複素函数論（原）　第 5 回：複素積分の続き　＋　Cauchy の積分定理

（少し補足）以上で一般の曲線についての線積分を定義し，また曲線が滑らかの場合には命題 2.1.3 が成り立つことも示した．より一般の（滑らかとは限らない）曲線についてどうかを考えると，以下のようになる．

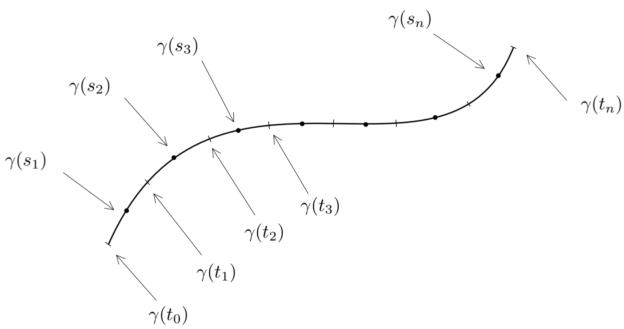
まず，**曲線の長さ，長さの定義できる曲線**を定義する．

定義 2.1.4 (曲線の長さなど)　• 複素平面での曲線 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ に対し，その長さを

$$\sup \sum_{j=1}^{n} \bigl| \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \bigr| \tag{2.1.7}$$

で定義する（下の図を参照）．ここで $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ は $[a, b]$ を任意に n 個の区間に分けたもので，sup はこのようなすべての分け方とすべての $n > 0$ についてとる．

• 上の「長さ」が有限の時，γ は**求長可能 (rectifiable)** と言う．



結論は：

定理 2.1.5 求長可能な曲線 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ と連続な $f(z)$ については，定義 2.1.2 のようにすると線積分が定義できる．

この定理の証明はかなり大変なので，この講義では省略．

（音声：6:28 〜）

以上が線積分の定義である．以下，線積分の基本的な性質を列挙する．

線形性： $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ と連続函数 f, g に対して

$$\int_\gamma \bigl\{ \alpha f(z) + \beta g(z) \bigr\} dz = \alpha \int_\gamma f(z)\, dz + \beta \int_\gamma g(z)\, dz \tag{2.1.8}$$

曲線の和： 曲線 γ_1, γ_2 をこの順につないで出来る曲線を $\gamma_1 + \gamma_2$ と書くと，

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz \tag{2.1.9}$$

不等式： 曲線 γ 上で $|f(z)| \le M$，かつ曲線 γ の長さが L ならば，

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \le ML \tag{2.1.10}$$

曲線のパラメーター付けに関する不変性： 与えられた曲線を $\gamma(t)$ と表す方法はいろいろあるが，線積分の定義はこれらのパラメーター付けによらない．これは，積分の変数変換として理解できる．

（音声： 10:40 〜）

複素積分の求め方その 2：不定積分の利用

前回は，複素積分の定義を述べ，その計算方法（積分路をパラメーター表示して積分）を述べた．この方法は，教科書では pp.65-67 辺りに「道の表示の利用」として説明されているものだ．

しかし，被積分函数が特殊な場合，特に被積分函数の原始函数（不定積分）が求まる場合には，複素積分を簡単に求めることができる（教科書では pp.64-65 で説明されている）．これは重要なので，以下で詳しく説明する．

考える状況は，これまでと同じである：複素函数 $f(z)$ と曲線 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ があって，複素積分 $\int_\gamma f(z)\,dz$ を計算したい．ただし，簡単のため，曲線 γ は滑らかだとしておこう．つまり，前回やったことにより

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f\bigl(\gamma(t)\bigr)\,\gamma'(t)\,dt \tag{2.1.11}$$

