複素函数論（原）　第 9 回（7/8）今日は主に，複素函数とテイラー展開について，です

講義ノートの前書きには書いてありますが，以下の定理などで「高橋」というのは高橋礼司著「複素関数論」（東大出版会）のこと，「志賀」というのは志賀啓成著「複素解析学 I」（培風館）のことです．これらは証明を調べたり，全体の流れを見るには役に立つ場合があるでしょう．

3.4 テイラー級数（正則函数は冪級数で書ける）

前節では，冪級数で与えられる函数は（その収束円内で）解析函数であることを見た．本節ではこれをさらに進めて**どんな解析関数も冪級数で書ける**ことを見る．（この意味で,「解析函数であること」と「冪級数で書ける」ことは，ほぼ同値である！）

またその冪級数の具体形を知るとともに，この性質から導かれるいくつかの面白い性質を学ぶ.

前振り：実数函数については，既にテイラー展開を習っている：f に関する適当な条件の下で

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{3.4.1}$$

であった．また，既に「$f(z)$ が正則なら無限回微分可能（定理 2.4.1)」と言うことも知っている．従って，正則函数は冪級数に展開できるのではないか，と予想される．この予想は実際に正しい．この節ではこの予想の証明，およびこの予想からでてくる結果をみていく.

まず，非常に重要な「正則なら冪展開ができる」ことを見よう.

定理 3.4.1 (冪展開の可能性；教科書の p.112, 定理 1)
$\mathbb{C}$ 内の領域 D で定義された f が正則とする．このとき f は，D 内の任意の点 α のまわりで，冪級数展開

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(z-\alpha)^n,\qquad f_n=\int_{|\zeta-\alpha|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\frac{d\zeta}{2\pi i} \tag{3.4.2}$$

を持つ．この級数の収束半径は少なくとも α と ∂D との距離 $\mathrm{dist}(\alpha,\partial D)$ 以上で，上の r は $\mathrm{dist}(\alpha,\partial D)$ より小さい任意の正の数である.

証明：
題意の z は $|z-\alpha|<\mathrm{dist}(\alpha,\partial D)$ を満たしているので，このような z について考える．今，α を中心とし，半径が $|z-\alpha|$ と $\mathrm{dist}(\alpha,\partial D)$ の間であるような円を γ と呼ぶことにする．この円の中に z があるので，Cauchy の積分公式は

$$f(z)=\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{2\pi i} \tag{3.4.3}$$

と書ける．これを強引に級数の形に持って行こう.

まず，積分中では ζ は円周上，z は円の内部にあるので,

$$\left|\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right|<1 \tag{3.4.4}$$

である．従って，以下のように変型しても右辺の級数は絶対収束する.

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-\alpha)-(z-\alpha)}=\frac{1}{\zeta-\alpha}\times\frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}}=\frac{1}{\zeta-\alpha}+\frac{z-\alpha}{(\zeta-\alpha)^2}+\frac{(z-\alpha)^2}{(\zeta-\alpha)^3}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\alpha)^n}{(\zeta-\alpha)^{n+1}} \tag{3.4.5}$$

従って，これを (3.4.3) に代入して項別積分できる．結果は

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(z-\alpha)^n\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\frac{d\zeta}{2\pi i} \tag{3.4.6}$$

則ち，結論をえた．（このままでは f_n を与える線積分が γ についてのものになっているが，非積分函数の特異点が $z = \alpha$ だけであることから積分路を自由に変更できる． □

これまでをあらっぽくまとめると以下のようになる：「複素函数がある領域で微分可能である事（正則性）」と「複素函数が冪級数に展開できること（解析性）」とは同等である．

3.4.1 冪級数による初等函数の定義

（音声： 08:18 〜）

冪級数を定義して自由に使えるようになった今は，扱える函数の範囲をグンと拡げることが出来る．特に，実函数の時に重要であった $\sin, \cos, \exp, \log$ などを定義することができる．これらは既に定義しているが，この小節では，これらの重要な函数を，冪級数で定義する立場からまとめて定義しておく．

方針：多項式や有理函数の形に書けない函数は，すべてその**冪級数展開によって**定義する．特に，実数函数として定義されていたものを複素函数に拡張するには，同じ展開係数を使った冪級数展開を用いる．

