複素函数論（原）　第 7 回 (6/24)：冪級数

3 冪級数

いままで，故意に冪級数を扱うことを避けてきた．一つの理由は実変数の冪級数は（時間があれば）微積 AB でやってるはずであること[11]，もう一つの理由は複素函数論の流れを切りたくなかったこと，である．更にいえば，教科書の順番に従ったという理由もある．

Cauchy の積分公式なども出て，一段落したので，冪級数の問題に取り組もう．冪級数の方法を使うと複素函数論の世界がさらに拡がる．

3.1 数列と級数の一般論（教科書の 3.1 節）

以下，特に断らない限り，数列の各項は複素数とする．ただし，以下で見るように，複素数値でも実数値でも，それほど差はない．

以下，話の筋道として最初に厳密な議論を少し行なったが，時間などの関係から，この部分を理解することは要求しない．この節では最低限，級数の収束条件であるところの ratio test と root test （定理 3.1.13 と 3.1.14）を理解すればなんとかなる．

まずは高校でもやった数列から．

定義 3.1.1 (数列) 数列について以下のように定義する．

(1) 複素数が順序づけられて並んでいるもの数列 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ を**数列 (sequence)** という．

(2) 数列 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ は $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$，略して $(\alpha_n)_n$ と書くこともある．数列は普通は α_1 から始めるが，場合によっては $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ のように，α_0 から始めることもある．この授業でも，両方使うと思う．

(3) すべての α_j（$j = 1, 2, 3, \ldots$）が実数の時，**実数列**という．より一般に，α_j（$j = 1, 2, 3, \ldots$）が複素数の時，**複素数列**という．実数列も複素数列の一部である．

(4) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n := A$ となるような数 A が存在するとき，数列 $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ は**収束する**といい，A をこの数列の**極限（値）**という．

(5) 収束しない数列は**発散する**という．

なお，数列の収束の厳密な定義は以下の通りであるが，この定義を理解するにはかなりの時間と慣れを要するだろう．この定義が必要になるのは，厳密に証明を行う場合のみであるので，講義では極力，これは使わないで「大体の感じ」で進めることにする．

定義 3.1.2 数列 $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ と複素数 A に対して，<u>数列 (α_n) が $n \to \infty$ で A に収束する</u>，つまり $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = A$ というのは，以下の（ア）が成り立つことと定義する：

（ア）任意の（どんなに小さい）正の数 ϵ に対しても，適当な（大きい）実数 $N(\epsilon)$ を見つけて，

$$\text{すべての } n > N(\epsilon) \text{ で，} \quad \left|\alpha_n - A\right| < \epsilon \quad \text{とできる．} \tag{3.1.1}$$

（ア）は以下のように言っても良い．

[11] とはいえ，一年間の微積で扱うのは時間的にかなり苦しく，やらないクラスが大半だと思う

（アの言い換え）任意の（どんなに小さい）正の数 ϵ に対しても，

$$\text{すべての } n > N(\epsilon) \text{ で，} \quad \bigl|\alpha_n - A\bigr| < \epsilon \quad \text{が満たされる} \tag{3.1.2}$$

ような（十分に大きい）実数 $N(\epsilon)$ が存在する．

（ア）は数式では以下のように書く（これは数学科の講義ではないので，この書き方は以下では使わない）：

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) \qquad \Bigl(n > N(\epsilon) \implies \bigl|\alpha_n - A\bigr| < \epsilon \Bigr) \tag{3.1.3}$$

ともかく，すでに宣言した通り，上の定義 3.1.2 はほとんど使わない．ただし，興味のある人は，上の記述を読んで，さらに教科書などを調べれば良いと思う．僕自身の 2007 年ごろの数学科向けの微積の講義ノートには，かなり詳しく書いてある．

