複素函数論（原）　第 11 回（7/22）留数計算です．
この辺りになると，教科書が十分明快だと思うので，今日の講義ノートは 1 ページだけ．説明も教科書を使う部分があります．

4.3　留数計算（教科書 4.3 節）

まず，教科書では 4.2 節の最後に書いてあることだが，以下を定義する：

定義 4.3.1 (有理型函数) 領域 D で定義された複素函数 f が，その極を除いては正則である（つまり，f の特異点は全部，極である）場合，f は**有理型**（meromorphic）函数である，と言う．

この有理型函数に関しては，以下の著しい定理が成り立つ．ある種の線積分の結果が，実際に積分を計算することなく,「留数」を計算するだけでわかるのだ．

定理 4.3.2 (Residue Theorem；教科書 p.147, 定理 1) 領域 D で有理型である函数 f があり，その内部まで D 内に含まれる**反時計回りの**単純閉曲線 γ を考える．γ 上に f の極がないとすると，

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f; z_j) \tag{4.3.1}$$

ここで z_j についての和は γ 内の全ての極にわたってとる．

次に留数の計算法：基本的には定義に従ってやればよい．有理型函数 f の極 $z = \alpha$ での留数を求めよう．定義から，留数とは f の Laurent 展開

$$f(z) = \sum_n a_n (z-\alpha)^n \tag{4.3.2}$$

の係数 a_{-1} のことであった．

- 一位の極の場合：一位の極の場合は Laurent 展開が $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$ であるから，$(z-\alpha)f(z)$ を考えて $z = \alpha$ とおくと丁度 a_{-1} が得られる．つまり，

$$a_{-1} = \lim_{z\to\alpha} (z-\alpha) f(z) \tag{4.3.3}$$

- ２位以上の極の場合：この場合は少し厄介である．と言うのも，$f(z)$ は $(z-\alpha)^{-1}$ より強く発散しているので一位の極のようにはいかない．そこで，次のトリックを用いる（天下りだが）．N-位の極の場合を考える．$(z-\alpha)^N f(z)$ を考えると

$$(z-\alpha)^N f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n (z-\alpha)^{n+N} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{-N+j} (z-\alpha)^j \tag{4.3.4}$$

となる．これを $(N-1)$-回微分すると，a_{-1} のところが丁度定数になって，$z \to \alpha$ とする事ができる．その際，余分な $(N-1)!$ がかかるので結局

$$a_{-1} = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z\to\alpha} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} \Bigl((z-\alpha)^N f(z) \Bigr) \tag{4.3.5}$$

と求められる．