上の方針についての補足説明．

- 前小節で見たように，「冪級数展開可能」と「微分可能（正則性）」は大体，等価であるから，正則函数を定義するのに冪級数を使うのは非常に自然である．
- さて，実数函数としてなじみの深い函数を正則な複素函数として定義する際，複素数に拡張した函数が，実数の時のものと自然につながるようにしたい．となれば，実数の時の級数展開を複素数まで拡張して用いるのが一番，自然である．
- 一方で，以前に指数函数などを複素函数として拡張した場合，「できた函数が微分可能であること」を指導原理にした．その指導原理と「級数展開」がどう関わってるのか，は次の項目を見ればわかる．
- 実は，実数と複素数で同じ級数を用いることの理論的根拠は，すぐ後にでてくる「一致の定理」である．これにより，以前にやった「実軸上での定義を，複素函数として微分可能なように，一般の複素数に拡張する」こととの整合性が取れる．

以下では，いくつかの例を挙げる．

指数函数： 実数函数としての指数函数 e^x の定義の仕方は色々あるが，ともかく，e^x は

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{3.4.7}$$

という冪級数展開を持っていた．従って，複素数 z に対する指数函数は

$$e^z = \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{3.4.8}$$

という冪級数で**定義**する（この級数の収束半径は無限大）．

三角函数： 指数函数に倣って，三角函数も実数函数の時の冪級数から定義する．まず，

$$\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \tag{3.4.9}$$

とする（この級数の収束半径は無限大）．次に，$\tan, \sec, \cot, \mathrm{cosec}$ は，$\sin, \cos$ との関係式

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \qquad \sec z = \frac{1}{\sin z}, \qquad \mathrm{cosec}\, z = \frac{1}{\cos z} \tag{3.4.10}$$

から定義する．（$\tan, \cot$ などを冪級数で定義しても良いが，収束半径が限られる）．

対数函数： これはちと面倒なので，ここでは，$|z| < 1$ のみに対して，

$$\log(1+z) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \tag{3.4.11}$$

と定義するのに留めておく．この級数の収束半径は丁度 1 なので，$|z| \geq 1$ に対しての定義はもう少し考えないといけない．これは「解析接続」を用いて行う．その結果は，既に 1 章でやったことに一致する（後で）．

以上の定義から直ちに，

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{3.4.12}$$

や

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \qquad \text{(Euler の関係式)} \tag{3.4.13}$$

が成り立つことがわかる（各自，冪級数を両辺に代入して確かめよ）．

3.4.2 冪級数を使って証明できるいくつかの定理（かなりおまけ気味；でも面白い）

（音声： 15:28 〜）

定理 3.4.2 (一致の定理；高橋の系 2（p.43），志賀の定理 4.6 の前半) 領域 D で正則な 2 つの函数 f, g がある．今，D 内の一点に収束する点列 $\{z_n\}$ に対して $f(z_n) = g(z_n)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ であるとすると，D 内で $f \equiv g$ である．

証明：

Step 1. $f \equiv 0$ の場合が証明されればよい．なぜなら，一般の場合は $h(z) = f(z) - g(z)$ を考えることにより $h \equiv 0$ が言えれば言えるからである．よって「すべての n について $f(z_n) = 0$ ならば $f \equiv 0$」を言うことにする．

Step 2. z_n の極限点を α とすると，α は D の内点だから Taylor 展開できて

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z-\alpha)^n. \tag{3.4.14}$$

以下，$f_n \equiv 0$ であることを示す．

Step 3. f は正則ゆえもちろん連続，よって

$$f_0 = f(\alpha) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0 \tag{3.4.15}$$

よって $g(z) := f(z)/(z-\alpha) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}(z-\alpha)^n$ も正則．よって上と同様にそのゼロ次の係数はゼロ：$f_1 = 0$．以下，これの繰り返しによりすべての n で $f_n \equiv 0$ とわかった．

Step 4. 以上から (3.4.14) の級数の収束範囲では $f \equiv 0$ がわかる．これを D 全体に拡げるには，今の級数でカバーした部分の端の方の点を改めて α だと思ってみる．すると α に収束する任意の点列 $\{z_n\}$ に対して $f(z_n) \equiv 0$ である．よって上の議論をくり返すことができる．以下，このようにして D 全体まで拡げることができる． □

系 3.4.3 (高橋の定理 2.7（p.43），志賀の定理 4.6 の後半) 領域 D で正則，かつ恒等的にはゼロでない函数 f の零点は D-内に集積点を持たない．

証明：

集積点を持つと言うことは，$g \equiv 0$ として定理 3.4.2 の条件を満たしてしまうことになる．これは「恒等的にはゼロではない」に矛盾する． □

定理 3.4.4 (志賀の定理 4.7) 整函数（$\mathbb{C}$ 全体で正則な函数）f に対して整数 $k \geq 0$ と $M > 0$ が存在し，十分大きな任意の r に対して（つまり r_0 が存在して $\forall r > r_0$ ということ）

