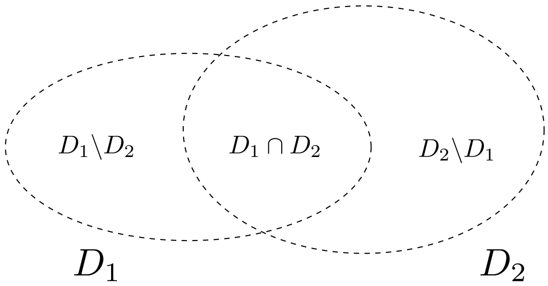
複素函数論（原）　第 13 回（8/5）解析接続について.

これまで一生懸命進んできたので，この講義でやるべき最低限のことは全部やった！後の 2 回では，補足的なことを二つ述べる．まず今日の第 13 回では,「解析接続」について簡単に説明する．また，来週の第 14 回（最終回）では，等角写像について簡単に説明する．

5　解析接続（おまけ 1）

5.1　解析接続とは

２つの領域 D_1, D_2 が共通領域 $D_1 \cap D_2$ を持っており，D_1, D_2 のそれぞれで定義された正則函数 f_1, f_2 があるとしよう．もし $D_1 \cap D_2$ で $f_1 \equiv f_2$ となっているとき，f_2 **は** f_1 **の** $D_2 \backslash D_1$ **への解析接続**であると言う．



この背後にある考えは以下の通り：「一致の定理」の主張は,「領域 D で定義された正則函数を決めるには，D 全体での f を知る必要はない．D のごく一部分で知れば十分である」と言う物だった．今のように $D_1 \cap D_2$ で正則函数が定義できていれば，一致の定理によってこれを正則な函数に拡げていくことができる．特に，今のように D_1, D_2 で共に正則な函数があることが保証されているなら，その正則な函数は一意に定まる．つまり，この一意に定まる函数を D_1 から決まった D_2 での函数成分と考えるわけである．

以上の考えを更に拡張して,「ある領域 D とその上の正則函数が与えられたとき，上の意味で解析接続をできる限り繰り返して，できるだけ広い領域で正則な函数を作る」操作を考えよう．

5.2　どうしても解析接続できない（自然境界）の例

（音声： 5:33 〜）

とはいえ，どうしても解析接続できない場合もある．つまり，ある閉曲線上に特異点が集中していて，そこから先に進めない場合だ（このような閉曲線を「自然境界」という）．いくつかの例を挙げておこう．これらは全て，$|z| = 1$ が自然境界になっている例である．

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{k^n} \qquad z \text{ の } (k^n) \text{ 乗，ただし } k \geq 2 \tag{5.2.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} \tag{5.2.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n} \tag{5.2.3}$$

5.3 解析接続の例

（音声： 06:50 〜）

具体的には冪級数を用いて解析接続することが多いので，具体例からやってみよう．

5.3.1 級数が複素平面で収束する場合

例１：領域 $D := \{z : |z| < 1/2\}$ で定義された函数

$$f_1(z) = z^2 + z + 1 \qquad (|z| < \frac{1}{2}) \tag{5.3.1}$$

の解析接続を考える．実はこれは多項式であるので，(多項式ではいつでも）複素平面全体への拡張を簡単に見つけることができる．つまり，

$$f_2(z) = z^2 + z + 1 \qquad (z \in \mathbb{C}) \tag{5.3.2}$$

が答えである．というのは，この「答え」は複素平面全体で正則であり，**「一致の定理」によって，これ以外の可能性が否定される**からである[18]．

例２：領域 $D := \{z : |z| < 1/2\}$ で定義された函数

$$g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (|z| < \frac{1}{2}) \tag{5.3.3}$$

の解析接続は，やはり簡単で，

$$g_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (z \in \mathbb{C}) \tag{5.3.4}$$

である．この理由も，上の級数が全ての z で収束して正則函数を定義するため，**一致の定理からこれ以外にはない**ことが言えるためである．この例１や例２のように，複素平面全体に一気に拡張できる函数はその定義式や冪展開からすぐにわかることが多い．

5.3.2 級数の和がとれて，特異点以外では正則になる場合

例３：では，もう少し難しい物を考えていこう．領域 $D := \{z : |z| < 1/2\}$ で定義された函数

$$h_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (|z| < \frac{1}{2}) \tag{5.3.5}$$

