複素函数論（原） 第 4 回：対数函数とべき乗函数，複素積分の定義

1.5.3 対数函数と冪乗函数

対数函数と冪乗函数については，これまでにないややこしい問題があるので，注意しよう．まず，複素数の極表示と偏角についての注意から始める．

極表示と偏角に関する注意： 任意の複素数 $z = x + iy$ （x, y は z の実部と虚部）は，極表示（極形式），つまり

$$z = r\,e^{i\theta} = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta) \tag{1.5.21}$$

と書くこともできる．ここで $r = |z|$ は z の絶対値，θ は（$z \neq 0$ の時には），

$$\frac{x}{r} = \cos\theta, \qquad \frac{y}{r} = \sin\theta \tag{1.5.22}$$

を満たす実数であり，この θ を**偏角 (argument)** と呼んだ．

ややこしいことに，上の偏角 θ は一意に決まらない．つまり

$$z = r\,e^{i\theta_1} \tag{1.5.23}$$

となる θ_1 があれば，この θ_1 から $\theta_2 = \theta_1 + 2m\pi$ を作っても（m は整数），

$$z = r\,e^{i\theta_2} \tag{1.5.24}$$

がなりたつ．この m の自由度込みで，ともかく (1.5.21) のように書ける θ のどれでも「z の偏角」と呼び，$\arg z$ と書いたのだった．

「どの θ を使うのか」を明確にした方が良いこともあり，その場合には $-\pi < \theta \leq \pi$ と取る．このようにとった θ を「z の偏角の**主値**」と呼び，$\mathrm{Arg}\, z$ で表す．

例：$z = -1$ の場合，$\arg z$ は $\pi, -\pi, 3\pi, 5\pi, -7\pi, \ldots$ など無数にある．そして，$\arg z$ と書いただけでは，このうちのどれなのかわからない．$\mathrm{Arg}\, z$ は一意に決まって，この場合は π である．

以下の対数函数の議論では，この偏角の議論，および以下の補題を用いる：

補題 1.5.5 ゼロでない複素数 z の極表示が 2 通りあったとして，それらを

$$z = r_1\,\exp\bigl(i\theta_1\bigr) = r_2\,\exp\bigl(i\theta_2\bigr) \tag{1.5.25}$$

としよう．この時，

$$r_1 = r_2 \qquad \text{かつ} \qquad \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\pi}\ \text{は整数} \tag{1.5.26}$$

である．

（証明）まず，z の絶対値を比べて

$$r_1 = |z| = r_2 \tag{1.5.27}$$

が結論できる．次に，$z \neq 0$ だから $r_1 = r_2 \neq 0$ なので

$$r_1\,e^{i\theta_1} = r_2\,e^{i\theta_2} \tag{1.5.28}$$

の両辺を $r_1 = r_2$ で割ると，

$$e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} \tag{1.5.29}$$

を得る．両辺に $e^{-i\theta_2}$ をかけると

$$e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = 1 \tag{1.5.30}$$

が得られる．これが成り立つには，$(\theta_1 - \theta_2)$ が 2π の整数倍であることが必要十分である． □

対数函数について． まず，実数の時の対数函数の定義を思い出そう．対数函数は指数函数の逆函数として定義した．つまり，$y > 0$ に対して，$e^x = y$ となる実数 x が一意に決まったので，この y から x への対応関係を対数函数と呼んで，$x = \log y$ と書いたのだった．

複素函数としての対数函数も同じノリで作る．つまり複素数 z に対して $e^\alpha = z$ となる複素数 α を見つけて，$\alpha = \log z$ と書き,「z の対数」と呼ぶ[6]．ところが以下に見るように，**このような α は一意に決まらない**ので少し注意が必要だ．まず，結論は以下の通りである．

定義 1.5.6 (対数函数, logarithmic function) ゼロでない任意の複素数 z に対し，その**対数函数** $\log z$ を，

$$\log z = \log |z| + i \arg z \tag{1.5.31}$$

によって定義する．($\arg z$ は一意に定まらないことに注意.)
なお，偏角の主値を用いたものを $\operatorname{Log} z$ と書き，対数函数の主値という．つまり主値とは

$$\operatorname{Log} z = \log |z| + i \operatorname{Arg} z \tag{1.5.32}$$

である．

（注意）この対数函数は，その値が一意に定まらないという意味で，普通の意味での数学の函数ではない．このように，たくさんの値を取りうる函数を**多価函数** (multi-valued function) ということがある．