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq M r^k \tag{3.4.16}$$

となるならば，f は高々 k-次の多項式である．

証明：
整函数であるから収束半径 ∞ の級数展開ができる：

$$f(z) = \sum_n f_n z^n \tag{3.4.17}$$

ところが (3.4.2) の f_n の表式から

$$|f_n| \leq \int_{|\zeta|=r} \frac{M r^k}{|z|^{n+1}} \frac{d|\zeta|}{2\pi} = M\, r^{k-n} \tag{3.4.18}$$

である．$r \to \infty$ とすると $n > k$ なら $f_n = 0$ であるとわかる． □

3.5 函数の収束概念と項別微分・積分（教科書の 3.5 節）

（音声： 25:18 〜）

函数の収束の概念について，少しまとめておく．

定義 3.5.1 (各点収束と一様収束，教科書の p.120 付近) 函数列 $\bigl(f_n(z)\bigr)$ と z の集合（領域）D がある．
(i) 今，領域 D の各点 z で $f_n \to f$ とは，単に $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ なること．
(ii) 一方，領域 D で一様に $f_n \to f$ とは，$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_D = 0$ なること．ここで $\|f\|_D := \sup_{z\in D} |f(z)|$ と定義した．

註： 補足：各点収束は

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(z) - f(z)| = 0 \tag{3.5.1}$$

であるが，一様収束は

$$\lim_{n\to\infty} \Bigl(\sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)| \Bigr) = 0 \tag{3.5.2}$$

である．この極限の中に sup が入っているのがミソ．

実数函数で一様収束しない例としては，例えば

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ nx & (0 < x \leq 1/n) \\ 0 & (x > 1/n) \end{cases} \tag{3.5.3}$$

がある．この函数は，$f(x) = 0$ という，恒等的にゼロの函数に各点で収束する．しかし，一様収束はしない（上の定義に基づいて,「一様収束しない」理由を納得しよう）．

註： ϵ-δ で書けば，各点収束は

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall z \in D,\ \exists N \quad \text{s.t.} \quad n \geq N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \tag{3.5.4}$$

であるが，一様収束は

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N,\ \forall z \in D, \qquad \text{s.t.} \quad n \geq N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \tag{3.5.5}$$

註： 上では函数列について定義したが，級数 $\displaystyle\sum_n f_n(z)$ についてもその部分和 $\displaystyle F_N := \sum_{n=0}^{N} f_n(z)$ を考えることで各点収束，一様収束を定義する．

> **定理 3.5.2 (志賀の定理 2.9)** 函数列 (f_n) が D 上で一様収束するための必要十分条件は
>
> $$\text{任意の } \epsilon > 0 \text{ に対してうまく } N \text{ を見つけて，} \Bigl(n, m \geq N \Rightarrow \|f_n - f_m\|_D < \epsilon\Bigr) \text{ を成立させられる} \tag{3.5.6}$$
>
> こと

教科書の p.103, 定理 5 には，一様収束の**十分**条件が載っている．上の定理の方がより基本的なので，まずは上のを紹介した．

定理 3.5.2 の証明

まず，必要条件から．一様収束しているとすると，上の註から

$$\forall \epsilon' > 0,\ \ \exists N,\ \ \forall z \in D, \qquad \text{s.t.} \quad n \geq N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon' \tag{3.5.7}$$

が成り立つからこれを $m \geq N$ についても書いて $|f_n - f_m| = |f_n - f + f - f_m| \leq |f_n - f| + |f - f_m|$ を使うと，直ちに，

$$\forall \epsilon' > 0,\ \ \exists N,\ \ \forall z \in D, \qquad \text{s.t.} \quad n, m \geq N \Rightarrow |f_n(z) - f_m(z)| < 2\epsilon' \tag{3.5.8}$$

を得るので，$\epsilon = 2\epsilon'$ として定理の主張は成り立つ.（最後に $\|\cdot\|_D$ の定義を思い出すと，上の式は直ちに $\|f_n - f_m\|_D < 2\epsilon'$ を意味することに気づく.）