はどうだろうか？ここでは「ズルイ」方法を示す[19]：上の級数は $|z| < 1$ では収束しており，和をとると，

$$h_2(z) = \frac{1}{1-z} \qquad (|z| < \frac{1}{2}) \tag{5.3.6}$$

となる．ところがこの右辺は $z \neq 1$ で正則な函数になっている．だから，一致の定理より，$z \neq 1$ への解析接続は $h_2(z) = \dfrac{1}{1-z}$ である．

5.3.3 級数の収束領域が限られている場合：対数函数の例

対数函数はなかなか面白い例なのだが，それなりに大変なので，節を改めて扱うことにする．

---

[18]「一致の定理」の効用の一つは，正にこれである：見つけてきたものが唯一の解であることを保証する

[19]このような「ズルイ」方法が使えない場合は次の節で扱う

5.4 対数函数とリーマン面

（音声： 11:22 〜）

この最後の節では上の対数函数を例にとって,「リーマン面」について述べる.

5.4.1 まずは対数函数の解析接続の計算例

対数函数を扱うには，指数函数の逆函数とするのが一般的であるし，簡単でもある．またこの講義では，すでに対数函数を定義した．しかし，ここでは「解析接続により函数を定義・拡張していく」との立場から，敢えてこのヤヤコシイ（でもアイディアとしては単純な）道を選ぶことにした．あまりこのような泥臭い方法を解説している本がないようなので，これも役に立つのではないかと考えたためである．

なお，以下のお話は $\log z$ の微分（$= 1/z$）を主役に据えると簡単になるのであるが，これも少し「ズルイ」ので敢えて行わなかった — とは言っても，こっそり使っているのだが.

例４：今までの例は結局，$f(z)$ の正則な形がすぐにわかるものばかりであった，そうではない，典型的な例をやってみよう．ここで初めて，函数を級数展開で定義することの利点が明らかになる．以下，これまでにやった「複素数 z に対する $\log z$ の定義」は一旦忘れて，実数 x の函数 $\log x$ から出発する.

実数 $x > 0$ に対する対数函数の定義は我々は知っているし，その $x = 1$ の周りでの冪級数展開

$$\log x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} \qquad (|x-1| < 1) \tag{5.4.1}$$

も知っている．この（実軸上で定義された）函数の（複素平面への）解析接続を見てみよう.

Step 1. この冪級数は $|z-1| < 1$ では絶対収束しているので，この範囲では冪級数で解析函数を定義できる．つまり，

$$\log z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n} \qquad (|z-1| < 1). \tag{5.4.2}$$

Step 2. さて，$|z-1| > 1$ では上の級数は（各項が無限大になって）収束し得ない．そこで，適当な点を中心にした別の冪級数に乗り換えてやることを考える．$z = 7/4$ を中心にしてやってみよう．つまり，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - 7/4)^n \tag{5.4.3}$$

の形の函数が， $|z| < 1$ との共通領域では (5.4.2) と一致するように係数 a_n を決めたい．これは普通のテイラー展開であるから，

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} f(z) \Big|_{z=7/4} \tag{5.4.4}$$

となるはずである．ここで $z = 7/4$ の近傍では $f(z)$ の級数展開が (5.4.2) で与えられることを用いて計算すると，

$$a_0 = f(7/4) = \log(7/4) \tag{5.4.5}$$

$$a_1 = \frac{d}{dz} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{(z-1)^j}{j} \Big|_{z=7/4} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} (z-1)^{j-1} \Big|_{z=7/4} = \frac{1}{1+z-1} \Big|_{z=7/4} = \frac{1}{z} \Big|_{z=7/4} = \frac{4}{7} \tag{5.4.6}$$

この後は上の微分の表式 $1/z$ を用いると便利である：

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} f(z) \Big|_{z=7/4} = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{1}{z} \Big|_{z=7/4} = (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{4}{7}\right)^n \tag{5.4.7}$$

$$\log z = \log(7/4) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{4}{7}\right)^n (z - 7/4)^n \tag{5.4.8}$$