と書ける場合を考える．一般の $f(z)$ に対してはこれ以上どうすることもできないが，ここで，仮に，「ある複素函数 $F(z)$ があって，その複素函数としての微分が $f(z)$ である」場合を考えよう．つまり，f と F は

$$F'(z) = f(z), \qquad \text{つまり} \qquad \frac{d}{dz}F(z) = f(z) \tag{2.1.12}$$

の関係をみたしているのだ（F' はもちろん，F の導函数）．

この場合に，上の線積分がどうなるかを考えたい．この関係を (2.1.11) に入れてみると

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b F'\bigl(\gamma(t)\bigr)\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \frac{dF}{dz}\bigl(\gamma(t)\bigr)\,\frac{d\gamma}{dt}(t)\,dt \tag{2.1.13}$$

となる．ところが，この被積分函数をよくみると，これは $F\bigl(\gamma(t)\bigr)$ を t で微分したものの形をしている．実際，合成函数の微分を用いてやってみると，

$$\frac{d}{dt}F\bigl(\gamma(t)\bigr) = \frac{d}{d\gamma}F(\gamma)\,\frac{d\gamma}{dt} \tag{2.1.14}$$

となる．したがって問題の積分は

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b \frac{dF}{dz}\bigl(\gamma(t)\bigr)\,\frac{d\gamma}{dt}(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}F\bigl(\gamma(t)\bigr)\,dt \tag{2.1.15}$$

となるが，右辺の形なら，「微分したものをまた積分」してるから，普通に積分して

$$= \Bigl[F\bigl(\gamma(t)\bigr)\Bigr]_a^b = F\bigl(\gamma(b)\bigr) - F\bigl(\gamma(a)\bigr) \tag{2.1.16}$$

と**なりそう**だ[7]．

以上をまとめておこう（ただし，上で誤魔化したところも補って書く）．

> **命題 2.1.6 (教科書の p.64, 定理 1)** 複素函数 $f(z)$ が**単連結領域** D において正則とし，さらに $F'(z) = f(z)$ となる $F(z)$ が存在するものとする．D 内にある滑らかな曲線 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ については，$f(z)$ の線積分が以下のように簡単になる：
>
> $$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\beta) - F(\alpha). \tag{2.1.17}$$
>
> ここで $\alpha = \gamma(a)$ と $\beta = \gamma(b)$ は曲線 γ の始点と終点である．

（注意）**単連結**な領域 (simply connected region) とは，「穴が空いてない」というイメージである（教科書にはもっときちんとした数学的定義が書いてあるが，イメージで考えればまあ十分）．下図に例を載せた．左右とも，影をつけた部分が問題の領域である．左の領域は穴が空いてないので単連結，右の例は穴が 2 つも空いてるので単連結ではない．

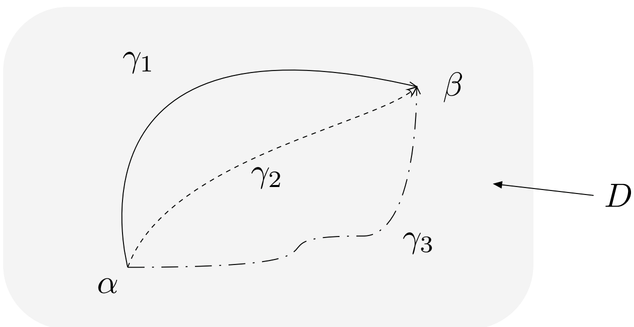
[7]「なりそう」というのは，ここでは誤魔化したのだが，曲線 γ と $f(z)$ が正則である領域に関して，これまでに**隠してきた条件が本当は必要**だからだ．この事情から，教科書では以下の定理の証明は 2.2 節に先延ばししてある

より一般に,「穴が n 個空いてる」のを $(n+1)$-重連結という．上図の右は穴が二つだから 3 重連結である．左は単連結だが,「単」= single と思えば 1 重連結というわけで,「$(n+1)$-重連結」の $n=0$ の場合の言葉遣いに合っている．

領域の単連結性に関する注意

この講義ではあまりややこしいことを言いたくないので，**考えている領域が単連結でない場合**はなんとなく無視することが多い．しかし，これから学んでいく色々な定理は，考えている領域が単連結でない場合には，成り立たなかったり，形が変わったりすることが多い．教科書にはそのような場合も詳しく載っているから，できるだけ目を通しておくことが望ましい．(それが無理でも，将来，複素函数論を用いる場合には「**単連結か否か**が問題だった」ことを思い出すようにしよう．ここは盲点なので，注意しておかないと足を救われる可能性がある．)