（上の定義の理由）なぜ上のように定義するのかは，具体的に計算すればわかる．元の数 z を極表示で

$$z = r\, e^{i\theta} \qquad r = |z| \text{ は } z \text{ の絶対値}, \quad \theta = \arg z \text{ は } z \text{ の偏角} \tag{1.5.33}$$

と書いてみる．実数の場合の対数函数を用いて，z の絶対値を $r = e^{\log r}$ と表すと，z は

$$z = r\, e^{i\theta} = \exp\bigl(\log r + i\theta\bigr) \tag{1.5.34}$$

のように，指数函数で書ける．$\log z = \alpha$ は，$e^\alpha = z$ となるような α のことなので，α を求めるには，

$$r\, e^{i\theta} = e^\alpha \tag{1.5.35}$$

を解けば良い．これには補題 1.5.5 を用いれば良く，

$$\alpha = \log r + i\,(\theta + 2\pi m) \qquad (m \text{ は適当な整数}) \tag{1.5.36}$$

がわかる．結果として，

$$\log z = \log |z| + i\,(\arg z + 2\pi m) \qquad (m \text{ は適当な整数}) \tag{1.5.37}$$

がわかった．

ところが，上の「偏角に関する注意」を踏まえると，$\arg z + 2\pi m$ 自身も z の偏角の一つであるので，これも $\arg z$ と書いて良い．最終結果として，

$$\log z = \log |z| + i \arg z \tag{1.5.38}$$

が結論できる．

なお，既に上の議論に含まれていることだが，偏角の主値を用いて書くと，(1.5.38) は

$$\log z = \log |z| + i \arg z = \log |z| + i \operatorname{Arg} z + 2m\pi\, i \tag{1.5.39}$$

となる（m は $\arg z = \operatorname{Arg} z + 2m\pi$ と書けるような整数 m）．この m は任意だから，これは $\log z$ の値が一意に決まらず，むしろ $2m\pi i$ だけの自由度（**多価性**）を持ってることを意味する．これが対数函数の特殊性である．

教科書 p.44-45 の「$\log z$ による等角写像」は学期の終わり頃にやるので，今は跳ばします．

[6] 解析接続の考えを用いて対数函数を定義することも可能だが，これはかなり厄介なので，後に回す

冪乗函数について　一般の冪乗函数は，いまさっき定義したばかりの対数函数と指数函数を用いて定義する：

定義 1.5.7 (冪乗函数, power function) ゼロでない任意の複素数 z と，任意の複素数 c に対して，**冪乗函数**「z の c-乗」z^c を，

$$z^c = \exp\bigl(c \log z\bigr) \tag{1.5.40}$$

によって定義する．($\log z$ は一意に定まらないので，z^c も一意に定まらないことに注意.)
また，対数函数と同様に，偏角の主値を用いて定義したもの，つまり

$$\exp\bigl(c \operatorname{Log} z\bigr) \tag{1.5.41}$$

をこの冪乗函数の主値という．これについては特別の記号はなく，同じ z^c で表す．

なお，うえの定義での z を a，c を z と書くと，一般の指数函数に対する式になる：

$$a^z = \exp\bigl(z \log a\bigr) \tag{1.5.42}$$

この式は，a, z が実数（かつ $a > 0$）の場合には高校で習ったと思うが，上の式はこれが任意の（ただし $a \neq 0$）複素数に拡張できることを意味している．

これらの式は眺めているだけでは身につかない．教科書の 1.8 節の問題（ただし，等角写像は除く）をやることを勧める．いくつかはレポートとして出題予定．

教科書 1.9 節，1.10 節は後回しにします．

2 Cauchy の積分定理

Cauchy の積分定理は**複素函数論の神髄**とも言うべき，非常に重要な定理である．また，その定理には「線積分」と言う，新しい題材が登場する．なので心して学習して欲しい．

Cauchy の積分定理の一般的な主張はそれなりに複雑である．しかし，この講義のレベルでは，あまり厳密に一般の場合をやってもしょうがないと思う．それよりも**基本的な簡単な場合に限定してでも元になるアイディアを理解する**方が余程大切である．(そうしておけば，将来にもっと複雑なことをやる必要が出てきたときにも対応できる.) 以下の講義もそのような方針で進む.

