複素函数論（原）　第 10 回（7/15）複素函数の最後の大きな章，Laurent 展開に入ります

4 Laurent 展開と留数

いままでは主に，正則な函数を扱ってきた．しかし，我々が扱いたい函数は正則とは限らない．最も簡単な例としても，$\dfrac{1}{1+z}$ のような分数函数などがすぐに思いつく．そこで，これからはこのような函数も扱えるように,「有理型」の函数を考えていく．なお，思いがけない副産物として,「留数による積分計算」ができるようになる．

4.1 Laurent 展開（教科書 4.1 節）

（音声： 03:22 〜）

今まではある領域（特に適当な円盤内）で正則な函数を考えてきた．しかし，これからは対象を拡げて，ある**円環**内で正則な函数を考える．ここで言う円環とは，適当な $\alpha \in \mathbb{C}$ と $0 \le r < R \le \infty$ に対して，

$$A(\alpha, r, R) := \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, r < |z-\alpha| < R\} \tag{4.1.1}$$

と書けているような領域のこと．

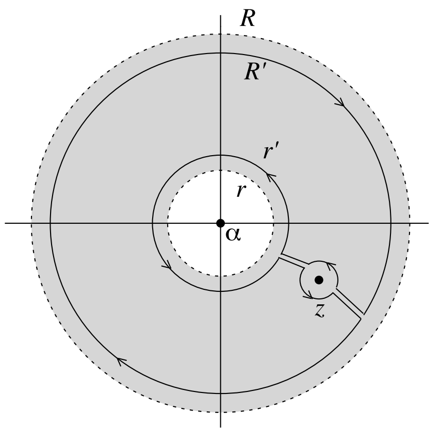
この節の主題は，この $A(\alpha, r, R)$ では正則な（でも，それ以外では正則でないかも知れない）函数 $f(z)$ である．例としては，

$$\frac{1}{1+z}, \qquad \frac{z^3}{2+3z+z^2}, \qquad \frac{e^z}{(z-2)^4} \tag{4.1.2}$$

など，いくらでもある.（特別な場合として，$|z-\alpha| < R$ で正則な函数も考えるが，これらは目新しいことはないので，この節では主役を務めない）．

さて，このような函数に対する $\sum_n a_n(z-\alpha)^n$ の形の級数展開を考えたい．すぐにわかることは，今まで考えていたような冪級数展開は不可能だと言うこと（なぜなら，もし可能なら，函数は $|z-\alpha| < R$ で正則になってしまうが，今は $|z-\alpha| < r$ くらいでは正則でない点もあるのを考えている）．そこで，以下のように発見法的に考えてみる．

今まで何度もやってきたトリックであるが，$r < r' < R' < R$ なる r', R' を固定して，積分路 C を図のようにとる．また，$r' < |z-\alpha| < R'$ なる z を固定し，$\epsilon \ll 1$ を十分に小さくとる．



すると，Cauchy の積分定理から（円上の積分は全て反時計回り）[15]，

$$0 = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|\zeta - z| = \epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{|\zeta-\alpha| = r'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{|\zeta-\alpha| = R'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{4.1.3}$$

[15] 巧妙に，この積分路の周囲と内部では $f(\zeta)/(\zeta - z)$ は正則なようにしてあることに注意

が成り立つ（積分の往復部分は，今までと同じようにキャンセル）.「Cauchy の積分公式」を思い出すと，$|\zeta - z| = \epsilon$ の積分は $2\pi i f(z)$ に等しいことがわかるので，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = R'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = r'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{4.1.4}$$

が得られる．$f(z)$ の値を，$|\zeta - z| = R'$ と $|\zeta - z| = r'$ の二つの円での線積分（の差）で書くことができた．

さて，ここまで来ると，定理 3.4.1 の証明をなぞることができる．すなわち，$|\zeta - \alpha| = R'$ については $\left|\dfrac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right| < 1$ なので，定理 3.4.1 の証明と全く同じに

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \alpha} \times \frac{1}{1 - \frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}} = \frac{1}{\zeta - \alpha} \times \sum_{n=0}^{\infty} \Bigl(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\Bigr)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\alpha)^n}{(\zeta-\alpha)^{n+1}} \tag{4.1.5}$$

とする．一方，$|\zeta - \alpha| = r'$ については $\left|\dfrac{\zeta-\alpha}{z-\alpha}\right| < 1$ なので，

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{z - \alpha} \times \frac{1}{1 - \frac{\zeta-\alpha}{z-\alpha}} = \frac{-1}{\zeta - \alpha} \times \sum_{n=0}^{\infty} \Bigl(\frac{\zeta-\alpha}{z-\alpha}\Bigr)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta-\alpha)^n}{(z-\alpha)^{n+1}} \tag{4.1.6}$$

とできる．これらを (4.1.4) へ代入して積分と級数の交換を行うと（級数が絶対収束しているので交換可能）

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|\zeta - z| = R'} f(\zeta) \frac{(z-\alpha)^n}{(\zeta-\alpha)^{n+1}} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|\zeta - z| = r'} f(\zeta) \frac{(\zeta-\alpha)^n}{(z-\alpha)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-\alpha)^{-n} \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

と書けることがわかった．ここで，

$$\begin{aligned} a_n &:= \int_{|\zeta - z| = R'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}} \frac{d\zeta}{2\pi i} \qquad (n \ge 0) \\ a_{-n} &:= \int_{|\zeta - z| = r'} f(\zeta)(\zeta-\alpha)^{n-1} \frac{d\zeta}{2\pi i} \qquad (n \ge 1) \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