ともかく，命題 2.1.6 に戻ろう．この命題はなかなか凄いことを言っている．命題の状況の下では,「線積分の値は，**曲線の始点と終点のみで決まり**，曲線がどのように繋がってるかには関係ない」のだ．下図の例なら，α から β に行く曲線が 3 つ $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_2)$ 描いてあるが，どれに沿っての線積分も同じ値になる（図の影をつけたところが領域 D のつもり）．



また，そうであるから，線積分の値を求める際にも,（もし $f(z)$ の原始函数 $F(z)$ がわかるなら）曲線のパラメーター表示を使う必要もない．

与えられた $f(z)$ の原始函数 $F(z)$ を求めるのは，高校からやってるから[8]，非常にありがたい命題だということができる．

ただし，この命題は，あくまで「$f(z)$ の原始函数 $F(z)$」が求まらないと使えない．そして高校の時から知ってるように，原始函数が求められるような $f(z)$ はそれほど多くはない．この意味では，この命題には限界があり，やはり積分路のパラメーター表示（や，これからやるコーシーの定理，留数など）をもちいて計算しなければならないことが多い．

ともかく，現時点での複素積分の計算方法は以下の二つである：

- 曲線のパラメーター表示を用いて，地道に計算する
- $f(z)$ の原始函数 $F(z)$ がもとまる場合は，上のように $F(\beta)-F(\alpha)$ として計算する

どちらもそれほど簡単ではない．この後，もっと格好の良い（実用的にも役に立つ）方法を学んでいく．

[8]高校では実数函数 $f(x)$ の原始函数 $F(x)$ を求めたが，これができれば複素数の時も同じである

2.2 Cauchy の積分定理（教科書の 2.2 節）

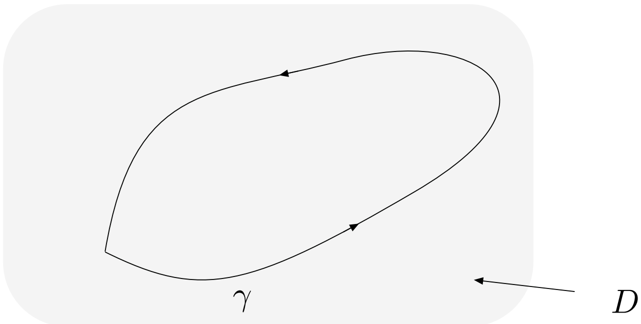
（音声： 30:35 〜）

この節では，Cauchy の積分定理を述べ，証明しよう．この定理は，複素函数論の基礎の基礎の大定理だ．

定理 2.2.1 (Cauchy の積分定理：教科書の p.71, 定理 1) $\mathbb{C}$ 内の単連結領域 D で定義された正則函数 f がある．また，D 内の単純閉曲線 γ がある．この時，

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \tag{2.2.1}$$

が成り立つ．もちろん，上の積分は，前節で定義した「複素線積分」である．



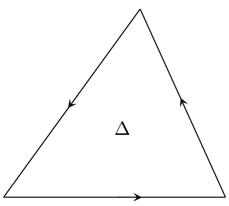
この定理は，複素函数論でこれから習うことの大半は，この定理の応用と言っても過言ではないくらいの重要な定理である．前節で,「ある特定の条件の下では，線積分の値が曲線の始点と終点だけで決まる」ことを見たが，それの大幅な一般化になっている（定理の仮定が，実質的に f の正則性だけというのが凄い）．

その応用については順次見ていくこととし，まずは証明を見よう．この講義では証明はあまりやらないが，この定理は非常に重要である上に証明も興味深いので，例外的に概要を説明する．