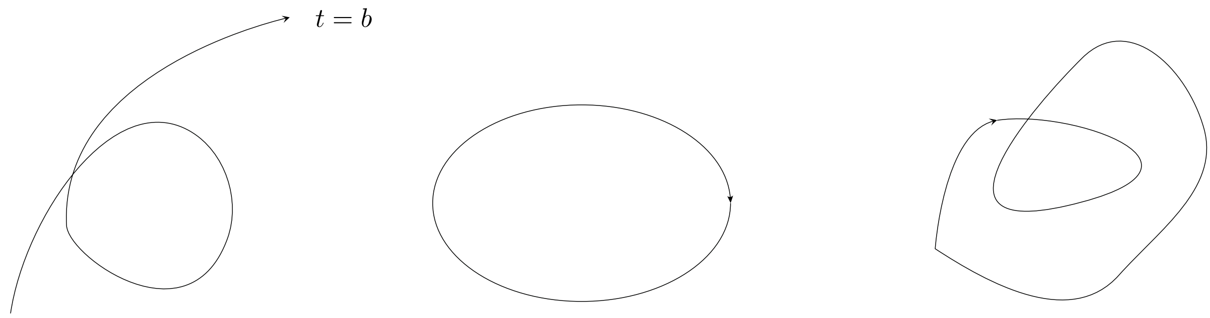
2.1 複素平面上での線積分（教科書の 2.1 節）

まず，複素線積分の定義と基本的な性質を述べる．これは新しい概念だから少し練習しないとしっくりこないだろう．心して取りかかって欲しい.

まず，曲線などの定義をしよう．何かヤヤコシイ書き方をしているが，要するに皆さんが普通に思っている「曲線」を数学的に定義するとこうなる，と言うだけである.

定義 2.1.1 (曲線)

- 複素平面での**曲線** (curve) γ とは適当な閉区間 $[a, b]$ から複素平面への連続写像 γ （のグラフ）のこと．（これを始点・終点を含めて表すために $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ と書くことが多い.）
- **閉曲線** (closed curve) $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ とは曲線のうち，始点と終点が同じもののこと（$\gamma(a) = \gamma(b)$）.
- **単純な**閉曲線 (simple closed curve) とは，自分自身と交わらない閉曲線のこと
- なお，$\gamma(t)$ が t について微分可能の時，曲線 γ は**滑らか**であると言う.



$t = a$　a curve　　a simple closed curve　　a closed curve (not simple)

さて，複素平面上の曲線 γ と連続函数 $f(z)$ に対して，γ **に沿っての** f **の線積分** (line integral, contour integral) $\int_\gamma f(z)dz$ を以下のように定義する（ノリはリーマン積分と同じだ）．教科書に従い，まずは一般の場合の定義を述べ，後から曲線が滑らかな時に成立する簡単な定義（計算法）を述べる．以下の一般の定義 2.1.2 がヤヤコシイと思う人は，最低限,「滑らかな曲線」の場合の命題 2.1.3 を理解すれば良い.

定義 2.1.2 (複素線積分, contour integral) 複素平面内の領域 D で定義された複素函数 f と，その領域 D 内にある曲線 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ があるとき，**函数 f の，曲線 γ に沿った線積分**を，以下のように定義する（下図参照）：

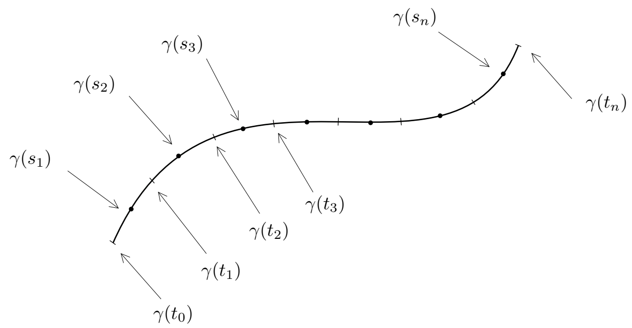
- $[a, b]$ を任意に n 個の区間に分けたものを $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ とする.
- 各 $[t_{j-1}, t_j]$ 内に $s_j \in [t_{j-1}, t_j]$ を任意にとる（$j = 1, 2, 3, \ldots, n$）.

