複素函数論（原）　第 14 回（8/12）等角写像について．

6 等角写像

最後に,「等角写像」について，簡単に学ぼう．図を描くのが大変なので，図は全て教科書に任せた．なので，教科書も見ながら読んで欲しい．なお，この章の内容はある程度「おまけ」的なものなので，定理の証明などはまったく載せていない．

6.1 解析函数と等角写像（教科書の 1.5 節 $+\alpha$）

（音声： 1:27 〜）

いままで，複素函数（特に解析函数）について色々学んで来た．最後に，複素函数の幾何学的性質を考えてみよう．まず,「複素函数の幾何学的性質」というのは，以下のようなことである．

複素函数 $f(z)$ は，もちろん，複素数 z から別の複素数 $f(z)$ への写像（函数）である —— 一点 z を決めれば，f による行き先 $f(z)$ が決まる．さてここで,「複素平面上のある図形が，f によってどのような図形に写されるか？」を考えてみよう．特に,「ある図形」としては，直線や円の場合を考えたい．例を挙げよう．

（例 1）$f(z) = z$（恒等函数）の場合．この場合は，z が自分自身に移る（つまり，点は移動しない）．なので，複素平面上の図形は，それ自身に移る（移るというよりは，図形は同じである）．

（例 2）$f(z) = z^2$（2 次函数）の場合.（教科書 p.28）

元の図形として，原点を通る直線を考えよう．この直線は $z = r\,e^{i\theta}$ の形である（r が実数全体を動く；θ は固定されている）．これを $f(z)$ で写すと

$$f(re^{i\theta}) = r^2\,e^{2\theta i} \tag{6.1.1}$$

となる．θ は固定されて r が動くから，これも原点を通る直線である（が，$r^2 \geq 0$ なので，半直線になる）．ただし，直線の実軸からの角度は，もとのが θ であるが，2θ になっている．

次に，原点中心の円の場合を考える．この円も $z = r\,e^{i\theta}$ と書けるが，今度は $r > 0$ は固定されていて，θ が 0 から 2π まで動く．f で写した先はやはり

$$f(re^{i\theta}) = r^2\,e^{2\theta i} \tag{6.1.2}$$

であり，原点中心，半径 r^2 の円になる．

このように，またこのすぐ後でも見るように，色々な函数 $f(z)$ によって，写った先は色々だ．ただし，$f(z)$ が解析函数の場合は，以下の定理が示すような，非常に著しい性質がある．まず，等角写像の概念を導入する．

定義 6.1.1 (等角写像；教科書の p.29，図 1.21 も参照) ある写像 f が（ある点 z_0 において）**等角写像** (conformal mapping) であるとは，この点 z_0 において交わる任意の 2 曲線 C_1, C_2 のなす角と，これらの曲線の像 $f(C_1), f(C_2)$ のなす角度が同じである，ことである．

定義の概念については，教科書の p.29, 図 1.21 を参照されたい．

すると，以下の定理が成り立つ：

定理 6.1.2 (解析函数と等角写像；教科書の p.30，定理 1) 解析函数 $f(z)$ による写像は，$f'(z) \neq 0$ である点においては，等角写像である．

解析函数 $f(z)$ がある時，その導函数 $f'(z)$ がゼロになる点を**臨界点**という．f が恒等函数でない限り，臨界点は孤立している（もし孤立していないなら，一致の定理により，$f'(z)$ が恒等的にゼロになってしまうから）．である

ので，上の定理から，解析函数 f による写像は，ほとんどの点で等角写像になっていると言える．これが**解析函数と等角写像の関係**である．

以下，もう少し例を続ける．

（例 3）$f(z) = e^z$ の時．（教科書 p.34-35）これは教科書の該当部分を見ていただこう．図 1.26 にあるように，もともとの長方形（左側）が，右側の楔形（の頂点がないやつ）に写る．

