複素函数論（原）　第 8 回（7/1）今日は主に冪級数についてです

3.2　べき級数（教科書 3.2 節）

いろいろな級数のうち，微積分にとって非常に重要なものに,「ベキ級数」があるので，これについて学ぼう.

（記号について）これまでは a_n は実数のつもりで書いてきたが，これ以降は教科書に合わせて，**複素数の係数も a_n と書く**ことにする.

定義 3.2.1 (ベキ級数または整級数) 複素数列 $(a_n)_n$，および複素数 α が与えられた時，変数 z を含む級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ を，（$z=\alpha$ を中心とする）z の**ベキ級数 (power series)**（または整級数）という．この級数が収束するような z の全体をこの級数の**収束域**という.

見ての通り，冪級数とは，級数の和の中身が非常に特殊で，$(z-\alpha)^n$（に係数がついたもの）になっている．z は変数として考えたいので,「z の函数としての級数」が自然に定義できている．さらに，1 年でもやった（実数の場合の）テイラー展開を思い出せば，このような形の冪級数と一般の函数は非常に相性が良い．複素函数でも事情は同様なので，冪級数をしっかり学習する必要があるのだ.

冪級数の収束については，以下の著しい性質がある.

命題 3.2.2 (教科書の p.101, 定理 1) ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ が $z=\beta$ で収束するならば，この級数は $|z-\alpha|<|\alpha-\beta|$ なるすべての z でも収束する．しかも，その収束は絶対収束である.

証明：

まず，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\beta-\alpha)^n$ が収束するのだから級数の各項がゼロに行くことに注意する．つまり，

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|\,|\beta-\alpha|^n = 0 \tag{3.2.1}$$

である．これから十分大きな n では，大きな数 M を用いて

$$|a_n| \le \frac{M}{|\beta-\alpha|^n} \tag{3.2.2}$$

が成り立つことがわかる．よって $f_n(z):=a_n(z-\alpha)^n$，$g_n(z):=M\left(\dfrac{|z-\alpha|}{|\beta-\alpha|}\right)^n$ としてやると，$|f_n(z)|\le g_n(z)$ がなりたつ.

級数 $\displaystyle\sum_n g_n(z)$ は $|z-\alpha|<|\beta-\alpha|$ で絶対収束するから，定理 3.5.4 によって $\displaystyle\sum_n f_n(z)$ の絶対・一様収束が示される.（この定理は，教科書の 3.5 節にあるが，少し高度である．興味のある人は，教科書の該当部分，または僕の講義ノートの後ろの方（あまりよくかけてませんが）をご覧ください.） □

これまでも，これからも，冪級数の中心 α をゼロにとって，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の形のものを考えることが多い．この理由は，$\alpha\neq 0$ の場合でも，$w=z-\alpha$ という新しい変数を導入知れば，$w=0$ を中心とする冪級数の問題に帰着できるからである.

残念ながら，冪級数の中には，$z=\alpha$ でしか収束しないようなものもある．もう少し詳しく分類すると，以下のようになる．

定理 3.2.3 ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ について，以下の 3 つのどれか一つが成り立つ．

(a) この級数は全ての複素数 z について収束する．

(b) この級数は α 以外の全ての複素数 z について発散する（$z=\alpha$ でのみ収束する）．

(c) ある正の実数 r が存在し，$|z-\alpha|<r$ では絶対収束，$|z-\alpha|>r$ では発散する．

- 上の (b) はあまり実用的でない級数であるが，いくらでも定義はできる．例えば

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (n!) \times z^n \tag{3.2.3}$$

というのは，$z \neq 0$ では収束しない！

- 上の (c) の場合，$|z|=r$ となる z での収束発散については何も主張していないことに注意．実際，ここで収束する級数もあれば，発散する級数もある．

当然，上の (c) の場合が気になるから，以下の定義をしよう．

定義 3.2.4 (ベキ級数の収束半径) 上の (c) の r をベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の**収束半径**という．
なお，上の (a) の場合には収束半径は無限大，(b) の場合には収束半径はゼロ，と約束する．