まあ，難しいことは一旦置いておいて，これから複素函数論に役立つ，級数の話をしよう．

まずは一般論として，複素数値の数列の収束を，その実部虚部で判定するための簡単な定理が以下である：

命題 3.1.3 (教科書の p.93，定理 1)
複素数値の数列 $(z_n)_n$ に対して，その実部と虚部をいつも通り $z_n = x_n + iy_n$ と書く．この時，

$$\lim_{n\to\infty} z_n = A = a + ib \qquad a, b \in \mathbb{R} \tag{3.1.4}$$

は，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{かつ} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b \tag{3.1.5}$$

と同値である．つまり，複素数値の数列の収束発散は，その実部と虚部の収束発散で判定できる．

この命題は，実部と虚部に分けて考えればほとんど当たり前なので，証明は略．

（音声： 8:23 〜）

以上を元にして,「級数」を考える．

定義 3.1.4 (級数) 級数について以下のように定義する．

(1) 数列 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ に対して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ を**級数 (series)** という．

(2) $\displaystyle S_n := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ を第 n 部分和という．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ が存在するとき，級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ は**収束する**という．また，$\displaystyle S := \lim_{n\to\infty} S_n$ を級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ の**和**といい，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = S$ と書く．数列の添字はなんでも良いから，これはもちろん，$\displaystyle S = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ とも同じことである．

(4) 収束しない級数は**発散する**という．

（注）

- 級数を考える場合，項を足して行く**順序が重要**である．実際，足して行く順序を変えると．級数の値が変わったり収束しなくなったり，などすることが多い.（ただし，絶対収束する級数は足して行く順序によらない．後の定理 3.1.12 などを参照.）

- このノートではところどころで $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ を $\displaystyle\sum_{n}\alpha_n$ と略記する．
- 数列と同様，級数の初項は普通は α_1 とするが，場合によっては，α_0 から始めて $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ のような和を考えることもある．
- 複素数列の収束発散がその実部虚部の収束発散で判定できたように，複素級数の収束発散も，その実部虚部の収束発散で判定できる（教科書 p.94, 定理 2）．ほぼアタリマエなのでわざわざこのノートには書かない．

定義から直ちにわかること 2 つ：

命題 3.1.5 (教科書の p.94, 定理 3)
(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ が収束するならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ である．
(2) 上の対偶を取ると，「$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ とならない数列 $(\alpha_n)_n$」に対しては，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ は発散する．

（注意）(1) の逆は必ずしも成り立たない．つまり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ でも，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ が収束しない例がたくさん存在する．

この命題の証明は簡単だから，各自でやってみてほしい．

命題 3.1.6 (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = S$ および $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n = T$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \pm \beta_n) = S \pm T$ である（複合同順）．
(2) c を複素数の定数とする．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = S$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(c\alpha_n) = cS$ である．

3.1.1 コーシーの判定条件（教科書 p.95）

（音声： 17:00 〜）

さて，我々が扱う数列や級数のうち，その極限の値が分かっているものは，正直，ほとんどない．大抵は，「極限の値がわからないけども，その数列や級数が収束するか否かを判定したい」場合がほとんどだ．今までやってきたことでは，このような場合の収束発散が判定できないことが非常に多い．

そのため，**極限の値が予想できない場合も含めて，一般の数列や級数が収束するのか発散するのかの判定条件**が欲しい．この問いに対する究極の答えが，これから述べる「コーシーの条件」である．この条件を理解することはそこそこ難しいと思われるが[12]，やはり重要なので，定義だけでも理解して欲しい．

まずは数列に対する「コーシーの条件」について述べよう．

定義 3.1.7 (コーシー列；教科書にはないが，これが基本) 数列 $(\alpha_n)_n$ が以下の性質を満たすとき，これを**コーシー列 (cauchy sequence)** という．

勝手に選んだ（小さい）$\epsilon > 0$ に対し，（十分大きな）整数 $N(\epsilon)$ がとれて，

$$\text{すべての } m, n \ge N(\epsilon) \text{ に対して} \quad \bigl|\alpha_m - \alpha_n\bigr| < \epsilon \quad \text{とできる} \tag{3.1.6}$$

