複素函数論（原）第 3 回：今日は指数函数と三角函数などを，複素数に拡張します．

教科書の 1.5 節，1.9 節，1.10 節は後回しにします．

1.5 重要な解析函数の例（教科書 1.6, 1.7, 1.8 節）

高校から知ってる重要な函数（指数函数，対数函数，三角函数）などを，複素数の函数として拡張して定義しよう．その際の**指導原理は,「考えてる函数が，正則函数になる事」**である．

1.5.1 指数函数

指数函数から始めよう．
まず，天下りではあるが，複素函数としての指数函数の定義は，以下の通りである．

定義 1.5.1 (指数函数, exponential function) 任意の複素数 $z = x + iy$（$x, y \in \mathbb{R}$）に対して，その**指数函数**を，

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \tag{1.5.1}$$

によって定義する．ここで e^x, $\cos y$, $\sin y$ は実数変数に対するお馴染みの指数函数と三角函数である．
なお，指数函数の中身が複雑な場合，指数函数を exp を用いて書くこともある．つまり，$\exp(X) = e^X$．

なぜこのように定義するのか，は少し後で説明する．その前に，この定義から出てくる指数函数の性質を列挙する（各自，実際に計算して確かめること）．

- 指数函数 e^z は，複素函数として微分可能であり，導函数は e^z，つまり実数の時と同じく,「微分したら自分自身になる」解析函数である．
- $x = 0$ とおくと，オイラーの公式 $e^y = \cos y + i \sin y$ になっている．
- z が複素数の場合でも，指数法則が成り立つ．つまり，任意の複素数 z_1, z_2 に対して，$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ が成立．
- $z = x + iy$ の時，$|e^z| = e^x$ である．
- 全ての複素数 z に対して，$e^z \neq 0$ である．

では，**なぜこのように定義するのか**について少し述べたい．いくつかの答え方がある．

- 一番，身も蓋もない回答は「上のように定義したら，色々便利な性質が成り立って，好都合だから」である．
- もうちょっとマシな回答は,「複素数の函数としても $f'(z) = f(z)$ が成り立つように決める」というものがある．教科書はだいたい，この考え方を書いている．
- しかし，より良いのは，この後で紹介する考え方である．この考え方の背後には**解析接続**という考え方があり，この解析接続こそが,「我々が実数函数としてよく知ってる函数を複素正則函数に拡張する」ための王道であり，以下でもこれを説明する．ただし，この解析接続を現時点できちんと行うのはなかなか大変なので，以下の解説では偏微分方程式の知識を少し天下りに使うものになっている．
- 狙いは「解析接続」なのだが，これを級数を使って実現する方法もある．つまり，実数の時のテイラー展開

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{1.5.2}$$

の実数 x を一般の複素数 z に置き換えて

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{1.5.3}$$

と定義する方法である．後で学ぶように,「(絶対）収束する冪級数で定義された函数は正則函数である」から，このように定義した e^z は正則函数であることが保証され，我々の目的である「解析接続」になっている．この方法については，ちゃんと級数を勉強した後で，きちんと述べる予定（今学期後半）．

なぜ定義 1.5.1 を採用するのか,「解析接続」の考えを用いた説明.

高校以来，実数 x の函数としての指数函数 e^x はよく知っている．これを全ての複素数に対して定義（拡張）するが，**拡張した結果が正則函数になるように**する．つまり，任意の複素数 z に対する未知の函数 $\mathrm{Exp}(z)$ を，以下の 2 条件を満たすように決めたいのだ：

