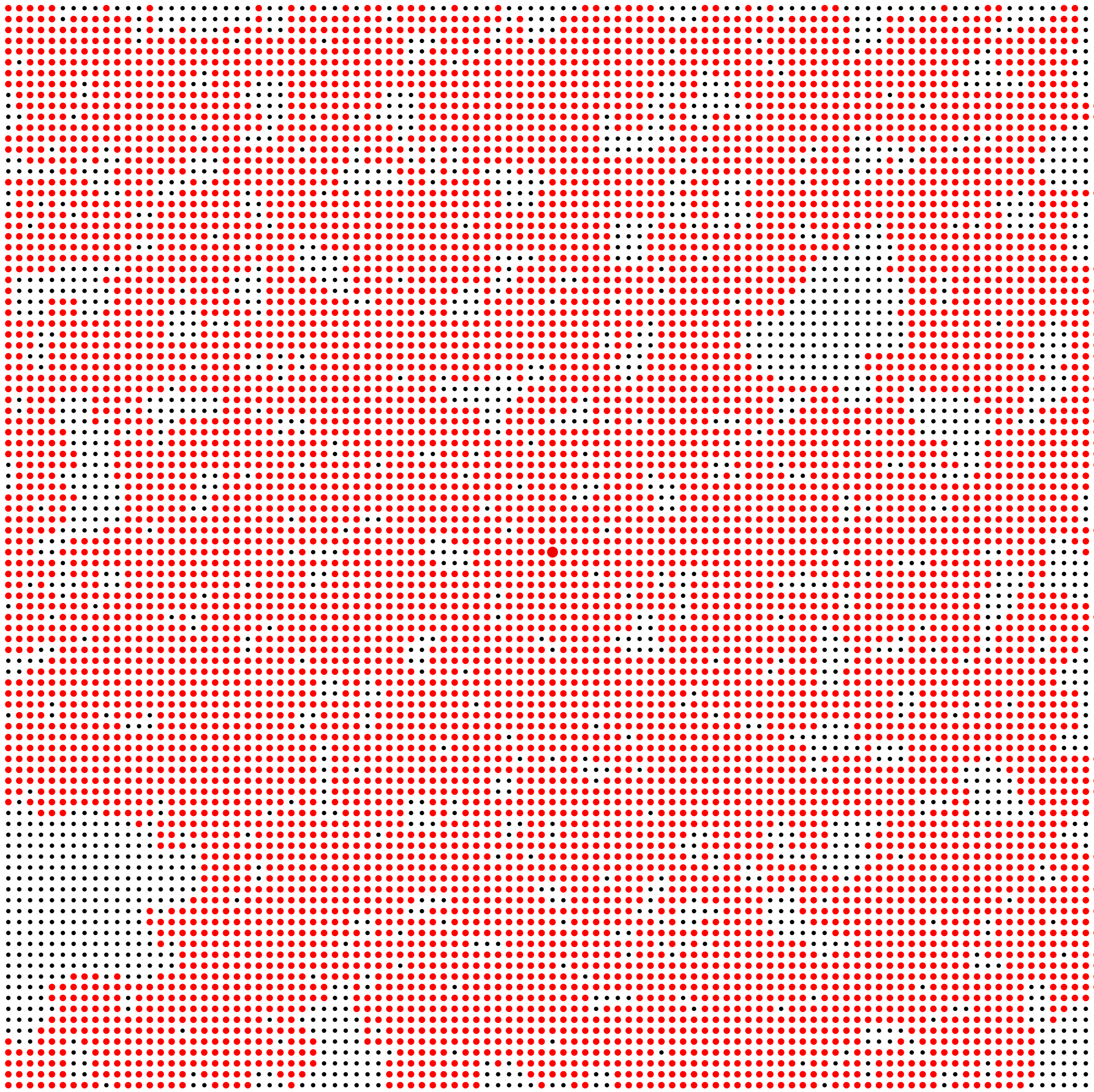
4.2. 変異株について

- 変異株（←正しい用語ではないかも）は厄介.
- 仮に，感染力（伝播力）が 2倍になったとする．これは，「今と同じ付き合いをしていると，p が 2倍になる」ということ.
- これまで我々が我慢して $p < p_c$ を実現していても，$2p$ は軽く p_c を超えてしまうかも．（日頃の p は，p_c よりちょっと下？）
- 結果，爆発的な感染が起こりうる.
- 「感染力2倍なら感染者も2倍」では**ない**！
  p_c **を超えるか否か**，が問題.



これに対抗するには「人との付き合いを半分にする」しかない．
付き合いを半分にすれば，この変異株には対抗できる．
（けど，実際にはつらいよね．．．）

4.3. 集団免疫について



赤は感染者
白抜きで残っている人たちもいる
　→ 助かった人たち

赤が免疫保持者でも同じこと
→ ワクチンに期待できる理由

まとめ

- 感染症の数理モデル（の一つ）を見た.
- 感染率 p がある臨界値 p_c を超えると，全体に拡がって，どうしようもなくなる.
- 感染率 p を下げる（または p_c を上げる），結果として $p < p_c$ を実現することが肝要
- 実質的感染率 ≒（病気の感染率）✖（一人が接触する人数）
- 変異株への理想的な対応も理解できる
- これらを参考に，皆さんの行動を決めてください.