[12] コーシー列という概念は ϵ-δ の次に待ち構えている，大学数学の鬼門である．ただし，この講義では時間の関係もあって深入りはしない

（注）上の定義の条件は，大雑把に書けば，

$$\lim_{m,n\to\infty} |\alpha_m - \alpha_n| = 0 \tag{3.1.7}$$

と同じことである．つまり，(3.1.7) を満たすような数列がコーシー列ということだ．ただし，(3.1.7) の書き方では，「この二重の極限 $\displaystyle\lim_{m,n\to\infty}$ が何を意味してるのか」があまり明確ではない．その意味がしっかりわかるためには，定義 3.1.7 のように書くのが良い．

コーシー列というものをわざわざ定義したのは，ひとえに次の定理のためだ．

定理 3.1.8 (コーシーの収束条件；教科書の p.95, 定理 4 の基本形) 数列 $(\alpha_n)_n$ が（何かの値に）収束することと，$(\alpha_n)_n$ がコーシー列であることは同値である．つまり，数列が**収束することの必要十分条件**は，その数列が**コーシー列であること**だ．

この小節の最初にも述べたように，この定理が威力を発揮するのは，**収束先がわかっていない数列**の場合である．この場合，収束先がわからないような数列を考えるのだから，収束先と α_n の差を計算する事はできない．それでも,「α_n と α_m の差（の m, n が無限大になった極限）を見て，この極限がゼロになること」が収束と同値だ，というのである．収束の必要十分条件を与えてくれるのだから，この定理は非常に強力，かつ重要なものである．

上の定理の証明はかなり大変なので略．

では，以上のコーシー列の知識を，級数に応用しよう．定義により，級数が収束するとは，その部分和の作る列 $S_n := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ が収束することだった．この数列 $S_1, S_2, S_3, \ldots$ に上の定理を用いると，以下の定理がすぐに得られる．数列に対する場合と同じく，この定理も級数の収束先の値がわからない時に真価を発揮する．

定理 3.1.9 (級数に対するコーシーの収束条件；教科書の p.95, 定理 4) 級数 $\sum_n \alpha_n$ が収束するための必要十分条件は，以下である：

勝手に選んだ（小さい）$\epsilon > 0$ に対し,（十分大きな）整数 $N(\epsilon)$ がとれて，

$$\text{すべての } m > n \ge N(\epsilon) \text{ に対して } \quad \Bigl|\sum_{k=n}^{m} \alpha_k\Bigr| < \epsilon \quad \text{とできる} \tag{3.1.8}$$

（注）上の条件は，大雑把に書けば

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty \\ m>n}} \Bigl(\sum_{k=n}^{m} \alpha_k\Bigr) = 0 \tag{3.1.9}$$

と同じだが，二重極限の解釈に注意を要するのは，数列の時と同じである．

3.1.2 絶対収束と条件収束（教科書 p.95）

（音声： 26:49 〜）

定義 3.1.10 (絶対収束) 級数 $\sum_n \alpha_n$ に対応して，和の中身を絶対値でおきかえた級数 $\sum_n |\alpha_n|$ を考える．

- 級数 $\sum_n |\alpha_n|$ が収束するとき，元の級数 $\sum_n \alpha_n$ は**絶対収束する**という．
- 級数 $\sum_n |\alpha_n|$ は発散するが，元の級数 $\sum_n \alpha_n$ は収束するとき，元の級数 $\sum_n \alpha_n$ は**条件収束する**という．

絶対収束と言った場合，あくまで元の級数 $\displaystyle\sum_n \alpha_n$ に対して言っているのである．ただし，絶対収束かどうかは，（定義に従って）絶対値をとった方の級数 $\displaystyle\sum_n |\alpha_n|$ で行う．ここのところ，ちょっと混乱しやすいかもしれないので注意．