(1) z が実数の場合には，$\mathrm{Exp}(z)$ はこれまでの指数函数に一致する（実数軸上での既知の函数との一致）

(2) 全ての複素数 z において，$\mathrm{Exp}(z)$ は（複素函数として）微分可能である（作った函数の正則性）

これがうまく行ったら，$e^z = \exp(z) := \mathrm{Exp}(z)$ とみなせば，欲しい e^z が手に入る．

以下，上のプログラムを実行してみる．

まず，正則性の条件 (2) を使おう．仮に，そのような正則な $\mathrm{Exp}(z)$ が定義されたとして，z と $\mathrm{Exp}(z)$ の実部と虚部をそれぞれ

$$z = x + iy \qquad \mathrm{Exp}(z) = u + iw \tag{1.5.4}$$

と書いてみると，u, w は x, y の函数であり，正則函数の一般論から Cauchy-Riemann の関係式を満たす．つまり

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial x} \qquad \text{（すべての実数 } x,\, y \text{ に対して）} \tag{1.5.5}$$

である．

次に条件 (1) を用いると，$y = 0$ の場合の $\mathrm{Exp}(x) = e^x$ の値は我々は知っている：実数函数としての指数函数だ．つまり上の u, v は $y = 0$ での値が決まっていて

$$u(x, 0) = e^x, \qquad w(x, 0) = 0 \tag{1.5.6}$$

となる．

したがって，我々は，偏微分方程式 (1.5.5) を，境界条件 (1.5.6) の下で解けばよいことになる．

さて，我々の定義 1.5.1 は u, w の言葉で書けば

$$u(x, y) = e^x \cos y, \qquad w(x, y) = e^x \sin y \tag{1.5.7}$$

となるが，これが「偏微分方程式 (1.5.5) と境界条件 (1.5.6)」を満たすことは容易に確かめられる（各自，チェックすること）．従って，定義 1.5.1 が我々の目的を満たす一つの解であることはわかった．残る問題は,「偏微分方程式 (1.5.5) と境界条件 (1.5.6)」の解がこれ以外にあるのか否かということだ（**解の一意性の問題**）．

解の一意性に立ち入るのはこの講義の流れから外れるので，ここでは以下の「偏微分方程式の一般論」を仮定して話を進める[5]．

境界条件 (1.5.6) の下での偏微分方程式 (1.5.5) の解は，ただ一つに決まる．

この性質を認めると,「偏微分方程式 (1.5.5) を，境界条件 (1.5.6) の下で解く」には，お目当の解を天下りに与えて，これが「偏微分方程式 (1.5.5) と境界条件 (1.5.6) を満たす」ことを確かめれば良い．なぜなら，(1) これが条件を満たすことを確かめれば，解になってることは O.K. (2) さらに，上の性質から，これ以外の解がないことが保証されている，からである．既に定義 1.5.1 が微分方程式を満たすことはチェックしたから，これで定義 1.5.1 の正当性（かつ一意性）が確かめられた．

以上が，なぜ定義 1.5.1 を採用するのか,「解析接続」の考えを用いた説明である．

[5]後で学ぶ「コーシーの積分公式」などを用いると，この一般論を仮定せずに全ての論理を完結させることは可能である（後述）

1.5.2 三角函数と双曲線函数

定義 1.5.2 (三角函数, trigonometric function) 任意の複素数 $z = x + iy$（$x, y \in \mathbb{R}$）に対して，その cos と sin を，

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} \tag{1.5.8}$$

によって定義する．ここで e^{iz} や e^{-iz} は，定義 1.5.1 によって定義した指数函数である．
また，これらを元にして（分母がゼロでないところで）

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \tag{1.5.9}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \csc z = \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z} \tag{1.5.10}$$

も定義する．これらが複素変数を引数とする**三角函数**の定義である．

同じノリで双曲線函数も定義する．

定義 1.5.3 (双曲線函数, hyperbolic function) 任意の複素数 z（$x, y \in \mathbb{R}$）に対して，その cosh と sinh を，

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \tag{1.5.11}$$

によって定義する．さらにまた，これらを元にして（分母がゼロでないところで）

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}, \tag{1.5.12}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \qquad \operatorname{csch} z = \operatorname{cosech} z = \frac{1}{\sinh z} \tag{1.5.13}$$

も定義する．これらが複素変数を引数とする**双曲線函数**の定義である．

（注意）上の三角函数と双曲線函数の定義を見比べると，任意の複素数 z に対して

$$\cosh(iz) = \cos z, \qquad \sinh(iz) = i \sin z \tag{1.5.14}$$

および

$$\cos(iz) = \cosh z, \qquad \sin(iz) = i \sinh z \tag{1.5.15}$$

が成立することがわかる．

なぜ定義 1.5.2 を採用するのか,「解析接続」の考えを用いた説明.

