複素函数論（原）第 2 回

1.3 複素函数とは：複素平面における極限，連続，微分可能性（教科書 1.3 節）

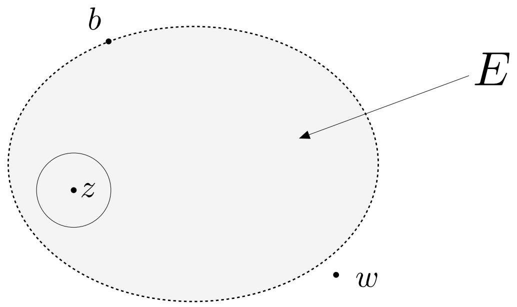
まずこの講義で頻出する用語について（教科書の p.16 参照）．以下の半ページくらい， E は $\mathbb{C}$ の部分集合とする.（以下の図を参照のこと．影をつけたところが E のつもりだ）

まず，集合 E の「内点」「外点」「境界点」について：

内点： E の要素 z が E の**内点**とは,「z の周りに十分小さい円盤を書く時，これが E の中に入っていること」（例は下図の z）

外点： E の**外点**とは $E^c = \mathbb{C}\backslash E$ の内点のこと（例は下図の w）

境界点： E の**境界点**とは $\mathbb{C}$ の点のうち，E の内点でも外点でもない点のこと（例は下図の b）



次に，これらの概念を用いて，E そのものが「開集合」とか「閉集合」とかという.

E が開集合： E の要素が全て内点であること.（俗に言うと，境界が入ってない，感じ）

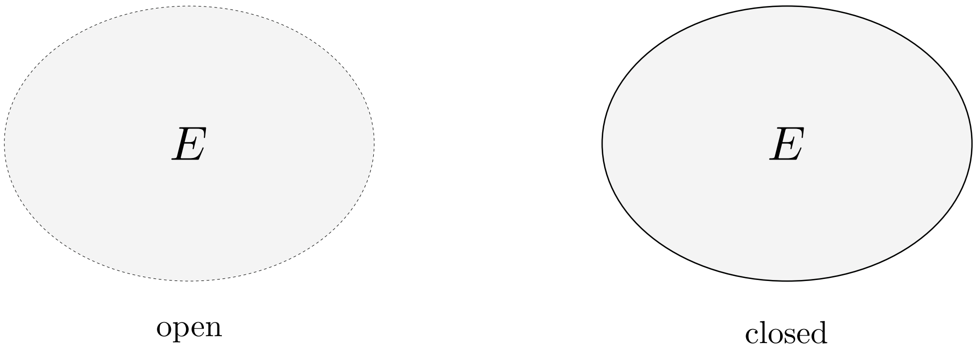
E が閉集合： E の補集合 E^c が開集合なこと.（俗に言うと，境界がすべて取り込まれている，感じ）

集積点： $z \in E$ が E の**集積点**とは，E-内に点列 $\{z_n\}$ がとれて，$\lim_{n\to\infty} z_n = z$ とできること.

連結された開集合： 開集合は，それが共通部分をもたない 2 つの開集合に**分割されない**とき，**連結されている**と言う.（イメージとしては普通に「つながってる」ということ.）

領域： 連結された開集合のこと.

閉領域： 上で定義された「領域」と，その「境界点」を合わせた集合のこと.



これらの概念は，複素函数の定理を正確に述べるには必要であり，これからもよく出てくるだろう．ただ，そのような正確さは本当は大事なのだが，その前に，複素函数論の基礎を理解することも大事である．上のような用語がややこしくて嫌だ，という人は，現段階ではあまり気にせず,「気分で」先に進んでも良い．ただし，定義により「領域」は開集合であること，したがって，z が領域 E の要素であれば，z は E の内点であって，E の境界からは少し距離が離れていること（2 つ上の図を思い出す），には再度，注意しておく.

以上の準備の下に，いよいよ，複素函数の話に入る．

複素数の集合から複素数の集合への函数を簡単に**複素函数**と言う．皆さんが今まで扱ってきた函数は主に実数の集合から実数の集合への函数だったはずで，これを（複素函数と対比して）**実函数**（または実数函数）と言う．

これから複素函数について「微分」や「極限」を考えていくのだが，ある点に近づくとは言っても，複素平面では色々な方向があるので話はややこしく（面白く）なる．まず，複素平面での極限の概念から始めよう．

定義 1.3.1 (複素平面での極限) 領域 D で定義された複素函数 f と 点 $\alpha \in D$ がある．この函数の $z \to \alpha$ での極限が A，つまり