勿論，収束半径がゼロである冪級数もある（すでに例を一つ与えた）．こんな級数は（そのままでは）役に立たないので[13]，この講義で以下に出てくるのは収束半径が正または無限大である級数である．

さて，一般論の定理 3.1.13 と定理 3.1.14 を用いると，直ちに以下が得られる．

命題 3.2.5 (教科書 p.104, 定理 2) ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ の収束半径 r は以下を満たす．

(1) $\displaystyle b := \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ が存在するならば，$r = \dfrac{1}{b}$

(2) $\displaystyle b := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ が存在するならば，$r = \dfrac{1}{b}$

いずれの場合も，$b=0$ なら $r=+\infty$，$b=+\infty$ なら $r=0$ と解釈する．

この命題はベキ級数の収束半径を求める際に非常に有効であるから知っていて損はないだろう．この定理は非常に基本的なものであるが，教科書では省略気味なので，証明の「気持ち」と「概略」を載せることにした．

（証明の気持ち）

(i) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ を b とおく．これは非常に大ざっぱに言うと，n の大きいところで

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \approx b \qquad \Longrightarrow \qquad |a_n| \approx C b^n \qquad (C \text{ は適当な定数}) \tag{3.2.4}$$

と言うこと．これから，n の大きいところで

$$\bigl|\, a_n(z-\alpha)^n \,\bigr| \approx C\bigl|b(z-\alpha)\bigr|^n \tag{3.2.5}$$

[13] 収束半径がゼロだから全く無意味かと言うと，そうではない．漸近展開，Borel の総和法など，このような一見無意味な級数が意味を持つ場合も多いが，これらはこの講義の程度を越えている

となるが，これは公比が $b|z-\alpha|$ の等比級数の各項になっている．従って，この等比級数は $b|z-\alpha|<1$ ならば収束するし，$b|z-\alpha|>1$ ならば発散する．

(ii) 極限 $\left(\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}\right)$ を b とおく．やはり大ざっぱには，n の大きいところで

$$|a_n|^{1/n}\approx b \qquad \Longrightarrow \qquad |a_n|\approx Cb^n \qquad (C\text{ は適当な定数}) \tag{3.2.6}$$

となるので，後は (i) の「気持ち」と同じ議論になる．

（証明の概略）以上の議論を厳密にするのは ϵ-δ 法の良い練習問題であるので，興味のある人のために載せておく（この講義では ϵ-δ 法の理解は要求していない）．証明の途中がわかりにくい場合には上の「気持ち」を思い出してもらいたい．

(i) 極限 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ を r とおく．定義から，任意の $\epsilon>0$ に対して N が存在して，$n\geq N$ ならば

$$\left|\,\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|-r\right|<\epsilon \qquad \left(\iff \qquad r-\epsilon<\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|<r+\epsilon\right) \tag{3.2.7}$$

が成り立つ．以下ではこれを元にして，$|z-\alpha|<r$ なら級数は絶対収束し，$|z-\alpha|>r$ なら級数が発散することを言う．

まず，$|z-\alpha|>r$ の場合は，級数の各項が発散してしまう．実際，(3.2.7) から，$n\geq N$ に対して

$$\left|\frac{a_n}{a_N}\right|=\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_{N+1}}{a_N}\right|>\Bigl(\frac{1}{r+\epsilon}\Bigr)^{n-N+1} \tag{3.2.8}$$

が成り立つことがわかるので，級数の n 項目について（もちろん，$n>N$ だけ考える）

$$\left|a_n(z-\alpha)^n\right|>a_N\Bigl(\frac{1}{r+\epsilon}\Bigr)^{n-N+1}|z-\alpha|^n=a_N\,|z-\alpha|^N\times\Bigl(\frac{|z-\alpha|}{r+\epsilon}\Bigr)^{n-N+1} \tag{3.2.9}$$