わざわざこのような概念を定義したのは，以下の定理のためである：

定理 3.1.11 (教科書の p.95, 定理 5) 級数 $\displaystyle\sum_n \alpha_n$ の収束については，以下のような十分条件がある．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_n \alpha_n$ が絶対収束するなら，すなわち級数 $\displaystyle\sum_n |\alpha_n|$ が収束するなら，もとの級数 $\displaystyle\sum_n \alpha_n$ も収束する．

(2) すべての $n \geq 1$ に対して $|\alpha_n| \leq b_n$ となる実数列 $(b_n)_n$ があり，さらに，$\displaystyle\sum_n b_n$ が収束するなら，元の級数 $\displaystyle\sum_n \alpha_n$ も収束する．

上の定理は単なる十分条件ではあるが，符号が一定しない数を足している場合，その級数の収束判定に役立つことが多い．

また，絶対収束する級数については，和が無限ということを忘れて，あたかも普通の有限和のように扱って良い．（この性質のため，絶対収束する級数は大事なのだ．）これらの特に重要な性質をまとめておく：

定理 3.1.12 (絶対収束級数の性質) 以下が成り立つ．

- 級数 $\displaystyle\sum_n \alpha_n$ が絶対収束する，つまり，級数 $\displaystyle\sum_n |\alpha_n|$ が収束すると仮定する．この場合，$(\alpha_n)_n$ の順番を好き勝手に並び替えた数列を $(\beta_n)_n$ とすると，$\displaystyle\sum_n \alpha_n = \sum_n \beta_n$．つまり，級数の中で，**和をとって行く順序をいろいろと変えても答えは同じ**．
- 級数 $\displaystyle\sum_n \alpha_n$ と $\displaystyle\sum_n \beta_n$ が両方とも絶対収束すると仮定する．このとき，

$$\sum_{m,n} \alpha_m \beta_n = \left(\sum_n \alpha_n\right) \times \left(\sum_n \beta_n\right) \tag{3.1.10}$$

  が成り立つ．ここで左辺の m, n の和はどんな順序でとっても構わない．

上の定理の結論はアタリマエに見えるかもしれないが，絶対収束しない級数に対しては一般にはなりたたない．

なお，この定理の証明はそれほど簡単ではなく，ϵ-δ 論法を必要とする．教科書には上の定理そのものはなく，その簡易版（冪級数に特化したもの）が，p.108 にある．この講義でも，この定理の証明には立ち入らない．

3.1.3 ratio test と root test（教科書 p.96〜98）

（音声： 34:00 〜）

一般の級数が収束するための**十分条件**を二つ挙げておく．これらは，定理の条件が満たされていて判定できる場合には，大変に有用である．

定理 3.1.13 (ratio test, 教科書の p.96, 定理 7) 級数 $\sum_n z_n$ の収束について
(1) $q < 1$ なる数と（大きな）数 N があって，

$$n \geq N \quad \text{では} \quad \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leq q < 1 \tag{3.1.11}$$

となっているなら，級数 $\displaystyle\sum_n z_n$ は収束する．
(2) （大きな）数 N があって

$$n \geq N \quad \text{では} \quad \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \geq 1 \tag{3.1.12}$$

となっているなら，元の級数 $\displaystyle\sum_n z_n$ は発散する．

（証明のアイディア）きちんと証明するには，ϵ-N 論法を使うべきだが，それよりも大事なのは，大体の感じをつかむことだ．(1) の方だけ証明の概要を説明する．（もちろん，教科書にも載っているが．）

問題としている数列（級数）は，その極限（和）の具体的値はわからない．だから，「極限の値がわからないけど収束が言える」方法を用いるしかない．すでに言ったように，その場合の最強の方法は「コーシー列」を用いる定理 3.1.8 であるから，それを使う．

数式を明確に書くために，問題の級数の部分和を，これまで通り

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} z_k \tag{3.1.13}$$

と書く．この S_n の極限の存在を示したいので，「$(S_n)_n$ がコーシー列である」といえば良い．これは大雑把にいうと

$$\lim_{m,n\to\infty} |S_m - S_n| = 0 \tag{3.1.14}$$

ということだった．なので，これを示すことが目標となる．なお，$m > n$ として上の極限を考えても良いので，以下，そうする（$m < n$ の場合は m, n の役割を取り替えたら同じことだから）．

