複素函数論（原）　第 12 回（7/29）留数計算の実数積分への応用です．
この辺りになると，教科書が十分明快だと思いますが，ちょっとだけ書きました．説明も教科書を使う部分があります．

4.4 実数積分への応用（教科書 4.4 節）

応用上は非常に大事だが，教科書の説明がかなり充実している．そこでこの講義ノートでは，いくつかの典型的な問題例を列挙するにとどめ，詳しい説明の大部分は教科書に任せる．

4.4.1 三角函数の有理函数の積分

一つ目の応用は，教科書の pp.149-150 に載っているもので，典型的な例は p.150 の例 1 である：

$$\int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{1}{\sqrt{2} - \cos\theta} = 2\pi \tag{4.4.1}$$

このような $\sin, \cos$ の函数の積分の場合は，$z = e^{i\theta}$ と置くつもりになれば

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}, \qquad d\theta = \frac{dz}{iz} \tag{4.4.2}$$

となる．積分範囲が問題だが，0 から 2π の 1 周期に渡っての積分であれば，$z = e^{i\theta}$ が単位円上を一周するから，問題の積分は $|z| = 1$ の円についての積分になる．このような閉曲線についての積分であれば，これまでに散々やってきたように「コーシーの積分定理」や「留数計算」を用いて計算できることがある（多い）．

というわけで，$\sin, \cos$ の **1 周期に渡っての積分**であれば，この方法を試してみる価値はある．また，問題の積分は 1 周期に渡っての積分でなくても，うまくそのように変形できるなら，やはりこの方法が使える（ことがある）．

具体例は教科書（とその問題）を見ていただきましょう．

4.4.2 x の有理函数の，$-\infty$ から ∞ での積分

（音声： 07:32 〜）

教科書は一般的に議論しているが，まずは具体例を見るのが早い．教科書 p.152 の例 2 を考えよう：

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \tag{4.4.3}$$

これはそのままではやりにくいが，被積分函数が偶函数だから，積分区間を $(-\infty, \infty)$ に伸ばしたものの値の半分を求めても良い．

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \times \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^4} \tag{4.4.4}$$

右辺の積分については，(天下りだが）わざわざ上半複素平面に半径 R の半円を付け加えて考える（以下で詳述）．

つまり，実軸上の $[-R, R]$（向きは右向き）を $C_1(R)$ と書くと，上の積分は

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^4} = \int_{C_1(R)} \frac{dz}{1+z^4} \tag{4.4.5}$$

と，複素線積分の形で書くことができる．(複素線積分と言っても，この段階では z は実軸上にあるから，今までの実数の積分そのものであるが.)

さて，我々はこれまで複素線積分をたくさん考えたが，その大半は,「閉曲線」に関するものであった．特に，最近の「留数積分」というのは，閉曲線に関する積分の値を,「留数」で表すものだった．今回も（天下り的ではあるが)，無理に閉曲線に関する積分を使ってみよう．

というわけで，閉曲線を使うために，上半平面にある半円（中心は原点，半径は R，向きは反時計回り）を C_2 としてみる．作り方から，C_1+C_2 は実軸上の線分 C_1 と，それを直径とする半円 C_2 で，これはちょうど閉曲線になっている（教科書の図 4.5）．

そこで，この閉曲線についての線積分を考えると，留数積分の定理が使えるはずだ．つまり，

$$\int_{C_1+C_2} \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \times (\text{この半円内の留数の和}) \tag{4.4.6}$$

さて，被積分函数の特異点はその分母のゼロ点，つまり $z^4=-1$ にある．これは

$$z = e^{i\pi/4}, \qquad e^{i3\pi/4}, \qquad e^{-i\pi/4}, \qquad e^{-i3\pi/4} \tag{4.4.7}$$

の 4 つである（教科書の p.152, 図 4.6）．このうち，問題の半円 C_1+C_2 の中にあるのは，

$$z = e^{i\pi/4}, \qquad e^{i3\pi/4} \tag{4.4.8}$$

の二つであり，それぞれにおける留数の値は

$$-\frac{e^{i\pi/4}}{4}, \qquad \frac{e^{-i\pi/4}}{4} \tag{4.4.9}$$

である．結果として，$R>1$ では，

$$\int_{C_1+C_2} \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \times \Bigl(-\frac{e^{i\pi/4}}{4} + \frac{e^{-i\pi/4}}{4}\Bigr) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \tag{4.4.10}$$

が得られた．

さて，この積分と，我々のほしい積分の関係はなんだろうか？我々は $R\to\infty$ の極限での $\displaystyle\int_{C_1} \frac{dz}{1+z^4}$ がほしい．それで上では

$$\int_{C_1} \frac{dz}{1+z^4} + \int_{C_2} \frac{dz}{1+z^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \tag{4.4.11}$$