が成り立つ．$|z-\alpha|>r$ の場合は ϵ を十分小さくとることで（もちろん，ϵ に併せて N,n も大きくとる）

$$\left|\frac{|z-\alpha|}{r+\epsilon}\right|>1 \tag{3.2.10}$$

を実現できるので，(3.2.9) は $n\to\infty$ で発散することがわかる．つまり，収束半径は r 以下である．

次に $|z-\alpha|<r$ の場合であるが，この場合は (3.2.8) のマネをして

$$\left|\frac{a_n}{a_N}\right|=\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_{N+1}}{a_N}\right|<\Bigl(\frac{1}{r-\epsilon}\Bigr)^{n-N+1} \tag{3.2.11}$$

を導いて用いる．これから直ちに

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n(z-\alpha)^n\right|\leq\sum_{n=0}^{N}\left|a_n(z-\alpha)^n\right|+|a_N|\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\frac{|z-\alpha|}{r-\epsilon}\right|^n \tag{3.2.12}$$

となる．ここで $|z-\alpha|<r$ であるので，$\epsilon=(r-|z-\alpha|)/2$ ととり，これに応じて N も大きくとって固定する．すると，右辺最後の等比級数の公比が 1 より小さくなり，右辺第一項の級数は（N を固定しているので）有限和であるから，どちらも有限．つまり (3.2.12) の左辺が絶対収束していることがわかったので，収束半径は r 以上である．

以上から，収束半径は丁度 r であることがわかった．

(ii) この場合も証明はほとんど (i) と同じである．極限 $\left(\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}\right)^{-1}$ を r とおくと，(3.2.7), (3.2.8), (3.2.11) の代わりに以下が成り立つ：任意の $\epsilon>0$ に対して N が存在して，$n\geq N$ ならば

$$|a_n|^{1/n}<\frac{1}{r}+\epsilon \qquad \Longrightarrow \qquad |a_n|<\Bigl(\frac{1}{r}+\epsilon\Bigr)^n. \tag{3.2.13}$$

後は (i) の証明と同じように進めば，$|z-\alpha|<r$ なら収束することは言える．逆方向は，任意の $\epsilon>0$ と任意の N に対して $n>N$ が存在して

$$|a_n|^{1/n}>\frac{1}{r}-\epsilon \qquad \Longrightarrow \qquad |a_n|>\Bigl(\frac{1}{r}-\epsilon\Bigr)^n. \tag{3.2.14}$$

であることを使って，このような n に対しては $a_n(z-\alpha)^n$ が発散していくことを言えばよい． □

註 3.2.6 上の証明は，$|z-\alpha|=r$ の場合に収束するか・発散するか，について何も言ってくれない．実際，$|z-\alpha|=r$ の場合には「何でもあり」なので，個々の級数毎に，また個々の z 毎に対応するしかない[14]．

[14] 勿論，特殊な場合についての細かい議論は無いわけではないが...

さて，このようなベキ級数が有効なのは，(1) これがいろいろな関数を表すのに利用できること，(2) さらに，ベキ級数は（少なくとも形式的には）いつでも微分や積分ができること，にある（この後の節で学習する）．

> 冪級数の収束半径が何か，というのは重要な問題だから，教科書の節末問題やレポート問題でマスターすることを勧める．

3.3 冪級数で与えられる函数は正則函数（教科書 3.3 節）

（音声： 16:25 〜）

ここでは，**冪級数で定義された函数は，（その絶対収束域内で）解析函数である**という重要な性質を示す．なお，この節以降，教科書に倣って，級数の中心は $z = 0$ とする．より一般の $z = \alpha$ を中心とする級数は，$z' = z - \alpha$ と変数変換することで，$z' = 0$ 中心の級数にできるから，一般性は失わない．

定義 3.3.1 (ベキ級数で定義された函数) ゼロでない収束半径をもつ冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が与えられた時，この級数と（この級数の収束円内で）一致する函数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{3.3.1}$$

を，**この冪級数で表示（定義）された函数**という．また，上の (3.3.1) が成り立つ時，$f(z)$ **は冪級数** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ **に展開された**，ともいう．

これから，このような函数の性質を見て行こう．

まず，絶対収束する冪級数の原点での連続性について：

命題 3.3.2 (教科書の p.107, 定理 1) ベキ級数 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ で与えられた函数 $f(z)$ がゼロでない収束半径 R を持つとする．この函数は $z = 0$ にて連続である．