- 通常の積分のリーマン和に相当する量

$$S_n\bigl(\{t_j\},\{s_j\}\bigr) := \sum_{j=1}^{n} f\bigl(\gamma(s_j)\bigr)\,\{\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})\} \tag{2.1.1}$$

を定義する．

- $\max_j |t_j - t_{j-1}|$ がゼロになるように曲線の分割を細かくして行ったときの $S_n(\{t_j\},\{s_j\})$ の極限を考える．
- もし，$S_n(\{t_j\},\{s_j\})$ の極限が，分割や $\{s_j\}$ の取り方に依存しない共通の一つの値に収束する場合,「函数 f は曲線 γ に沿って**線積分可能**」という．またその極限値を「γ に沿っての $f(z)$ の線積分の値」と定義し，$\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$ と書く．



この定義はなかなか計算しにくい格好をしているが，曲線が滑らかの場合には，以下のように非常に簡単になる：

命題 2.1.3 (滑らかな曲線に沿った複素線積分) 上の線積分の定義において，曲線 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ が滑らか，かつ $f(z)$ が連続の場合には，函数 f は曲線 γ に沿って線積分可能となる．さらに，その線積分の値は以下のようにも計算できる：

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f\bigl(\gamma(t)\bigr)\,\gamma'(t)\,dt \tag{2.1.2}$$

これはまた，いつものように実部と虚部を用いて，$f(\gamma) = u(\gamma) + iw(\gamma)$，$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ と表すと，

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b \Bigl[\bigl\{u(\gamma)x'(t) - w(\gamma)y'(t)\bigr\} + i\bigl\{u(\gamma)y'(t) + w(\gamma)x'(t)\bigr\}\Bigr]dt \tag{2.1.3}$$

となる（上の $u(\gamma)$ などは勿論，$u(\gamma(t))$ の意味であるが，式を複雑にしないために t は略した）．

証明のアイディア：

以下の議論（特に「だろう」の部分）は完全に厳密化できるが，アイディアが大事なので細部は書かない．

定義 2.1.2 に出ている曲線上の点の差 $\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})$ は，滑らかな函数 $\gamma(t)$ の，2 点 $t = t_j$ と $t = t_{j-1}$ での差である．実部虚部を別々に考えれば，実数函数の平均値の定理と同じで

$$\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \approx \gamma'(t_j)\,(t_j - t_{j-1}) \tag{2.1.4}$$

が成り立つだろう．従って，曲線の分割が十分に細かい場合は，リーマン和の表式を

$$S_n\bigl(\{t_j\},\{s_j\}\bigr) \approx \sum_{j=1}^{n} f\bigl(\gamma(s_j)\bigr)\,\gamma'(t_j)\,(t_j - t_{j-1}) \approx \sum_{j=1}^{n} f\bigl(\gamma(t_j)\bigr)\,\gamma'(t_j)\,(t_j - t_{j-1}) \tag{2.1.5}$$

と書いて良いだろう（二つ目の $=$ では，分割が細かい場合には，$s_j \approx t_j$ だから，$f\bigl(\gamma(s_j)\bigr) \approx f\bigl(\gamma(t_j)\bigr)$ とみなした）．

この右辺に出ている量は，実数 t の函数 $f\bigl(\gamma(t)\bigr)\,\gamma'(t)$ の t による積分を，リーマン和で近似して書いた形になっている．なので，分割を細かくした極限では，このリーマン和は積分になるだろう：

$$\sum_{j=1}^{n} f\bigl(\gamma(t_j)\bigr)\,\gamma'(t_j)\,(t_j - t_{j-1}) \;\to\; \int f\bigl(\gamma(t)\bigr)\,\gamma'(t)\,dt \tag{2.1.6}$$

積分の範囲は $a \le t \le b$ であることを思い出すと，(2.1.2) になる． □

問 2.1.1： 線積分 $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$ を以下の $f(z)$ と γ の組に対して求めよ．(類題はかならず試験に出します！)．

- $f(z) = z^2$，曲線 γ は，原点 0 と点 $1+i$ を結ぶ直線．
- $f(z) = z^2$，曲線 γ は，原点 0 と点 $1+i$ を以下のように結ぶ折れ線：まず 0 と 1 を線分で結び，次に 1 と $1+i$ を線分で結ぶ．
- $f(z) = z^2$，曲線 γ は，原点 0 と点 $1+i$ を結ぶ放物線，$\gamma(t) = t + it^2$，ここで $(0 \le t \le 1)$．

問 2.1.2： 上の問題は定義の case 1 か case 2 として処理できるが，無理矢理,「一般の時の定義」を適用して解いてみよう．