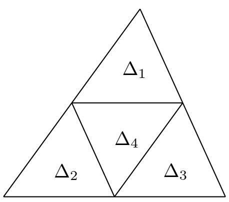
定理 2.2.1 の証明

証明は何段階かに分けて行う．

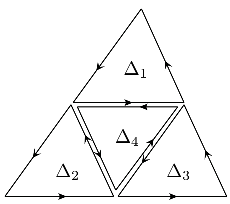
Step 1. γ が三角形の場合に証明すれば十分であることにまず注意しておく．なぜなら，(i) 線積分の性質から，任意の γ についての積分は γ を近似する折れ線についての積分で証明すればよい．(ii) 更に，折れ線で囲まれた多角形は三角形に分割できる．だから分割した三角形についての積分がゼロなら十分である．従って，以下では γ が三角形の場合にのみ証明する．



The rectangle Δ



Divide Δ into 4 Δ's



Orientation of each trianle

Step 2. これから区間縮小法を用いて，$\displaystyle\int_\Delta f(z)dz = 0$ を示す（Goursat, Pringsheim）．まず，三角形 Δ をそれぞれの辺の中点で区切って合同な三角形 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ に 4 分割する．それぞれの三角形での線積分の向きを同じにとると，

$$\int_\Delta f(z)dz = \int_{\Delta_1} f(z)dz + \int_{\Delta_2} f(z)dz + \int_{\Delta_3} f(z)dz + \int_{\Delta_4} f(z)dz \tag{2.2.2}$$

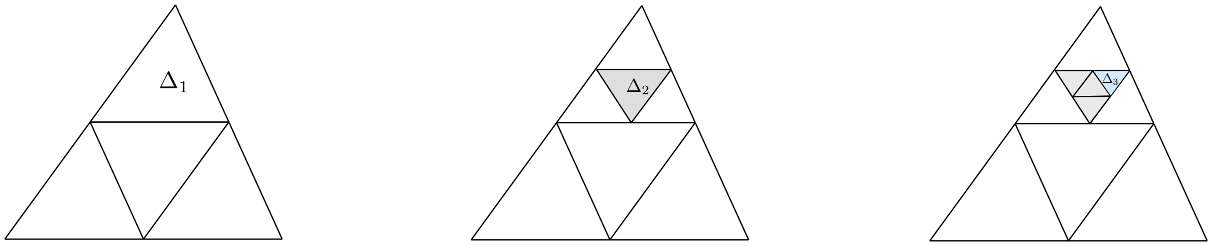
である．これから

$$M := \left|\int_{\Delta} f(z)dz\right| \le \left|\int_{\Delta_1} f(z)dz\right| + \left|\int_{\Delta_2} f(z)dz\right| + \left|\int_{\Delta_3} f(z)dz\right| + \left|\int_{\Delta_4} f(z)dz\right| \tag{2.2.3}$$

となるので，右辺の 4 つの絶対値の最大値を与える三角形を改めて Δ_1 と書くと，

$$M \le 4\left|\int_{\Delta_1} f(z)dz\right| \tag{2.2.4}$$

を得る．



今度は Δ_1 を更に 4 分割し，分割したものの中で最大の寄与を与えるものを Δ_2 とすると（この Δ_2 はこれまでの Δ_2 とは異なる；図を参照）

$$\left|\int_{\Delta_1} f(z)dz\right| \le 4\left|\int_{\Delta_2} f(z)dz\right|, \qquad \text{つまり} \quad M \le 4^2\left|\int_{\Delta_2} f(z)dz\right| \tag{2.2.5}$$

を得る．これを n 回くり返すと

$$M \le 4^n\left|\int_{\Delta_n} f(z)dz\right| \tag{2.2.6}$$

となる．

Step 3. さて，n を大きくする極限を考える．分割されてできた三角形 Δ_n の大きさは 2^{-n} のように小さくなって行くので，最終的には「最大の寄与を与える三角形 Δ_n」は Δ の内部（または境界）の一点に収束して行くはずだ．その行先を α と書くことにしよう．

Step 4. この α は D の内点であり，f は D で正則である．微分可能性の仮定から

$$f'(\alpha) = \lim_{z\to\alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} \tag{2.2.7}$$

が存在する；よって，α の近傍では

$$f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z - \alpha) + o(z - \alpha) \tag{2.2.8}$$