（注意）本当は，$|z| < R$ なる全ての z においても連続であるが，ここでは証明しない．

証明：

$$f(z) - f(0) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n \tag{3.3.2}$$

であるから，これが $|z| \to 0$ でゼロに行くことを示せば良い．

さて，定理 3.2.5 により，この右辺の級数は $0 < r < R$ なるすべての r でも絶対収束する．つまり

$$\sum_{n \geq 1} |a_n|\, r^n < \infty \tag{3.3.3}$$

が保証されている（この値を A と書こう）．そこで，問題の級数を $|z| < r$ の場合に

$$f(z) - f(0) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n = \sum_{n \geq 1} a_n\, r^n \left(\frac{z}{r}\right)^n \tag{3.3.4}$$

と書いてみると，その絶対値は

$$|f(z) - f(0)| \leq \sum_{n \geq 1} |a_n|\, r^n \left|\frac{z}{r}\right|^n \tag{3.3.5}$$

を満たすことがわかる．ところで，この最後の因子は，$n \geq 1$ だから $\left|\frac{z}{r}\right|^n \leq \frac{|z|}{r}$ を満たしている．つまり，(3.3.5) より

$$|f(z) - f(0)| \leq \sum_{n\geq 1} |a_n|\, r^n \left|\frac{z}{r}\right|^n \leq \Big(\sum_{n\geq 1} |a_n|\, r^n\Big) \times \frac{|z|}{r} = A \times \frac{|z|}{r} \tag{3.3.6}$$

を得る（A は (3.3.3) の左辺の和の値）．A は何か決まった有限の値だから，上の右辺は $z \to 0$ でゼロに行く．従って，左辺もゼロに行く． □

上の命題を用いて，函数の冪級数表示の一意性についての定理を証明する：

定理 3.3.3 (冪級数表示の一意性，教科書の p.107, 定理 2) 正の数 R があって，2 つの冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \tag{3.3.7}$$

が，共に $|z| < R$ で収束して値が等しい，つまり

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \qquad \text{for} \quad |z| < R \tag{3.3.8}$$

であるとする．この時，$n \geq 0$ に対して，$a_n = b_n$ である．
従って，ある函数 $f(z)$ が $|z| < R$ においてある冪級数で表示されるなら，その**冪級数表示は一意**である．

証明：
帰納法による．まず，$n = 0$ については，命題 3.3.2 を (3.3.7) の両辺に用いると，$z \to 0$ において，

$$a_0 = \lim_{z\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \lim_{z\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = b_0 \tag{3.3.9}$$

となって，$a_0 = b_0$ を得る．

次に，$N \geq 0$ として，$n \leq N$ までは $a_n = b_n$ が得られたとすると，(3.3.7) の両辺にて z^N 以下の項はキャンセルするから

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n z^n \tag{3.3.10}$$

が得られる．両辺を z^{N+1} で割って，$z \to 0$ とすると，$a_{N+1} = b_{N+1}$ を得る． □

さて，冪級数は，その収束円内では，かなり自由に演算ができる．まずは「項別の」和や積の定義を行う．

定義 3.3.4 (項別の和，項別の差，項別の積，項別微分，項別積分) 形式的に冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ が与えられたとする（これらの収束性などはここでは考えないので，以下はあくまで形式的な定義である）．このとき，以下の 2 つの級数を，$\sum_n a_n z^n$ と $\sum_n b_n z^n$ の**項別の和**および**項別の差**と呼ぶ．

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) z^n \tag{3.3.11}$$

また，二つの級数の形式的な積を z の冪乗の順で並べて和をとったもの，つまり

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k} \quad \text{を用いて定義した} \quad \sum_n c_n\, z^n \tag{3.3.12}$$

を，$\sum_n a_n z^n$ と $\sum_n b_n z^n$ の**項別の積**という．さらに，冪級数 $\sum_n a_n z^n$ の各項を形式的に微分積分したもの，つ

まり以下の級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n\, z^{n-1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \tag{3.3.13}$$

を，$\sum_n a_n z^n$ のそれぞれ**項別微分**，**項別積分**，という．

（注意）上の定義は形式的なものではあるが，どの段階で無限和を行うのか，注意が必要だ．(詳しくは以下の命題で.)