を得た．**もし，$R\to\infty$ で C_2 に関する積分がゼロになるなら**，残るは C_1 に関する，我々のほしい積分になって，大変によろしい．

本当にそんな虫の良い話があるのか?という気がするのだが，これは正しい．実際，$C_2(R)$ に関する積分は，$z=re^{i\theta}$ と書いて

$$\int_{C_2} \frac{dz}{1+z^4} = \int_0^\pi d\theta\, i\, R\, e^{i\theta}\, \frac{1}{1+R^4 e^{4i\theta}} \tag{4.4.12}$$

と書けるので，絶対値をとって（$R>1$ を考えている）

$$\left|\int_{C_2} \frac{dz}{1+z^4}\right| \le \int_0^\pi d\theta\, R\, \frac{1}{R^4-1} \le \frac{\pi R}{R^4-1} \tag{4.4.13}$$

を得る．$R\to\infty$ で，これはもちろん，ゼロに行く．よって，

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_1} \frac{dz}{1+z^4} = \lim_{R\to\infty} \int_{C_1} \frac{dz}{1+z^4} = \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \tag{4.4.14}$$

を最終的に得る．求める積分は上の左辺（の半分）だから，答えは $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$．

復習すると，

- もともとは実軸上の $(-\infty,\infty)$ での積分だったものに，
- 上半平面での大きな半円を付け加えて留数積分の問題にして，留数を用いて半円に関する線積分の値を求め
- 付け加えた半円の寄与は実質的にゼロ，であることを示して，結局,「ほしい積分が留数積分の結果そのものだ」という

戦略である．非常に技巧的な気もするが，これは案外，役に立つ．特に，次の小節で説明するフーリエ積分型の積分には効果的である．

なお，問題によっては，上半平面ではなく，下半平面での半円（ただし，向きは時計回り）を加えることもある．実際，この問題では下半平面での半円を加えても全く同様に議論できるので，各自やってみると良い．(次の小節で説明するフーリエ積分型の積分では，どちらの半円を加えるかが重要になることが多いが.)

4.4.3 フーリエ積分型の積分

（音声： 18:45 〜）

ここの内容は，教科書の pp.153-154 上部の内容に相当する．ただし，僕は $\cos sx, \sin sx$ の代わりに e^{isx} を用いて例を示したい．皆さんは，教科書の pp.153-154 上部もしっかり読み込んでいただきたい．

例題としては，$k>0$ と実数 s に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{x^2+k^2}\,dx = \frac{\pi}{k} e^{-k|s|} \tag{4.4.15}$$

であることを示す．

この問題の解き方，最初の方は前の小節とほぼ同じである．この積分は絶対収束しているので，我々は

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{isx}}{x^2+k^2}\,dx \tag{4.4.16}$$

を調べれば良い．これを閉曲線に関する積分に直すために,「原点中心，半径 R，反時計回り」で上半平面にある半円 C_2 を加える[17]．前の小節のように議論すると $R>k$ で,

$$\int_{C_1+C_2} \frac{e^{isz}}{z^2+k^2}\,dz = 2\pi i \times (\text{半円内の留数}) = 2\pi i \times \frac{e^{-sk}}{2ik} = \frac{\pi\, e^{-sk}}{k} \tag{4.4.17}$$

となる．

さて問題は，C_2 からの寄与が，$R\to\infty$ でゼロになるのか否かである．$z = Re^{i\theta}$ と書くと，いつも通りに

$$\int_{C_2} \frac{e^{isz}}{z^2+k^2}\,dz = \int_0^{\pi} d\theta\, i\, Re^{i\theta} \frac{\exp(isRe^{i\theta})}{R^2\, e^{2i\theta}+k^2} \tag{4.4.18}$$

と書けるので,

$$\left| \int_{C_2} \frac{e^{isz}}{z^2+k^2}\,dz \right| \le \int_0^{\pi} d\theta\, R\, \frac{\exp(-sR\sin\theta)}{R^2-k^2} = 2\int_0^{\pi/2} d\theta\, R\, \frac{e^{-sR\sin\theta}}{R^2-k^2} \tag{4.4.19}$$

となる．

$s\ge 0$ なら問題ない．この場合 $e^{-sR\sin\theta} \le 1$ だから，上のは

$$\le 2\int_0^{\pi/2} d\theta\, R\, \frac{1}{R^2-k^2} \le \frac{\pi\, R}{R^2-k^2} \tag{4.4.20}$$

となって，これは $R\to\infty$ でゼロに行く．よかった !!