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = A \tag{1.3.1}$$

とは，z が α に**どのように近付いても**極限が A と言うこと．数式で書けば，

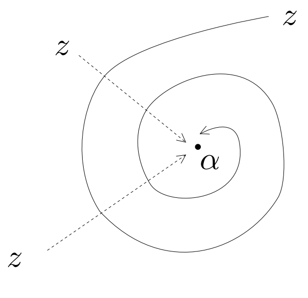
$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta \quad \text{s.t.} \quad |f(z) - A| < \epsilon \ \text{ for } \ |z - \alpha| < \delta \tag{1.3.2}$$

と言うことである.（数式がわかりにくい人は，感じだけ理解すれば良い.）

繰り返しになるが，上の定義では**どのように近付いても**と言うのがミソで，1 年の微積でやったはずの「2 変数関数の極限」と同じ複雑さである．

もう少し言葉を足すと.「どのように近づいても」というのは実数の場合でも要求されていたことである．つまり，実数函数の場合，$x \to a$ と言うのは，実数軸上で x が a の左側から近づく場合と右側から近づく場合の両方を意味していた．実数の集合は一次元（数直線）だから,「どの方向から」と言ったところで 2 方向しかなかったのである[4]．

しかし，複素平面は 2 次元平面だから $z \to \alpha$ と言っても，α の周りに 360 度，どの方向からでも近づけるわけである．実際には，もっと多様な近づき方も考えなければならない（下図に例）．そのような多様な近づき方でもすべて行き先が同じ，の場合に限って極限が存在すると言うのである．数式の上では実数も複素数も同じように見えるが，実態は複素数の方がよほど複雑であることに再度，注意されたい．



極限の概念を明らかにしたので,「連続性」「微分可能性」を論じることができる．まず連続性は普通通り，

定義 1.3.2 (複素函数の連続性) 領域 D で定義された複素函数 f と 点 $\alpha \in D$ がある.「f が α で連続」とは，$\displaystyle\lim_{z \to \alpha} f(z) = f(\alpha)$ なること．

とする．これは複素平面で考えれば,「平面上の 2 変数関数が連続であること」と同値である．

また，微分可能性も（形式的には）実数函数のばあいと同じく，

定義 1.3.3 (複素函数の微分可能性) 複素函数 f に対して

$$f'(\alpha) = \lim_{z \to \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} \tag{1.3.3}$$

が存在する時， $f(z)$ は α で**微分可能 (differentiable)** と言う．上の極限は f の α における**微分係数**（または**導函数 (derivative function)**）と言う．

[4] 本当は，a を飛び越しながら，左右両方からジワジワ近づく，のも考えるべきなのだが，これは「右から」と「左から」の両方だけを考えたら十分だった

とする．

（注意）しつこいが，上の連続性や微分可能性の定義は「極限」（定義 1.3.1）の概念を用いて定義されているから,「どのように」近付いても極限の行き先が同じ，という事が要求されている．これが思いもかけぬ厳しい条件を課し，そのために面白い性質がどんどん出てくることを以下で見ていく．

次に行く前に，ひとつ，重要な用語を定義する：

定義 1.3.4 (正則函数または解析函数) 複素函数 f が，複素平面上のある領域 D で定義されていて，かつ，その D の各点において微分可能であるとき，$f(z)$ は D 上で**正則 (holomorphic)**（または**解析的 (analytic)**）と言う．また，同じことを,「$f(z)$ は D 上の**正則函数 (holomorphic function)**（または**解析函数 (analytic function)**）である」とも言う．

（注意）正則と解析的，二つの用語に微妙な差を見出す流儀もあるが，この講義では，二つの用語は同じものとして進める．

極限や微分可能性については，教科書の 1.3 節の節末問題をやってみると良い．いくつかはレポート問題として出題の予定．

1.4 Cauchy-Riemann の関係式（教科書 1.4 節)

複素数 z はその実部と虚部にわけて $z = x + iy$ と書ける．だから複素函数 $f(z)$ 自身も実部と虚部にわけて

$$z = x + iy, \qquad f(z) = u(x, y) + iw(x, y) \tag{1.4.1}$$

と書くことができる．こうすると複素函数と言えども，**２変数** (x, y) **の函数が２つ** (u, w) **合わさったもの**だとも考えられる．この節では，複素函数が微分可能であると言うことの意味を，上の視点から考える．

まずは非常に重要な，Cauchy-Riemann の関係式について．

定理 1.4.1 (Cauchy-Riemann の関係式；教科書の p.22, 定理 1)
いつも通り，$z = x + iy$ と書く．$f(z) = u(x, y) + iw(x, y)$ が z で微分可能の時，

