

複素函数論 (原) 第 6 回 (6/17): Cauchy の積分公式と, その帰結 (教科書 2.3, 2.4 節)

(前置き) 前回, 今回あたりから, 説明の時間が少し短めになるかもしれない. その主な理由は, この辺りは大変に重要で, みなさんに**良く内容を理解するための時間を取り, かつ教科書の節末問題などをしっかりやってほしい**からだ. 特に, 節末問題の奇数番号のは教科書に答えが載っているものが多いから, ぜひ, やってほしい. それらの自習時間を考えると, あまり速く進むのはよくないだろうから, ゆっくり目のペースにした. そのため, 自然と説明時間が短くなっている.

2.2.2 不定積分 (原始函数) の存在¹⁰

前回, 少しごまかしながら, 不定積分の存在を「証明」「説明」し, それを線積分の計算に用いた (講義ノートの pp.27-28). コーシーの積分定理をやったので, これを証明できる.

ただ, この証明は教科書の p.75 にしっかり書いてあるし, 今日はこちらよりも「コーシーの積分公式とその結果」に力を入れたい. ということで, この部分はみなさんの自習に任せることとする.

(今学期は, かなりの部分, 教科書に準拠して進んでいるから, このようなところがすこしあっても大丈夫でしょう.)

2.3 Cauchy の積分公式 (教科書の 2.3 節)

(音声: 3:05 ~)

前節の Cauchy の積分定理は複素解析の基礎の基礎である. この節では積分定理から導かれる色々な面白い性質 (特に Cauchy の積分公式) を学ぶ.

まず「Cauchy の積分公式」を述べる. 「積分定理」と「積分公式」は似てるけども違うものだから, 注意しよう (名前はどうでも良いが, 「重要な定理が 2 つある」ことは定理の内容も含めて押さえておこう).

定理 2.3.1 (Cauchy の積分公式: 教科書の p.79, 定理 1)

単純閉曲線 γ の内部と周をふくむような領域で正則な $f(z)$, および γ の内部の点 α に対し (γ は α の周りを反時計回りに回っているものとする),

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz \quad (2.3.1)$$

が成り立つ.

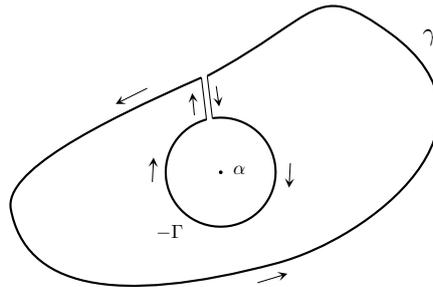
(注意)

- この定理の主張も, なかなかすごい! 定理の成り立つ状況の下では, 閉曲線 γ の内部の点 α での函数の値 $f(\alpha)$ が, その周囲での値 $f(z)$ を用いた積分 (ある種の平均のようなもの) で書ける, というのである. つまり, **閉曲線上での函数の値を決めると, その内部での函数の値が決まってしまう!**
- γ の向きは非常に重要だ. もし, γ が「時計回り」なら, 上の (2.3.1) の右辺にはマイナスがつく. これは応用上, よく忘れがちだから, 注意すること.

証明:

非積分函数 $g(z) := \frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{z - \alpha}$ は C の中では $z = \alpha$ 以外では正則である. 従って $z = \alpha$ を中心に小さな円を書いて (これを $-\Gamma$ とした; Γ の向きは反時計回り, $-\Gamma$ の向きは図のように時計回り), 図のように γ と Γ を細い道でつなぐ.

¹⁰教科書の p.75



全体の閉曲線の内側では g が正則であるから、この閉曲線全体に沿っての (矢印の向きの) 線積分はゼロだ。つまり

$$\int_{\text{閉曲線全体}} g(z) dz = 0 \tag{2.3.2}$$

である。ところが細い道の部分の線積分は互いに向きが逆なので相殺し、結局

$$0 = \int_{\text{閉曲線全体}} g(z) dz = \int_{\gamma} g(z) dz - \int_{\Gamma} g(z) dz \tag{2.3.3}$$

つまり

$$\int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\Gamma} g(z) dz \tag{2.3.4}$$

を得る (既に述べたように Γ の向きは反時計回り)。あとは右辺を計算して、これが $f(\alpha)$ に等しくなることを示せば良い。

そのためには、 Γ の半径を無限小にした極限を考える。この場合、 $g(z)$ の定義中、分子の $f(z)$ は (f の連続性のおかげで) $f(\alpha)$ と思ってよい。よって、

$$\int_{\Gamma} g(z) dz = \frac{f(\alpha)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - \alpha} \rightarrow \frac{f(\alpha)}{2\pi i} \times 2\pi i = f(\alpha) \tag{2.3.5}$$