と言う表式が得られた．この級数の収束半径は 7/4，つまりこの級数は $|z - 7/4| < 7/4$ の範囲で収束する．

Step 3. 更にこの級数を $z = 3$ の周りで展開してみよう．上と同じように議論すると，

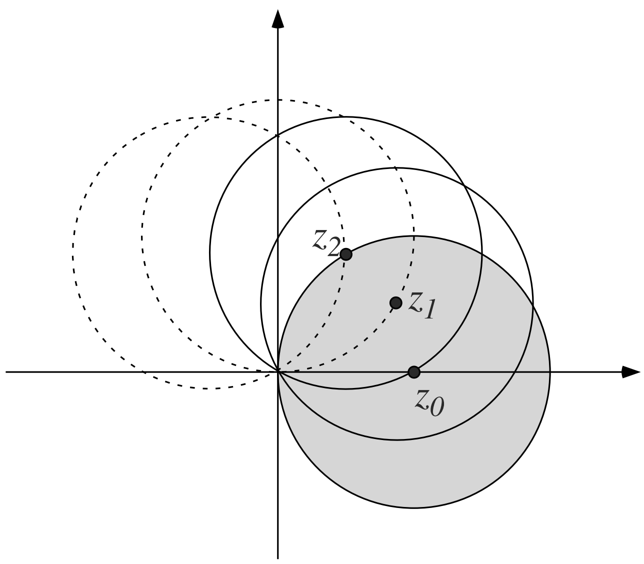
$$\log z = \log(3) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n (z - 3)^n \tag{5.4.9}$$

を得る．更にこれを繰り返して，任意の $a > 0$ の周りでの展開

$$\log z = \log(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{a}\right)^n (z - a)^n \qquad \Big[\equiv h_0(z)\Big] \tag{5.4.10}$$

をも得ることができる（後々のために，上の級数を $h_0(z)$ と書いた）．この最後の級数の収束半径は a であり，$|z - a| < a$ で絶対収束している（この収束域は下図の影を付けた円）．後々のために，$z_0 = a$ と定義した．

これまで出てきた級数は，$\log x$ の解析接続を，それぞれの収束域で定義するものである．



Step 4. 上の表式から，いよいよ $\mathrm{Re} z < 0$ の方へ行ってみよう．出発点としては，$z = a$ の周りの展開を考えてみる（$a > 0$ は固定）．まず，$z_1 := \frac{1+i}{\sqrt{2}} a = e^{i\pi/6} a$ を考えると，$|z_1 - a| = |e^{i\pi/6} - 1| a < a$ なので，この点は (5.4.10) の収束域の中にある．そこで，この級数 $h_0(z)$ を $z = z_1$ を中心にして展開してみる．つまり

$$h_1(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} (z - z_1)^n \tag{5.4.11}$$

の形の級数で，共通の収束域の中では $h_0(z)$ に一致するものを探す．これはまたもやテイラー展開であるから，その係数は

$$a_n^{(1)} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} h_0(z) \bigg|_{z=z_1} \tag{5.4.12}$$

で与えられるはずである．具体的に計算すると，

$$a_0^{(1)} = h_0(z_1) = \log(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1}{a}\right)^n (z_1 - a)^n = \log(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Big(e^{i\pi/6} - 1\Big)^n \tag{5.4.13}$$

$$a_1^{(1)} = \frac{d}{dz}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{(z-a)^j}{j\,a^j}\bigg|_{z=z_1} = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{(z-a)^{j-1}}{a^j}\bigg|_{z=z_1} = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{z}{a}-1}\bigg|_{z=z_1} = \frac{1}{z}\bigg|_{z=z_1} = \frac{1}{z_1} \tag{5.4.14}$$

あれま，(5.4.6) と同じように，$h_0(z)$ の z での一階微分は $1/z$ であるとわかった．よって，この後はこの微分の表式 $1/z$ を用いて，(5.4.7) とおなじように，

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}f(z)\bigg|_{z=z_1} = \frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\frac{1}{z}\bigg|_{z=z_1} = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{z_1}\right)^n, \tag{5.4.15}$$

$$h_1(z) = a_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{z_1}\right)^n (z-z_1)^n \tag{5.4.16}$$

と言う表式が得られた．この級数の収束半径は $|z_1| = a$，つまりこの級数は $|z-z_1| < |z_1| = a$ の範囲で収束する（収束域は上の図の z_1 を中心にした円の内部．なお，$a_0^{(1)}$ は (5.4.13) の級数で与えられた数であるが，これは正に（いま解析接続しているところの）$\log z_1$ の値に他ならない．よって，$|z-z_1| < a$ に対して，表式[20]

$$\log z = h_1(z) = \text{“}\log z_1\text{”} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{z_1}\right)^n (z-z_1)^n \tag{5.4.17}$$

が得られた（“$\log z_1$” の表式は (5.4.13) の $a_0^{(1)}$ で与えられている）．

Step 5.