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\,\frac{\partial w}{\partial x}(x, y) = -i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) \tag{1.4.2}$$

がなりたつ．さらに上の真ん中と右側を比較すると（偏微分の引数は略)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial x} \qquad \textbf{（Cauchy-Riemann の関係式）} \tag{1.4.3}$$

が成り立つこともわかる．

証明のアイディア： 以下のように考えると，自然に導かれる．以下，変数としての $z = x + iy$ と，微分をとる点での $z = x + iy$ を区別したいので，微分は $\alpha = a + ib$ で考えることにする．

まず，複素函数 $f(z)$ の微分係数 $f'(z)$ を，上の u, w の偏微分で表してみよう．複素函数の α における微分の定義は

$$f'(\alpha) = \lim_{z \to \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} \tag{1.4.4}$$

で，この極限は $z \to \alpha$ なる全ての極限の取り方を考えるのだった．

特に,「実軸に平行に $z \to \alpha$ とする」場合も上の極限に含まれている．この場合は $z = x + ib$ として $x \to a$ とすれば良いから,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x+ib) - f(a+ib)}{(x+ib)-(a+ib)} = \lim_{x\to a} \frac{\{u(x,b)+iw(x,b)\} - \{u(a,b)+iw(a,b)\}}{x-a}$$
$$= \lim_{x\to a} \frac{u(x,b)-u(a,b)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{iw(x,b)-iw(a,b)}{x-a} = \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + i\,\frac{\partial w}{\partial x}(a,b) \qquad (1.4.5)$$

となる．同様に,「虚軸に平行に $z \to \alpha$ とする」場合は $z = a + iy$ として $y \to b$ とすれば良いから,

$$\lim_{y\to b} \frac{f(a+iy) - f(a+ib)}{(a+iy)-(a+ib)} = \lim_{y\to b} \frac{\{u(a,y)+iw(a,y)\} - \{u(a,b)+iw(a,b)\}}{i(y-b)}$$
$$= \lim_{y\to b} \frac{u(a,y)-u(a,b)}{i(y-b)} + \lim_{y\to b} \frac{iw(a,y)-iw(a,b)}{i(y-b)} = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}(a,b) + \frac{i}{i}\,\frac{\partial w}{\partial y}(a,b) \qquad (1.4.6)$$

となる．これらが（他の極限の取り方も含めて）全て等しい時に「f は微分可能」と言ったのだから，特に上の二つの表式は等しいはずで，かつこれが $f'(z)$ を表しているはずだ.

結果として

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + i\,\frac{\partial w}{\partial x}(a,b) = -i\,\frac{\partial u}{\partial y}(a,b) + \frac{\partial w}{\partial y}(a,b) \qquad (1.4.7)$$

が成り立つはずである．(1.4.2) を得た． □

以上は，$f(z)$ が $z = \alpha$ で微分可能であることの**必要条件**を求めたにすぎない．これで十分（本当に微分可能か）は次の定理が教えてくれる.

上の定理の逆（の 1 バージョン）は以下のようになる：

定理 1.4.2 (Cauchy-Riemann の関係式を満たすなら正則函数；教科書の p.24, 定理 2)
2 変数の実数値函数 $u(x,y)$ と $w(x,y)$ があり，ある領域 D において,
(1) u, w は x, y について偏微分可能，かつその偏導函数は x, y の連続函数で,
(2) Cauchy-Riemann の関係式，つまり

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial x} \qquad \textbf{(Cauchy-Riemann の関係式)} \qquad (1.4.8)$$

を満たすとする．この場合，$z = x + iy$ に対する複素函数 $f(z) = u(x,y) + iw(x,y)$ を定義すると，$f(z)$ は領域 D において正則函数になる.

証明は，教科書の付録 4 を参照.（この講義では証明の解説はしない.）

以下，定義（と Cauchy-Riemann の関係式）からすぐに出るような，正則函数の性質を挙げる.

まず，実数関数の場合，大雑把に言って,「$f(x)$ の導函数がゼロなら，$f(x)$ は定数」が成立した．以下の定理は，この性質の複素函数バージョンである.

命題 1.4.3 $\mathbb{C}$ 内の領域 D で定義された f が正則，かつその微分 f' が恒等的にゼロであるとする．この時，f は定数函数である.