（例 4）三角函数や双曲線函数の場合．これは教科書の p.39-40 にある．

（例 5）対数函数の場合．これは教科書の p.44 にある．指数函数と対数函数が逆函数の関係にあることを用いると，それほど難しくない．

以上のような例は，将来必要になったら，教科書のようにして自分で計算できるようになっておくことが望ましい．

と思うが，これについては，次と次の節で，部分的に回答する．

等角写像の使い方

ところで,「なぜ等角写像を考えるのか？」という根本的な疑問が湧いているだろう．これに対する答えは以下の通りである．

> みなさんがこれから遭遇する問題はもちろん，色々あるのだが，その問題を考えるべき領域が「変な」「ややこしい」形をしていると考えにくいことは多い．例えば，ややこしい領域 A の中で偏微分方程式を解いたりするのは，境界条件が非常に厄介で困難なことがある．しかし，ある写像を用いて，ややこしい領域 A をもっと簡単な（例えば長方形の）領域 B に変換できるなら，問題が簡単になるかもしれない．というわけで，考えているややこしい領域を簡単化するために，等角写像を用いることがある．これが等角写像を考える理由である．

6.2 1 次分数変換（教科書の 1.9 節）

（音声： 12:55 〜）

次に，解析函数による等角写像のなかでも特別なもの，つまり 1 次分数変換を扱おう．すぐ後で説明するように，これは将来，使うことがあるかもしれない[22]．

定義 6.2.1 (1 次分数変換；教科書の p.47) $ad - bc \neq 0$ なる複素数を固定し，

$$f(z) := \frac{az+b}{cz+d} \tag{6.2.1}$$

なる函数を定義する．この函数による等角写像を，**1 次分数変換** (linear fractional transformation) または**メビウス変換** (Möbius transformation) と呼ぶ．

（注意）

$$f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \tag{6.2.2}$$

であるので，分母がゼロの点（そこでは $f(z)$ そのものが定義されない）以外では，$f'(z) \neq 0$ が保証されている．つまり，$f(z)$ が定義できている点では，$f(z)$ は等角写像を表している．

教科書 p.47 で説明されているように，a, b, c, d を適切に選ぶことによって，1 次分数変換を使って色々な（基本的な）変換を表すことができる（特に，平行移動，回転，1 次変換，単位円による反転）．

[22] 昔は，静電場の問題を解く際などに必須のテクニックだったが，今では計算機も発達したので，以前ほどの重要性は無くなったのだろうと推測する

本来,「無限遠点」の説明をここで行うべきだが，これは例外的な場合なので，この講義ノートでは省略する．きになる人は，教科書の p.48 の中頃の説明を読んでおくこと．

1 次分数変換の不動点

函数 $f(z)$ の**不動点** (fixed point) とは，

$$f(z) = z \tag{6.2.3}$$

を満たす点 z のことである．なぜ不動点というかというと，点 z を f で変換しても $f(z) = z$ なので,「自分自身に戻る，つまり動かない」から．1 次分数変換の不動点については，以下の性質がある．

定理 6.2.2 (1 次分数変換の不動点；教科書の p.49, 定理 1) 恒等写像でない 1 次分数変換 $f(z)$ の不動点は，多くても 2 個である．逆に言うと，1 次分数変換 $f(z)$ の不動点が 3 個以上あるなら，$f(z) = z$ である．

教科書では 1 次分数変換の決め方の話がここにあるが，話の流れから，それは後回しにする．

1 次分数変換の性質

1 次分数変換には，以下のような著しい性質がある：

定理 6.2.3 (1 次分数変換は円を円に写す；こんな大事な定理が教科書に載ってないの？) 1 次分数変換 $f(z)$ によって「円または直線」は「円または直線」に写される．「直線は半径無限大の円」と思うことにすれば，この事情はもっと簡単に「1 次分数変換は円を円に写す」と言える．

（注意）複素函数論では，これまでも,「ある曲線が囲まれた領域」を考えてきた．上の定理は「円を円に」写す，つまり領域の境界がどのように写り合うかしか言及していないが，領域の内部も対応する領域の内部に写る．つまり,「円の内部は円の内部に写る」と言っても良い．