この精神で更に進む．今度は $z_2 = e^{i\pi/3}a$ を考えると，これは $h_1(z)$ の収束域に入っている．ので，z_2 を中心にした展開が[21]

$$\log z = h_2(z) = \text{“}\log z_2\text{”} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{z_2}\right)^n (z-z_2)^n \tag{5.4.18}$$

と得られる（収束域は $|z-z_2| < a$，先の図の z_2 中心の円の内部）．ここで

$$\text{“}\log z_2\text{”} = h_1(z_2) = \log z_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(e^{i\pi/6}-1\right)^n \tag{5.4.19}$$

である．この後も同様に（先の図ではいくつかを点線でかいてある），

$$z_j := e^{i\pi j/6} \qquad (j = 3,4,5,\ldots) \tag{5.4.20}$$

の周りでの展開を順次作っていくと，$|z-z_j| < a$ での収束級数が[22],

$$h_j(z) = \text{“}\log z_j\text{”} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{z_j}\right)^n (z-z_j)^n \tag{5.4.21}$$

$$\text{“}\log z_j\text{”} = h_{j-1}(z_j) = \text{“}\log z_{j-1}\text{”} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{z_j}{z_j}-1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(e^{i\pi/6}-1\right)^n \tag{5.4.22}$$

の用に順次，作られていく.（この解釈は次の小節で）．たとえば $j=6$ の展開は $-a$ を中心にした展開であるから，これで負の実軸の辺りでの対数函数が定義できたことになる．

5.4.2 “$\log a$” の値について

さて，これで一応，対数函数の解析接続が定義できて[23]，メデタシメデタシなのだが，よく見ると変なことに気づく．今，先ほどの解析接続を $j = 1,2,3,\ldots,12$ まで実行したとしよう．$z_{12} = a$ だから，これは出発点にした (5.4.10) と同じハズである．同じになっているだろうか？

[20] 次の小節で説明する理由から，単に $\log z_1$ と書く代わりに “$\log z_1$” と書いている

[21] 脚注 20 と同じ理由から，“$\log z_2$” と書いた

[22] 脚注 20 と同じ理由から，“$\log z_j$” と書いた

[23] より正確には，いまのところは原点の周りの有限の範囲でしか解析接続を作っていない．しかし，同様のことを行えば，原点を除く任意の領域に接続できることは明らかであろう

一般の z の値を比べるのは後にして，$z=a$ での値を比べてみよう．出発点の $h_0(z)$ の方は普通の実数の対数で $\log a$ である．問題は $h_{12}(z)$ に出てくる "$\log z_{12}$" の方だが，これはその作り方から (5.4.22) の漸化式で定義されていたものである．この漸化式を $j=1,2,\ldots,12$ に対して用いると，解析接続後の "$\log a$" が

$$\text{“}\log a\text{”} = h_{12}(a) = \log a + 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(e^{i\pi/6}-1)^n \tag{5.4.23}$$

で与えられることがわかる．

どうも変だ．(5.4.23) の級数はゼロになりそうにない．この値は何なんだろう？

これを知るには，(5.4.23) の最後の級数の性質をもう少し知る必要がある．よく見ると，この級数は (5.4.2) の級数で $z=e^{i\pi/6}$ とおいたものになっていて，(5.4.2) の級数そのものは対数函数を定義していたのだった．さて，実数函数の時，対数函数は指数函数の逆函数だったから，$z=e^{i\pi/6}$ に対しても，やはり指数函数の逆函数だろうか？もしそうなら，(5.4.23) の最後の級数が $\frac{\pi}{6}i$ と言えるのではないか？

この予想は実際に正しい．詳しくは以下の命題が成り立つ．

命題 5.4.1 (5.4.10) の級数 $h_0(z)$ は，以下に示す範囲で指数函数の逆函数になっている．すなわち，

$$\exp\bigl(h_0(z)\bigr) = z \qquad (|z-a|<a) \tag{5.4.24}$$

および

$$h_0(e^z) = z \qquad (|z|<\log(2a)\,) \tag{5.4.25}$$

がなりたつ．

証明：

(5.4.24) の証明： $|z-a|<a$ では $h_0(z)$ を定義する級数は絶対収束しており，exp は全複素数に対して絶対収束しているから，$\exp\bigl(h_0(z)\bigr)$ を級数に展開して議論すればよい．正直，これは大変なのだが，$\exp\bigl(h_0(z)\bigr)$ を級数展開すると，恒等的に z に等しいことがわかる．これを手っ取り早く見るには（ちょっとズルイ気はするが）， $a>0$ に対しては exp と log が逆函数の関係にあること，つまり $\exp\bigl(h_0(a)\bigr)=a$ であること，を用いると良い．任意の正の実数 a について上の恒等式が成り立っているのだから，それを級数展開したものについてもそうだ，というわけ．