となる。最後のところでは、 $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - \alpha} = 2\pi i$ を用いた。この式は、 Γ をパラメーター表示して計算すれば確かめられる (教科書にも載ってるので、各自チェック)。□

コーシーの積分公式を用いると、大変に面白く有益な定理がどんどん証明される (以下でたくさん学ぶ)。しかし、そこに行く前に、**コーシーの積分公式は、ある種の線積分の計算に使える** ことを強調しておきたい。

すなわち、コーシーの積分公式の $2\pi i$ の分母を払うと

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz = 2\pi i \times f(\alpha) \tag{2.3.6}$$

となるが、これは「左辺の積分の値が右辺の $2\pi i f(\alpha)$ と計算できる」式ともみなせる。これは時折、役に立つ (レポート問題でも出題予定)。

もちろん、これが成り立つことが保証されているのは、「定理の条件を満たしている γ と f 」であることは忘れてはならない。いくつかの例が教科書の p.80-81 にあるから、各自で見しておくこと。

2.4 一回微分できたら何回でも微分可能! (教科書の 2.4 節)

(音声: 16:55 ~)

コーシーの積分定理や積分公式から, 複素関数論の様々な定理が導かれる. なかなか面白いものばかりなので, 楽しもう.

定理 2.4.1 (一回微分可能なら無限回微分可能 — Goursat ; 教科書の p.84, 定理 1) ある領域 D で正則な関数は D で無限回微分可能である. 当然, 正則関数の導関数も正則である. 更に表式

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz \tag{2.4.1}$$

が成り立つ. ここで γ は D 内にあって α を反時計回りに囲む単純閉曲線.

これは物凄い結果である. 実関数では f が微分可能でも f' はそうとは限らなかった (連続ですらない可能性もある). しかし, 微分可能な複素関数ではそれが保証されているのだ!

証明:

厳密なことを言わなければ簡単かつ直感的であるので, まずはこの「厳密でないバージョン」だけでも理解しよう. まず, コーシーの積分公式を書く:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz \tag{2.4.2}$$

この両辺を α で微分する. 左辺はもちろん, $f'(\alpha)$ になる. 右辺は, そのまま書くと

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\alpha} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz \tag{2.4.3}$$

となる. 数学的に厳密に考えると, ここでハタと困ってしまうが, あまり気にしないなら, **積分と微分の順序を変えてみたく**なるだろう. つまり, 本来は以下の左辺の通り, 「 z で積分した結果全体を α で微分」なのだが, これを「積分の中身を先に α で微分して, あとから z で積分」とするのだ:

$$(\text{??}) \quad \frac{d}{d\alpha} \left(\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz \right) = \int_{\gamma} \left(\frac{d}{d\alpha} \frac{f(z)}{z-\alpha} \right) dz \quad (\text{??}) \tag{2.4.4}$$

もしこれが許されるなら, この右辺は簡単に計算できて

$$= \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2} dz \tag{2.4.5}$$

である. 以上まとめると,

$$(\text{??}) \quad f'(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2} dz \quad (\text{??}) \tag{2.4.6}$$

という式が得られた.

同じノリでもう一回微分すると

$$(\text{??}) \quad f''(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{d}{d\alpha} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2} \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{2f(z)}{(z-\alpha)^3} dz \quad (\text{??}) \tag{2.4.7}$$

となる. これを繰り返すと, 正当性には疑問がつくものの, 一般の n で (2.4.1) が「証明」される.

みなさんとはもかく, 上の, 数学的にはええ加減な, 「証明」を理解すべきだ.

(数学的事実) Cauchy の積分公式 (2.3.1) において**積分は絶対収束**していること, および α は積分には**パラメータの形で入っている** (積分変数とは無関係) ことに注意する. このような場合, まさに上でやったように, z での積分と α での微分の順序を交換することができる (数学の定理; 「積分下の微分」).

では「積分下の微分」をどうやって証明するか, であるが, もしかしたら 1 年の微積分でやったかもしれない. やっていない場合には, 教科書のこの定理の証明 (p.84-85) に任せよう. □

コーシーの積分定理のところと同様, この (2.4.1) も, 積分の計算に使える. つまり, (2.4.1) を

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(\alpha) \quad (2.4.8)$$

と書けば, 「左辺の積分を, 右辺の f の微分の値で書く」式になる. これもレポート問題として出題予定. 教科書の p.86 にも類題がある.

(音声: 28:20 ~)

これから, 「実際の積分計算にはあまり役に立たないだろうが, 複素関数の性質として非常に面白い」いくつかの定理を紹介する.

以下の定理は, ある意味, コーシーの積分定理の「逆」に相当する.