ところが，$s<0$ の場合は，これでは困る．途中で不等式を使ったが，少なくとも最後の不等式の $e^{-sR\sin\theta}$ は，$s<0$ なら，$R\to\infty$ で無限大に大きくなる！ これでは，前の小節のような議論ができない．

問題の解決は，付け加える半円を下半平面に置くことで解決される．つまり,「原点中心，半径 R，時計回り」の半円 C_3 を，下半平面に付け加える（今回は向きが時計回りであることに注意）．こうすると C_1+C_3 はやはり閉曲線になる．今度は下半平面にある極の留数を拾ってかつ符号が変わるから,

$$\int_{C_1+C_3} \frac{e^{isz}}{z^2+k^2}\,dz = -2\pi i \times (\text{半円内の留数}) = -2\pi i \times \frac{e^{sk}}{-2ik} = \frac{\pi\, e^{sk}}{k} \tag{4.4.21}$$

となる．さらにこの時，半円 C_3 からの寄与は

$$\int_{C_3} \frac{e^{isz}}{z^2+k^2}\,dz = \int_0^{-\pi} d\theta\, i\, Re^{i\theta} \frac{\exp(isRe^{i\theta})}{R^2\, e^{2i\theta}+k^2} \tag{4.4.22}$$

と書けるので,

$$\left| \int_{C_3} \frac{e^{isz}}{z^2+k^2}\,dz \right| \le \int_{-pi}^{0} d\theta\, R\, \frac{\exp(-sR\sin\theta)}{R^2-k^2} = 2\int_{-\pi/2}^{0} d\theta\, R\, \frac{e^{-sR\sin\theta}}{R^2-k^2} \tag{4.4.23}$$

[17] s の正負によって，これではうまくいかない場合がでてくる．これは後のお楽しみ

となる．ところが !! 今回は $\theta < 0$ なので，$-\sin\theta \geq 0$ であり，$s < 0$ と合わせると $e^{-sR\sin\theta} \leq 1$ が成り立つ．従って，今回は

$$\left| \int_{C_3} \frac{e^{isz}}{z^2+k^2}\,dz \right| \leq \frac{\pi\,R}{R^2-k^2} \tag{4.4.24}$$

が結論できて，これはやはり $R \to \infty$ でゼロに行く．

ということで，$s < 0$ の場合，求める積分は

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_1} \frac{e^{isz}}{z^2+k^2}\,dz = \frac{\pi\,e^{sk}}{k} \tag{4.4.25}$$

となる．s の正負に関わらない表現としては，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{x^2+k^2}\,dx = \frac{\pi}{k} e^{-k|s|} \tag{4.4.26}$$

となり，最初の答えに戻った．

> 今回の肝は，s の正負に応じて，積分路（付け加える半円）を上半平面にするか，下半平面にするか，よく考えなければならないことだ．ここを間違うと,「どの極の留数を拾うか」も間違ってしまい，ひどい答えになってしまうので，要注意である．この点は，例年強調しているが，かなりの人が間違うから注意するように．レポートでも，ここ（上半平面 vs 下半平面）を間違ったらゼロ点とするつもりである．

4.4.4 コーシーの主値積分

（音声： 33:53 〜）

最後に，コーシーの主値積分について簡単に触れておく．

実数 x の函数 $f(x)$ が，$x = a$ で特異点を持つ（特に発散する）時，積分（$b < a < c$）$\displaystyle\int_b^c f(x)dx$ は

$$\int_b^c f(x)dx = \int_b^a f(x)dx + \int_a^c f(x)dx = \lim_{\epsilon_1\to+0} \int_b^{a-\epsilon_1} f(x)dx + \lim_{\epsilon_2\to+0} \int_{a+\epsilon_2}^c f(x)dx \tag{4.4.27}$$

と定義する（ことは 1 年の微積で「広義積分」としてやったはず）．これは全くその通りなのだが，時折，この積分を敢えて，以下の意味で定義することがある：

$$\text{pr.v.} \int_b^c f(x)dx := \lim_{\epsilon\to+0} \left(\int_b^{a-\epsilon} f(x)dx + \int_{a+\epsilon}^c f(x)dx \right) \tag{4.4.28}$$

ここで pr.v とは principal value の略で，この積分のことを**コーシーの主値**（または主値積分）という．

通常の広義積分では定義できないものも，主値積分としてなら定義できることは多い．たとえば，

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx \ \text{ は定義できないが，} \quad \text{pr.v.} \int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx = 0 \tag{4.4.29}$$

これでいうべきことはほとんど終わりなのだが，前小節までの流れと絡めて「上半平面（または下半平面）に半円を付け加える」ことを考えると，実軸上の留数の寄与がどうなるか，気になるところである．これについては，教科書の p.155 (14) 式が一応の結果である．ただし，このようなものは下手に一般論をやろうとするより，具体的な問題を丁寧に解いて納得するのが良い．p.155 の例 4 など，おすすめである．