指数函数とおなじく，上の定義を採用する理由を説明する.（双曲線函数は三角函数と同じノリなので三角函数のみ説明する.）

今回も指数函数と同じく，実軸上での値は高校から知ってる $\cos x, \sin x$ で，複素函数として微分可能になるように，$\cos, \sin, \cdots$ を決めるわけである．Cauchy-Riemann の関係式を用いて指数函数の場合と同じように議論することももちろん可能だが，以下のように考えるのがより簡単である．

x が実数の場合，$\cos x$, $\sin x$ と e^{ix} の間にはオイラーの関係式が成立している（これは複素変数の指数函数を定義したので，確立されている）：

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{1.5.16}$$

これはまた

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{1.5.17}$$

とも同値である．さてこの右辺の指数函数の引数は純虚数だが，これは x を一般の複素数としても，すでに定義している．となると，上の関係式を一般の複素数 z まで拡張して，$\cos z$ や $\sin z$ を定義したら良いのではないか？

さらに，$\tan, \cot$ などについても，x が実数の場合

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \tag{1.5.18}$$

の関係式がある（これが定義と言っても良い）．なので，この両辺の x を一般の複素数 z まで拡張して，$\tan z$ や $\cot z$ を定義したら良いのではないか？(sec, cosec も同様)

これが定義 1.5.2 の背後にある考え方である．

さてここで，なぜ (1.5.17) のような関係式の両辺の x を複素数に拡張したら良いのか？ また，**そのように拡張したとして，できた $\cos z, \sin z$ などが正則函数になる保証はあるのか？** という疑問が湧くだろう（そもそも，実数の x から複素数 z への拡張は，指数函数の時にやったように,「引数が実数の時の値を尊重しつつ，できた函数が正則函数になるようにする」ことだったので，正則函数ができなかったら困る！）．その答えは以下の通りである．

命題 1.5.4 (一致の定理 — 後の定理 3.4.2 — の特殊な場合) 正則函数 $f(z)$ と $g(z)$ があり，両者は実軸上で一致している，つまり

$$\text{すべての実数 } x \text{ に対して} \qquad f(x) \equiv g(x) \tag{1.5.19}$$

であるとしよう．この時，実は f と g は恒等的に等しい．つまり

$$\text{すべての複素数 } z \text{ に対して} \qquad f(z) \equiv g(z) \tag{1.5.20}$$

が成立する．

この命題のおかげで，実軸上での関係式 (1.5.17) があれば，両辺を正則函数として複素数に拡張した場合，この関係式の x を z に置き換えたものも成り立つことが保証される．

なお，上の命題はより一般の形で定理 3.4.2 として証明する（「コーシーの積分公式」などを学んだ後で）．偏微分方程式の理論を使った別証明の概略は以下のようになる．

- まず，$h(z) = f(z) - g(z)$ を定義する．
- 仮定から，実軸上では $h(x) \equiv 0$ である．
- 正則性の仮定から，$h(z)$ は正則函数である．
- $h = u + iw$ と書くと，u, w は Cauchy-Riemann の関係式を満たす．さらに，実軸上では $u \equiv v \equiv 0$ である．
- 従って，我々は「Cauchy-Riemann の関係式を満たし，実軸上では $u \equiv v \equiv 0$ である」ような $u(x, y), w(x, y)$ を求めれば良い．
- 「u, v が恒等的にゼロ」なのが解であることは明らか．
- さらに指数函数の時と同じく，やはり解の一意性もなりたつ．
- 以上から，$u \equiv 0$ かつ $w \equiv 0$ が結論され，$h \equiv 0$ となる．