（音声： 30:10 〜）

「項別の」演算については，以下の性質がある．まず,「和」と「差」については：

命題 3.3.5 (教科書の p.108) 二つの冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ の収束半径をそれぞれ R_1, R_2 とし，これらは正とする．このとき，$R := \min\{R_1, R_2\}$ とおくと，$|z| < R$ で以下の級数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n \qquad \text{および} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)z^n \tag{3.3.14}$$

が絶対収束する．つまり，上の二つの級数の収束半径は少なくとも R 以上である．さらに，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \qquad \text{および} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \tag{3.3.15}$$

が成り立つ．

（注意）(3.3.15) は当たり前に見えるが，必ずしも当たり前ではなく，どの段階で無限和を行うかについての注意が必要だ．(3.3.15) の左辺では「まず係数 $a_n \pm b_n$ を作ってから n についての無限和をとって」いる．右辺では，先に n についての無限和を取って $\sum_n a_n z^n$ などを作ってから $\pm$ している．無限和の順序が違うので，これは必ずしも同じではない．例えばショウモナイ例だが,

$$a_n \equiv 1, \qquad b_n \equiv -1 \qquad (\text{すべての } n \text{ で}) \tag{3.3.16}$$

の場合，$|z| > 1$ なら，(3.3.15) 右辺の $\sum_n a_n z^n$ も $\sum_n b_n z^n$ も定義できない．しかし，左辺の $\sum_n (a_n + b_n)z^n = \sum_n 0 = 0$ は定義できる !!　なので，(3.3.15) が成立する自然な**十分条件**として「二つの級数の収束円の中に z がいる」ことが出てきている．

次に,「項別の積」については：

命題 3.3.6 (教科書の p.108) 二つの冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ の収束半径をそれぞれ R_1, R_2 とし，これらは正とする．このとき，$R := \min\{R_1, R_2\}$ とおくと，$|z| < R$ では (3.3.12) の級数が絶対収束し，

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{3.3.17}$$

が成り立つ．

要するに，2 つの級数の収束円の中では，普通に和，差，積を項別にやっても良いのだ．

（音声： 33:30 〜）

さて，ここまで冪級数をやってきたのは，主に，以下の重要な性質（**冪級数で定義された函数は複素函数の意味で微分可能**）のためだ．

定理 3.3.7 (教科書の p.108, 定理 3 および p.109, 定理 5) 冪級数 $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径を R とし，これは正とする．このとき，この級数を項別微分して作った級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n\, z^{n-1}$ の収束半径も R であり，さらに，$|z| < R$ では

$$\frac{df}{dz}(z) = \frac{d}{dz}\Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Bigr) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n\, z^{n-1} \tag{3.3.18}$$

が成り立つ．

特に，冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ で定義された函数は，その収束円の内部では**解析函数**になっている．

（注意）級数を定義する無限和をあらわに書くと，(3.3.18) は以下のようになる．

$$\frac{d}{dz}\Bigl(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\Bigr) = \lim_{N\to\infty}\Bigl(\sum_{n=1}^{N} a_n\, n\, z^{n-1}\Bigr) = \lim_{N\to\infty}\Bigl(\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{N} a_n\, z^n\Bigr) \tag{3.3.19}$$

つまり，冪級数の収束円内では,「無限和をとる極限」と「微分という極限」が交換できることを，上の命題は主張している．

証明：

野暮ったいけども $f(z)$ の微分を計算する．どの点での微分かを明らかにするため，$|\beta| < R$ なる β を固定し，ここでの微分を考える．また，$r := \{R - |\beta|\}/2$ と決めておく．こうすると，$|\beta - z| < r$ であることは $|z| < R$ も保証してくれるので，都合がよい．

導関数の定義， $\lim_{z\to\beta}\frac{f(z)-f(\beta)}{z-\beta}$ を計算しよう．ここで z は $|\beta - z| < r$ を満たすものだけを考える． z, β で級数が絶対収束しているから

$$f(z) - f(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(z^n - \beta^n) = (z-\beta)\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(z^{n-1} + z^{n-2}\beta + \ldots + \beta^{n-1}) \tag{3.3.20}$$