証明のアイディア： $f'(z)$ を u, w の偏微分で書くと

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \qquad (1.4.9)$$

であったので，$f'(z) \equiv 0$ ということは，これらの偏微分が全部ゼロ，つまり

$$\text{すべての } (x,y) \in D \text{ に対して} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \equiv 0 \qquad \text{かつ} \qquad \frac{\partial w}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial w}{\partial y}(x,y) \equiv 0 \qquad (1.4.10)$$

とわかる.「偏微分が全部恒等的にゼロ」の函数は定数関数しかないから（補題 1.4.6 参照），主張は証明された. □

次の定理は，なかなか面白い．一見，意外な感じがするのではないだろうか？実数の函数を考えているだけでは絶対に思いつかない性質である.

命題 1.4.4 $\mathbb{C}$ 内の領域 D で定義された f が正則かつ実数値函数だとする．この時，f は定数函数である．『z が実数でない複素数の時でも $f(z)$ の値は実数』であるような正則関数 $f(z)$ は定数関数である

（注意）「領域」とは連結開集合であった.「開集合」であるので，特に D として「実軸の一部」だけをとることはできない（「実軸の一部」では開集合になれない）．つまり，定理の前提条件をみたす複素関数は『z が実数でない複素数の時でも $f(z)$ の値は実数』をみたすことが必要である.

証明のアイディア： f が実数値函数と言うことは $w \equiv 0$. 従って Cauchy-Riemann より u に対しても

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \equiv 0 \qquad \text{すべての } (x,y) \in D \text{ に対して} \tag{1.4.11}$$

となる.「偏微分が全部恒等的にゼロ」の函数は定数関数しかないから（補題 1.4.6 参照），主張は証明された. □

次の定理もなかなか面白い．これも実数の函数を考えているだけでは絶対に思いつかない性質である.

命題 1.4.5 (教科書の p.24, 例 3) $\mathbb{C}$ 内の領域 D で定義された f が正則，かつその絶対値 $|f|$ が定数であるとする．この時， f そのものも定数函数である.

証明のアイディア： $|f|^2 = u^2 + w^2$ が定数，つまり，こいつの偏微分が恒等的にゼロなので，

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\bigl(u^2 + w^2\bigr) = 2(u\,u_x + w\,w_x) \qquad \text{かつ} \qquad 0 = \frac{\partial}{\partial y}\bigl(u^2 + w^2\bigr) = 2(u\,u_y + w\,w_y) \tag{1.4.12}$$

つまり，

$$u\,u_x + w\,w_x = 0 \qquad \text{かつ} \qquad u\,u_y + w\,w_y = 0 \tag{1.4.13}$$

がなりたつ.

Cauchy-Riemann の関係式を用いて，w の偏微分を u の偏微分で書き直すと，

$$u\,u_x - w\,u_y = 0 \qquad \text{かつ} \qquad u\,u_y + w\,u_x = 0 \tag{1.4.14}$$

が得られ，この二つから u_y を消去すると

$$(u^2 + w^2)\,u_x = 0 \tag{1.4.15}$$

を得る．また，u_x を消去すると

$$(u^2 + w^2)\,u_y = 0 \tag{1.4.16}$$

を得る.

さて，$u^2 + w^2 \equiv 0$ なら $u \equiv 0$ かつ $w \equiv 0$ なので，$f \equiv 0$ となって，命題は証明される．$u^2 + w^2 \neq 0$ ならば，上の 2 式から

$$u_x = 0 \qquad \text{かつ} \qquad u_y = 0 \tag{1.4.17}$$

であるから，u は定数であることが結論できる．同様に，w の偏微分だけ残して議論すると w も定数とわかる．結果として，f は定数関数になる. □

（補足）一年の微積の復習だが，上で用いた 2 変数函数の性質を厳密に証明しておく.

補題 1.4.6 平面内の領域 D で定義された 2 変数函数 $u(x,y)$ の偏導函数が恒等的にゼロならば，$u(x,y)$ は定数函数である.