定理 2.4.2 (Morera; 教科書の p.87, 定理 3) 複素関数 f が (i) 領域 D で連続で, (ii) 周およびその内部が D に含まれるような任意の長方形 \square に対して

$$\int_{\partial\square} f(z) dz = 0 \quad (2.4.9)$$

を満たすならば, f は D で正則である.

ついでに, 積分公式からすぐにできることを:

命題 2.4.3 (Cauchy の評価) 整関数 $f(z)$ の $|z-\alpha|=r$ 上での最大値を $M(r)$ と書くと,

$$|f^{(n)}(\alpha)| \leq \frac{n!}{r^n} M(r) \quad (2.4.10)$$

証明:

積分公式 (2.4.1) をそのまま評価せよ (被積分関数の絶対値の最大値をとる). □

次の定理には少しこだわりたい.

定理 2.4.4 (Liouville; 教科書の p.87, 定理 2) 複素平面全体で有界な整関数は定数である.

僕はこの定理もなかなか凄いと思う. 「微分可能性」は局所的な性質だ ($z=\alpha$ で微分できるかどうかは, $z=\alpha$ のごく近くだけ見れば判定できる). にも関わらず, 「すべての z で微分可能」を要求すると, 「 $|f(z)|$ はどこかで無限大になる必要がある」という, 大局的な性質が言えてしまうのだ. この定理を知って数十年経つが, 未だに直感がわからない...

証明:

Goursat の公式の一階微分の場合を書くと,

$$f^{(1)}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=r} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2} dz \quad (2.4.11)$$

である. 複素平面全体で有界なので, その最大値を M とすると, 上の積分は簡単に評価できて,

$$|f^{(1)}(\alpha)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^2} 2\pi r = \frac{M}{r} \quad (2.4.12)$$

となるが, r は任意だから特に $r \rightarrow \infty$ とすると $f^{(1)}(\alpha) = 0$ を得る. 微分がゼロだから, $f(z)$ は定数 □

ついでに、この付近の定理を用いると証明できる、重要な定理を2つほど挙げておく。

定理 2.4.5 (代数学の基本定理) n -次多項式 $P(z)$ は重複度も含めて丁度 n 個の根をもつ。

(用語) $P(z) = 0$ となる z のことを $P(z)$ の根と言います。要するに、「方程式 $P(z) = 0$ の解」のことです。

この定理の結論は、みなさん、なんとなく知ってるのではないかな?(多項式の因数分解とか考えると、大体こうなりそうな気がするでしょ?)。

けどちゃんと証明できるかは別問題だ。以下の証明は明確で、複素函数論を使っていて面白いから収録した。

証明:

多項式の次数 n についての帰納法を使う。

$n = 1, 2$ は中学高校以来知ってるから O.K. だよな。

$(n-1)$ まで示せたとして、 n をやろう。ともかく、 $P(z)$ が少なくとも一つ根を持つことを言えばよい。(そして、後は因数分解で残りが $(n-1)$ 次の多項式になるから、帰納法の仮定に持ち込める。)

このために、**背理法**を使う。 $P(z)$ の根が全くないと仮定する。すると、 $1/P(z)$ は複素平面全体で解析的である。更に、これは有界でもある。(なぜなら、 $P(z)$ の次数が n だから、 $1/P(z)$ は $|z| \rightarrow \infty$ でゼロに行く。)ところが、上の Liouville の定理を $1/P(z)$ に用いると、 $1/P(z)$ は定数しかないという結論になる。これはもちろん、 $P(z)$ が3次以上の多項式であることに矛盾。よって、 $P(z)$ の根は少なくとも一つある。□

以下の定理は、複素函数の理論的解析に時々使われるが、この授業ではあまり活かすチャンスがないだろう。

定理 2.4.6 (最大値の原理) 領域 D で正則な函数 f に対し $M \equiv \sup_{z \in D} |f(z)|$ とおく。もし、 $|f(\alpha)| = M$ なる $\alpha \in D$ が存在するならば、 f は定数である。(別の言い方: 定数でなければ、 $|f(z)|$ の最大値は縁のところをとる。)

証明:

領域 D 内におさまるように α を囲む小円を書いて、この円上での積分公式を考える。

$$M = |f(\alpha)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z - \alpha} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta |f(\alpha + re^{i\theta})| \quad (2.4.13)$$

非積分函数の最大値も M だから、上の不等式が成り立つためには、非積分函数が全て M でないといけない(注: 整函数だから $|f|$ は連続、結局全ての点で M)。よって、この円周上で $|f(z)| \equiv M$ となった。

同じことをいろんな α といろんな半径の小円で繰り返していくと、結局、 D 内のすべての点 α で、全て $|f(z)| \equiv M$ 、つまり定数となってしまう。よって、以前の命題 1.4.5 より、 $f(z)$ も定数。□