いくつかの例を教科書で見ておくのが教訓的だろう．

- 上半平面を（原点中心の）単位円の中に写像：$f(z) = \dfrac{z-i}{1-iz}$ を用いると，上半平面が（原点中心の）単位円の中に写像される（教科書 p.50 の例 1）．
- （原点中心の）単位円の中を上半平面に写像：上の $f(z)$ の逆函数を使えば，逆写像が作れる．実際に計算するとその逆写像は $g(w) = \frac{w-i}{1+iw}$ である．
- （原点中心の）単位円の中を右半平面に写像：$f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$ を用いると,（原点中心の）単位円の中が，右半平面に，写像される（教科書 p.51 の例 3）．
- （原点中心の）単位円の中を（原点中心の）単位円に写像：$f(z) = \dfrac{z-z_0}{\bar{z}_0\, z - 1}$ （ただし，$|z_0| < 1$）を用いると,（原点中心の）単位円の中が,（原点中心の）単位円の中に，写像される．ただし，この時，z_0 が原点に写像される（教科書 p.51 の例 5）．

教科書にも色々と例が載っている，各自，図を描きながら納得するのが良いだろう．

欲しい 1 次分数変換の見つけ方

さて，これまでにいくつかの 1 次分数変換の例を見てきたが，これを応用する場合，問題を考えたい領域 A と，これを 1 次分数変換で写した先にしたい領域 B が決まっていることが多い．そのような場合に,「実際に A を B に写してくれる写像 $f(z)$ をどうやって求めるか」という問題が生じる．

これについては，以下のように考えれば良い．教科書 pp.50-53 の考察は，以下のようにして出てきたものである．

（1）まず，$f(z)$ は，その定義から，a, b, c, d の 4 つの複素数を決めれば決まることに注意する．さらに，本当はこの 4 つではなく，これら 4 つの**比**さえ決まれば良いことにも注意する．なぜなら，例えば $c \neq 0$ なら，分母子を c でわって

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(a/c)z + (b/c)}{z + (d/c)} \tag{6.2.4}$$

と書くこともでき，右辺は明らかに 3 つの数 $a/c, b/c, d/c$ だけで決まるからである．($c = 0$ の場合は特殊だがショウモナイ例なので，以下では無視.)

（2）つまり，1 次分数変換を決めるには，適当な 3 つの点 z_1, z_2, z_3 と，その行き先 w_1, w_2, w_3 を決めれば良い．そうすれば，

$$w_j = \frac{az_j + b}{cz_j + d} \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{6.2.5}$$

を解くことによって，$a/c, b/c, d/c$ を決められるからである．これは教科書では p.49 の定理 2 としてまとめられている．

（3）さらに，上の 3 点 z_1, z_2, z_3 を領域 A の境界上の点とすると，w_1, w_2, w_3 も B の境界上の点になることがわかる（教科書 p.50）.

従って，欲しい 1 次分数変換を求めるには，元の領域 A の境界上の 3 点が，B の境界上のどこに写るか，を指定してやれば良いことになる．ただし，以上はすべて，**仮に，A を B に写すような 1 次分数変換が存在するならば，** の仮定の下での話である．A, B の取り方によっては，そのような 1 次分数変換が存在しない場合がよくあるから注意のこと．

6.3 リーマンの写像定理（教科書にはないが...）

（音声： 25:58 〜）

最後に，ここまでやったら以下の定理に言及しないわけにはいかないと思うので，紹介する．

定理 6.3.1 (リーマンの写像定理) D を，単連結な領域であるが，複素平面全体ではないもの，とする．D 内に任意の点 $z_0 \in D$ をとる．このとき，

- $f(z_0) = 0$ かつ $f'(z_0) \neq 0$
- f は D を，原点中心の単位円の内部に写像する．つまり $f(D) = \{w \in \mathbb{C} \,\big|\, |w| < 1\}$

ような解析函数 $f(z)$ が存在して一意に定まる．

これはある意味，ものすごい定理である．いくつか条件がついているが，大雑把に言えば,「あまり変でない領域 D を，うまく $f(z)$ を選んで，いつでも単位円の内部に写せる」のである．

さらに，2 つの領域 D_1, D_2 があったとき，それぞれを単位円の内部に写す写像をそれぞれ f_1, f_2 とする．f_2 の逆函数 f_2^{-1} を用いて $g(z) = f_2^{-1}\bigl(f_1(z)\bigr)$ を定義すると，$g(D_1) = D_2$ となる．つまり，任意の（単連結）領域同士を解析函数 g でもって写像しあえるのである．

というわけで，ここから等角写像の面白い話が始まるのだが，時間の関係でここでおしまい．遠隔授業でお互い大変だったけど，ともかくお疲れ様.