と書けるので，注目のニュートン商は綺麗に割り算できて，

$$\frac{f(z)-f(\beta)}{z-\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(z^{n-1} + z^{n-2}\beta + \ldots + \beta^{n-1}) \tag{3.3.21}$$

となる．ところが，この右辺の級数自身は，$|z| < R$ で絶対収束しており（第 n 項の大きさが $|a_n| \times nR^{n-1}$ よりも小さいから），よって $|z| < R$ では z の連続函数である．そこで特に $z \to \beta$ の極限では上のニュートン商は

$$\lim_{z\to\beta}\frac{f(z)-f(\beta)}{z-\beta} = \lim_{z\to\beta}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(z^{n-1} + z^{n-2}\beta + \ldots + \beta^{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, \beta^{n-1} \tag{3.3.22}$$

となる．つまり，$f(z)$ の $z = \beta$ における微分係数が計算でき，定理の主張通りになった．

このように，ちゃんと微分できることが示されたので，この冪級数で定義された函数は複素函数として微分可能，つまり正則函数である． □

項別積分についても同様である．証明もほぼ同様なので，講義ノートでは省略する．

命題 3.3.8 (教科書の p.109, 定理 4 +α) 冪級数 $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径を R とし，これは正とする．このとき，この級数を項別積分して作った級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ の収束半径も R であり，さらに，$|z| < R$ では

$$\int dz\, f(z) = \int dz \Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Bigr) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \tag{3.3.23}$$

が成り立つ．

（注意）級数を定義する無限和をあらわに書くと，(3.3.23) は以下のようになる．

$$\int dz \Bigl(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Bigr) = \lim_{N\to\infty} \Bigl(\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}\Bigr) = \lim_{N\to\infty} \Bigl(\int dz \sum_{n=0}^{N} a_n\, z^n\Bigr) \tag{3.3.24}$$

つまり，冪級数の収束円内では,「無限和をとる極限」と「積分という極限」が交換できることを，上の命題は主張している．

項別微分や項別積分の効用

項別微分や項別積分は，以下の意味で，**最強の**解析手段である．

高校以来みなさんが苦しめられてきたように，大抵の函数は「積分できない」(つまり，その不定積分を初等函数で表すことができない)．典型的な例は，e^{x^2} である．

このような函数を積分するには，基本的に数値的にやるしかない（＋あとで習う「留数」を使うと，特殊な場合にはできるが)．しかし，項別積分をやれば，限定された場面では，積分結果を冪級数の形で書くことが可能である．例えば e^{x^2} の例なら

$$\int_0^x e^{t^2}\, dt = \int_0^x \Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!}\Bigr) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \Bigl(\int_0^x \frac{t^{2n}}{n!}\, dt\Bigr) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)\, n!} \tag{3.3.25}$$

と求めることができる.(積分と無限和の交換は，和が絶対収束しているから許される：教科書の 3.5 節の，少し進んだ定理を用いると正当化できる.)

これは「e^{x^2} の不定積分は上の右辺の冪級数だ」という主張でもある．つまり，高校の範囲では「できなかった」不定積分が，冪級数の形とはいえ，求められたのだ！

このように,「よくわかってる函数では表現できない」未知の関数も，冪級数の形では表現できることが多い．この意味で，難しい方程式を解く場合などでも,「とりあえず冪級数展開」「とりあえず項別微分」「とりあえず項別積分」してみるのは，案外，有効である.(結果を盲信するのは危険だが，一旦やってみて，それなりに正しそうな結果が出たら，項別積分などが正当化できるかを考えれば良い.)

時間の関係で，この講義では，項別積分や級数表示について，これ以上は踏み込みにくいだろうが，これが非常に強力な解析手法であり，理学や工学の応用にも十分に役立つことは覚えておいてほしい.(ニュートン以来の 100 年くらいは，数学や物理の発展のかなりの部分は，この冪級数＋項別積分などの方法に負っていたとすら，いえないこともない.)