$m = \ell + n$ と書くと，上の目標は

$$\lim_{\ell,n\to\infty} \bigl| S_{n+\ell} - S_n \bigr| = 0 \tag{3.1.15}$$

と同じことである．なので，以下，$S_{n+\ell} - S_n$ を考えて行く．

S の定義から，

$$S_{n+\ell} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+\ell} z_k \tag{3.1.16}$$

であるので，この右辺を考えたら良い．

(1) (3.2.6) の条件を用いると，$L > 0$ に対して，

$$\left|\frac{z_{N+L}}{z_N}\right| = \left|\frac{z_{N+L}}{z_{N+L-1}}\right| \times \left|\frac{z_{N+L-1}}{z_{N+L-2}}\right| \times \cdots \times \left|\frac{z_{N+2}}{z_{N+1}}\right| \times \left|\frac{z_{N+1}}{z_N}\right| \leq q^L \tag{3.1.17}$$

が得られる．つまり，$|z_N|$ を基準として，$|z_{N+L}|$ を，

$$|z_{N+L}| \leq q^L \times |z_N| \qquad \text{または} \qquad k > N \quad \text{の時に} \quad |z_k| \leq q^{k-N} \times |z_N| \tag{3.1.18}$$

のように抑え込むことができる．ここで大事なのは $|z_N|$ は（大きいかもしれないが）「題意の N から決まる，有限の値である」ということだ．

これを，以下の三角不等式の帰結

$$\bigl|S_{n+\ell}-S_n\bigr| = \Bigl|\sum_{k=n+1}^{n+\ell} z_k\Bigr| \le \sum_{k=n+1}^{n+\ell} |z_k| \tag{3.1.19}$$

と組み合わせると，$n > N$ ならば，

$$\bigl|S_{n+\ell}-S_n\bigr| \le \sum_{k=n+1}^{n+\ell} q^{k-N} \times |z_N| = |z_N| \times \sum_{k=n+1}^{n+\ell} q^{k-N} < |z_N| \times \sum_{k=n+1}^{\infty} q^{k-N} = |z_N| \times \frac{q^{n+1-N}}{1-q} \tag{3.1.20}$$

を得る．これは $n \to \infty$ でゼロに行くから，$(S_n)_n$ はコーシー列だ！ □

上の証明の要点は (3.1.18) である．ratio test の条件は，大雑把に言って，「$|z_n|$ が等比数列のようなものだ」と主張している．等比級数（公比が 1 より小）が収束することが証明の背景にある．

もう一つ，判定法がある．

定理 3.1.14 (root test, 教科書の p.98, 定理 9) 級数 $\sum_n z_n$ の収束について
(1) $q < 1$ なる数と（大きな）数 N があって，

$$n \ge N \quad \text{では} \quad \sqrt[n]{|z_n|} \le q < 1 \tag{3.1.21}$$

となっているなら，級数 $\displaystyle\sum_n z_n$ は収束する．

(2) 「無限個の n に対して $\sqrt[n]{|z_n|} \ge 1$ 」となっているなら，元の級数 $\displaystyle\sum_n z_n$ は発散する．

こちらも証明はほぼ同じ（教科書にもある）ので省略する．今度の場合も，ratio test の条件から (3.1.18) のような条件が出て，ratio test と同じように証明される．

教科書には ratio test として，定理 7 と定理 8 が紹介されている．同様に，root test として，定理 9 と定理 10 が紹介されている．これらの定理の関係は，もちろん,「定理 7 の方が定理 8 より強力」「定理 9 の方が定理 10 より強力」ということである．

つまり，定理 8 を使うには，

$\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ が存在し，かつ極限が 1 より小さい

ことが必要である．しかし定理 7 なら，

この極限が存在しない（例えば振動し続ける）場合でも，この比が 1 より小さい

ならば使えるのだ．