証明：

このような函数が恒等的に定数函数であることはほとんど明らかであろう — x で微分しても，y で微分しても共にゼロなんだから．

厳密な証明は以下の通り：D 内の任意の点を (a,b) と書く．この時，$|\epsilon|$, $|\delta|$ を正だけれども十分に小さくとると，点 $(a+\epsilon, b+\delta)$ と点 (a,b) を，D 内に存在する線分でつなぐことができる．

点 $(a+\epsilon, b+\delta)$ と点 (a,b) での u の値が等しいことを言おう．上で述べた線分が D 内に入ってるので，２変数の時の平均値の定理が使える．その結果，$0<t<1$ が存在して

$$u(a+\epsilon,b+\delta)-u(a,b)=\frac{\partial u}{\partial x}(a+t\epsilon,b+t\delta)\,\epsilon+\frac{\partial u}{\partial y}(a+t\epsilon,b+t\delta)\,\delta \tag{1.4.18}$$

と書けることがわかる．でも，右辺の偏微係数はゼロなんだから左辺もゼロで，点 $(a+\epsilon, b+\delta)$ と点 (a,b) での u の値は等しいと言えた．

この作業を繰り返して，点 (a,b) からどんどんと点を線分でつないで，それらの全ての点での u の値が等しいと言えるので，最終的に D 内で u が定数と言える． □

1.4.1 全微分可能性との関係：複素函数の微分可能性は全微分可能性よりも強い！

（この小節の内容は，かなり「おまけ」である．余裕のない人は無視して良い．）

２変数函数（一般に多変数函数）においては「全微分可能」と言う概念があった．

定義 1.4.7 (全微分可能（復習）) ２つの実数変数 (x,y) の函数 $u(x,y)$ を考える．これが点 (a,b) で全微分可能とは，適当な数 A,B が存在し，(a,b) の近傍で

$$u(x,y)-u(a,b)=A(x-a)+B(y-b)+o(\sqrt{|x-a|^2+|y-b|^2}) \tag{1.4.19}$$

なることである．ここで $o(h)$ とは $h\to 0$ の時に $o(h)/h\to 0$ となることを意味する．

なお，上で少し計算してみると

$$A=\frac{\partial u}{\partial x},\quad B=\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.4.20}$$

であることがわかる．

全微分可能な函数では「方向微分」が定義できる：(x,y) を (a,b) に近づける場合に $x=a+t\cos\theta, y=b+t\sin\theta$ として $t\to 0$ を考えると，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{u(a+t\cos\theta,b+t\sin\theta)-u(a,b)}{t}&=\lim_{t\to 0}\frac{At\cos\theta+Bt\sin\theta+o(t)}{t}\\&=A\cos\theta+B\sin\theta=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\end{aligned} \tag{1.4.21}$$

となる．この結果は一般に θ （微分される方向）による．

全微分可能性というのは上で述べた通りだが，これと複素函数の微分可能性の関係はどうだろうか？

答えから先に言うと，全微分可能だけでは複素函数が微分可能と言うのには足りない．理由は以下の通りである．

複素函数が微分可能と言うことは「どの方向から微分しても」結果が同じと言うことを含む．$z=x+iy$ と書いて，$f=u+iw$ に対して上のように方向微分を計算してみると

$$\begin{aligned}&\frac{(u+iw)(\alpha+t\cos\theta+it\sin\theta)-(u+iw)(\alpha)}{t\cos\theta+it\sin\theta}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta+i\frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta+i\frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta}{\cos\theta+i\sin\theta}\\&=\frac{\partial u}{\partial x}\cos^2\theta+\frac{\partial w}{\partial y}\sin^2\theta+\Bigl(\frac{\partial u}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr)\cos\theta\sin\theta+i\Bigl\{\frac{\partial w}{\partial x}\cos^2\theta-\frac{\partial u}{\partial y}\sin^2\theta+\Bigl(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\Bigr)\cos\theta\sin\theta\Bigr\}\end{aligned} \tag{1.4.22}$$

となる．これが θ の方向によらないためには，実部と虚部別々に θ によらないことが必要で，（各自やってみること）結果的に，すでに出てきた Cauchy-Riemann の関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial x} \tag{1.4.23}$$

が必要十分となる．つまり，全微分可能性だけでなく，「Cauchy-Riemann の関係式」まで成り立たないと，複素函数としての微分可能性にならないのだ．この意味で，複素函数の微分可能性は，全微分可能性よりもずっとキツイ条件である．

上では微分可能な時の必要条件として Cauchy-Riemann の関係式が導かれた．実はこれは（ほとんど）十分でもある（下の定理）：

定理 1.4.8 (Cauchy-Riemann の関係式と微分可能性；教科書の定理 1,2 の少し違うバージョン)
$f(z) = u(x, y) + iw(x, y)$ が z で微分可能であるための必要十分条件は

(i) u, w が z で**全微分可能**でかつ

(ii) u, w が z で Cauchy-Riemann の関係式を満たすこと

である．

以上，いくつかの面白い定理を述べたが，具体的に計算することも重要だ．教科書の 1.4 節の節末問題をやるのが良い．レポートにも少し出す予定．