が成立している．ここで $o(z - a)$ とは，

$$\lim_{z\to\alpha} \frac{o(z-\alpha)}{z-\alpha} = 0 \tag{2.2.9}$$

となるような，高次の項．

Step 5. 4 分割の n を十分に大きくとって，Δ_n の周囲と内部では (2.2.8) が成り立つようにしてやろう．すると，

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_n} f(z)dz &= \int_{\Delta_n} \big\{f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + o(z-\alpha)\big\}dz \\ &= \int_{\Delta_n} f(\alpha)dz + \int_{\Delta_n} f'(\alpha)(z-\alpha)dz + \int_{\Delta_n} o(z-\alpha)dz \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

となる．ところが右辺の初めの 2 項の線積分はゼロ（確かめよ；被積分函数は第 1 項は定数，第 2 項は z の 1 次函数であることが効いている）．更に，最後の線積分は三角形の一辺の長さが 2^{-n} のオーダーなので

$$\left|\int_{\Delta_n} o(z-\alpha)dz\right| \le O(2^{-n}) \times o(2^{-n}) = o(4^{-n}) \tag{2.2.11}$$

を満たす．つまり (2.2.10) から

$$\left|\int_{\Delta_n} f(z)dz\right| = o(4^{-n}). \tag{2.2.12}$$

これと (2.2.6) から

$$M \le 4^n \times o(4^{-n}) = o(1) \tag{2.2.13}$$

となり，$n \to \infty$ でこの量はゼロに行く．つまり $M = 0$． □

なんとなく騙されたような気がしないでもないが，非常に美しい証明だ．

2.2.1 解析函数の線積分は，経路によらないこと

（音声： 56:10 〜）

最後に，Cauchy の積分定理の重要な帰結を一つ，述べる．

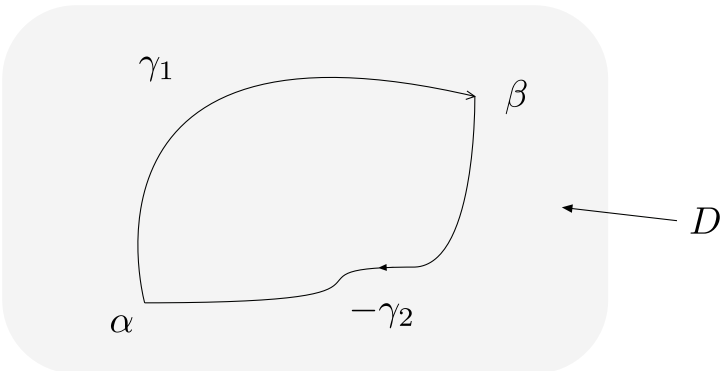
定理 2.2.2 (線積分の値が経路によらないこと：教科書の p.73, 定理 2) $\mathbb{C}$ 内の単連結領域 D で定義された正則函数 f に対して，D 内の曲線 γ に関する線積分 $\int_\gamma f(z)\,dz$ を考える．この積分の値は，積分経路 γ の始点と終点のみで決まり，その途中の経路にはよらない．
つまり，D 内で，α から β へいく経路が二つ（γ_1, γ_2）あったとすると，

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \tag{2.2.14}$$

である．

これは前節の命題 2.1.6 の一般化になっている．

（証明）これから積分路を色々と扱うことが必要になる．この証明はその良い練習になるので，見ておいて損はない．定理に出ている γ_2 の向きを変えたものを $-\gamma_2$ と書く．すると，γ_1 の後に $-\gamma_2$ をやったものは，$\alpha \to \beta \to \alpha$ と戻ってくる閉曲線になっている（下図）．



であるから，この閉曲線を $\gamma_1 - \gamma_2$ と書くと，Cauchy の積分定理から

$$0 = \int_{\gamma_1-\gamma_2} f(z)\,dz \tag{2.2.15}$$

である．この積分を γ_1 と $-\gamma_2$ に分解して書くと

$$= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{-\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \tag{2.2.16}$$

つまり，

$$0 = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \tag{2.2.17}$$

が証明された． □