次に十分条件．定理の条件が成り立っているとすると，各点 z において $(f_n(z))$ は Cauchy 列である．従って，各点ごとにその行き先

$$f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z) \tag{3.5.9}$$

が存在する．問題はこの収束が一様かどうかであるが，それには (3.5.6) を書いた上で片方の m だけを無限大にしてみる．それぞれの z では $f_m(z) \to f(z)$ であるので，この式は結局

$$\forall \epsilon > 0,\ \ \exists N, \qquad \text{s.t.} \quad n \geq N \Rightarrow \|f_n - f\|_D < \epsilon \tag{3.5.10}$$

と読める．つまり $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_D = 0$ と言うわけで，一様収束性が示せた． □

次の定理は，連続函数の列が一様収束するなら，極限の函数も連続であることを保証する．

> **定理 3.5.3 (教科書の p.122, 定理 2)** 函数列 (f_n) が f に一様収束し，かつそれぞれの f_n が連続の時，行き先の f も連続である．

（注）教科書の定理 2 の記号を用いれば，

$$\text{（上の定理の）} f_n(z) = \text{（教科書の）} \sum_{k=0}^{n} f_k(z), \qquad \text{（上の定理の）} f(z) = \text{（教科書の）} F(z), \tag{3.5.11}$$

に相当している．また，一様収束でない場合に不連続になる例は，教科書の p.122, 例 2.

証明：

実数函数の時に限って，グラフで理解するのが直感的な理解．正しい証明は教科書に載ってるので，ここでは略． □

> **定理 3.5.4 (志賀の定理 2.11；これの特殊な場合が教科書 p.125, 定理 5)** 函数列 (f_n), (g_n) が $|f_n(z)| \leq g_n(z)$ を満たし，かつ $\displaystyle\sum_n g_n(z)$ が D 上で一様収束しているとする．このとき，級数 $\displaystyle\sum_n f_n(z)$ も D 上で一様かつ絶対収束している．

証明：

ϵ-δ でやる．一様収束について言いたいのは，定理 3.5.2 を使うつもりで，部分和 $S_N(z) := \sum_{n=0}^{N} f_n(z)$ を定義した場合に，

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists N,\ \forall z \in D, \qquad \text{s.t.} \quad n, m \geq N \Rightarrow |S_n(z) - S_m(z)| < \epsilon \tag{3.5.12}$$

なること．最後の不等式は $\Big|\sum_{j=m+1}^{n} f_j(z)\Big| < \epsilon$ ということであるが，g_n の一様収束性から類似の不等式 $\Big|\sum_{j=m+1}^{n} g_j(z)\Big| < \epsilon$ の成立は保証されている．$|f_j| < g_j$ より直ちに欲しい不等式が出る．

絶対収束についても同様で，今度は部分和 $T_N(z) := \sum_{n=0}^{N} |f_n(z)|$ を考えれば良い． □

以上の準備の下に，正則函数の一様収束極限（の項別微分や項別積分）について，以下の定理を述べることが出来る（定理 3.5.3 と比較せよ）．これらの定理においては，定理 3.5.3 と同様に，

$$\text{（講義ノートの）} f_n(z) = \text{（教科書の）} \sum_{k=0}^{n} f_k(z), \qquad \text{（講義ノートの）} f(z) = \text{（教科書の）} F(z), \tag{3.5.13}$$

の対応関係になっている.（これらの証明は教科書にあるので，略.）

項別積分に関しては：

定理 3.5.5 (教科書の p.124, 定理 3 の正則函数版) 領域 D で正則な函数列 (f_n) が f に一様収束しているとする．また，C を D 内の任意の積分経路とする．この時，

$$\lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz \tag{3.5.14}$$

である．

つまり，一様収束する場合には,「z での積分」と「$n \to \infty$ の極限」の順序を交換しても良い」のだ.

項別微分に関しては：

定理 3.5.6 (教科書の p.125, 定理 4 の正則函数版) 領域 D で正則な函数列 (f_n) が f に一様収束している時，行き先の f も正則である．更に，任意の $k \geq 1$ に対して f_n の k-階微分 $f_n^{(k)}$ は f の k-階微分 $f^{(k)}$ に一様収束する．

つまり，一様収束する場合には,「z での微分」と「$n \to \infty$ の極限」の順序を交換しても良いのだ.

上の定理はもっと一般に「広義一様収束」と言う概念を用いて述べるべきであるが，ややこしくなるので狭い形で述べた．あらっぽく言えば,「一様収束」の下では正則性が遺伝するし，各導函数も行き先の導函数に収束する，と言うことである．

以上の主な定理の前提条件は，函数列 (f_n) が f に**一様収束する**ということだった．一様収束しない場合は，微分や積分と極限の順序を交換できないことが起こりうる．一つの例が教科書 p.124 の例 3 にある．