(5.4.25) の証明： こちらもやはり級数展開で証明するが，展開した級数の収束する範囲を見定めるのに注意が必要である．やはり正の実数 a については $h_0(e^a)=a$ なので， $h_0(e^z)$ を級数展開したものは z に等しいはずである．問題は，どのような z の範囲でこの級数展開が許されるかということだ．

実はこの辺りの議論を行うには，多重級数の順序交換を行う必要がある．２重級数の順序交換が出来る十分条件は多重級数が絶対収束していることである．さて，e^z を定義している級数は絶対値を考えると $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}=e^{|z|}$ で押さえられる． $h_0(z)$ 自身は $|z-a|<a$ で絶対収束していたので，$h_0(e^z)$ に出てくる級数は $|e^{|z|}-a|<a$ なら絶対収束が保証される．この条件は $|z|\le\log(2a)$ と同値． □

と言うことで本題に戻る．上の命題から，(5.4.23) 右辺の級数の値は確かに $\frac{\pi}{6}i$ であることがわかった．つまり，

$$\text{“}\log a\text{”} = \log a + 2\pi i \tag{5.4.26}$$

となっている．解析接続して一周し，$z=a$ に戻ったつもりだったのに，$\log a$ の値が $2\pi i$ ずれてしまった！

5.4.3 $\log z$ の多価性とリーマン面

（音声： 29:00 〜）

解析接続して戻ったときに価がずれるのは $z = a$ だけではない．$h_{12}(z)$ と $h_0(z)$ の表式を比べると，この差は（収束域内の）他の z でも同様におこっていることがわかる．つまり，

$$h_{12}(z) = h_0(z) + 2\pi i \qquad (|z-a| < a) \tag{5.4.27}$$

が成り立っているのである．

もう一回，やったことを整理しておこう．我々はまず，$z = a$ 中心の級数展開 h_0 (5.4.10) から出発した．そして，反時計回りに原点の周りを回って解析接続をしてきた．すると，丁度一周して戻ってきた $h_{12}(z)$ と $h_0(z)$ の間には $2\pi i$ だけの差が出てしまった (5.4.27)，と言うわけ．

実はこのようなことはもっと一般に起こる．計算は省略するが，$h_{12}(z)$ から出発してもう一回反時計回りに回って解析接続すると，今度は $h_{24}(z)$ になるが，$h_{24}(z) = h_{12}(z) + 2\pi i = h_0(z) + 4\pi i$ が成り立つ．更に反時計回りに回り続けると，価が 2π づつ増えていく．一方 $h_{12}(z)$ から出発して時計回りに（今までと逆向き）に解析接続すると，今度は h_0 に戻るし，更に時計回りに回り続けると，$-2\pi i$ ずつ，価が下がっていく．

と言うわけで，$\log z$ を定義していくと，$2\pi i$ づつ価がずれたものが一般出てきて，必然的に多価函数になってしまった．つまり，$z = r\,e^{i\theta}$ $(r > 0, \theta \in [0, 2\pi))$ と言うものの対数は

$$\log(z) = \log r + i\theta + 2n\pi i \qquad (n \text{ は任意の整数}) \tag{5.4.28}$$

となっている．これは「対数函数は指数函数の逆函数」と言うことからも理解できる．と言うのは，$z = r\,e^{i\theta}$ $(r > 0, \theta \in [0, 2\pi))$ が与えられた時，この z を $z = re^{(2n\pi+\theta)i}$ と表すことも出来るわけで，となれば $\log z = i(2n\pi+\theta)$ となるのもうなずける．

しかし，数学では多価函数と言うものは考えにくい．そこで，函数をあくまで一価にするために，土台になっている複素平面の方が何層にもなっていると考える．これを「リーマン面」と言う．ここらから先，興味のある人はいろいろな教科書や参考書を見てください．(教科書では 1.10 節に少しだけ解説があります．)

5.4.4 $z^{1/2} = \sqrt{z}$ の多価性とリーマン面

最後に例をもう一つ．$z^{1/2}$ を log と同じように解析接続すると，やはり多価性が現れる．ただし，今度は多価性は２価どまりで，つまり原点の周りに２周すると，元の価に戻ることがわかる．興味のある人は計算してみることをお奨めする．(ついでに：n を正の整数とするとき，$z^{1/n}$ ならば n 価になる．)