以上をまとめると，以下の定理の前半になる．

定理 4.1.1 (Laurent 展開；教科書 p.132, 定理 1) 複素函数 $f(z)$ が環状領域 $A(\alpha, r, R)$ で正則だとすると，$A(\alpha, r, R)$ 内の任意の点 z において，$f(z)$ は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-\alpha)^{-n} \tag{4.1.9}$$

の形の Laurent 展開を持つ．ここで係数 a_n, a_{-n} は一意に定まり，(4.1.8) で与えられる．

一意性の証明：上では (4.1.8) の a_n などを使えば級数の形に書けることを示したが，他の係数の取り方までは否定していない．ので，一意性を示しておこう．それには，(4.1.9) の形の級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-\alpha)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} (z-\alpha)^{-n} \tag{4.1.10}$$

があったとして，係数 b_n, b_{-n} を決定してやればよい．しかし，上の両辺に $(z-\alpha)^{-n-1}$ をかけて両辺を $|z-\alpha| = R'$ で積分すると（級数が絶対収束しているから項別積分ができる），

$$2\pi i b_n = \int_{|z-\alpha| = R'} f(z)\,(z-\alpha)^{-n-1}\,dz \tag{4.1.11}$$

が得られ，これは (4.1.8) の a_n と一致する．同様に，$(z-\alpha)^{n-1}$ をかけて両辺を $|z-\alpha| = r'$ で積分すると $b_{-n} = a_{-n}$ が結論される． □

4.2 特異点の分類と零点（教科書 4.2 節）

（音声： 21:57 〜）

さて，正則でない函数にはいろいろな種類がある．その一端を見てみよう．まずは特異点の定義から：

定義 4.2.1 (特異点) 点 $z=\alpha$ で $f(z)$ で微分不可能の時，α を $f(z)$ の**特異点** (singular point) と言う．特に，α の近傍において，$f(z)$ が α **以外では正則だが，** α **では微分可能でない**場合，α を f の**孤立特異点** (isolated singular point) と言う．

さて，α が $f(z)$ の孤立特異点の場合，定理 4.1.1 によって，$f(z)$ は α の近傍では（ただし $z\neq\alpha$）

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-\alpha)^{-n} \tag{4.2.1}$$

と展開される．このとき，右辺の第２項 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-\alpha)^{-n}$ をこの Laurent 展開の**主要部 (principal part)** と言う[16]．また，係数 a_{-1} を $f(z)$ の $z=\alpha$ における**留数 (residue)** と言い，$\mathrm{Res}(f;\alpha)$ と書く．

孤立特異点 α はその周りでの Laurent 展開（主要部）によって，以下のように分類される．

- **除去可能な特異点 (removable singularity)**：主要部がゼロの場合を除去可能な特異点という．これは全然面白くない（以下の定理 4.2.2 も参照）．大体，$f(z)$ が $z=\alpha$ でのみ不連続の場合に相当し，$f(\alpha)$ を改めて $\lim_{z\to\alpha}f(z)$ と定義し直せば解決する．
- **極 (pole)**：主要部がゼロではないが，有限和になっている（つまり，十分大きな n では $a_{-n}\equiv 0$）場合を極という．特に，主要部が
$$\sum_{n=1}^{k}\frac{a_{-n}}{(z-\alpha)^n},\qquad a_{-k}\neq 0 \tag{4.2.2}$$
の時，$z=\alpha$ は f の k-位の極である，という．また，k をこの極の**位数**という．
- **真性特異点 (essential singularity)**：主要部が（ゼロでない）無限項の和の場合を真性特異点という．いくらでも発散の強い $(z-\alpha)^{-n}$ が現れる，と言う意味で，深刻な特異点である．

以下，それぞれの場合を特徴づける定理を述べる．まず，除去可能特異点から．これは要するに，もともと $z=\alpha$ でも正則だった函数を持ってきて，無理矢理 $f(\alpha)$ の値を不連続になるように付け替えたようなものである．実際，以下が成り立つ．

定理 4.2.2 (除去可能特異点について：Riemann) $z=\alpha$ が f の孤立特異点で，かつ f が $z=\alpha$ の近傍で有界であるなら，α は f の removable singularity である．

次に真性特異点であるが，これは以下の定理の通り，かなり変態である．

定理 4.2.3 (真性特異点について：Weierstrass, 教科書の「ピカールの定理」の類似) $z=\alpha$ が f の真性特異点の場合，任意の複素数 β に対して α に収束する列 $\{z_n\}$ を適当にとることにより，$\lim_{n\to\infty}f(z_n)=\beta$ ならしめることができる．

最後に極について．これはある意味で簡単で，極では絶対に $f(z)$ が発散する：

系 4.2.4 (Pole の条件) f の孤立特異点 α が f の pole である必要十分条件は $\lim_{z\to\alpha}|f(z)|=\infty$ なること．

[16] なぜ「主要」かと言うと，f の特異性を表しているから

次に，極に対比して零点を考える．

定義 4.2.5 (零点) 解析函数 $f(z)$ がある．

- $f(\alpha) = 0$ の時，α を $f(z)$ の**零点** (zero) という．
- $f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \cdots = f^{(n-1)}(\alpha) = 0$，かつ，$f^{(n)}(\alpha) \neq 0$，のとき，$\alpha$ を $f(z)$ の n **位の零点**という．

以前にやった「一致の定理」などから，零点には以下の性質があることがわかる：

定理 4.2.6 (定数函数でない解析函数の零点は孤立；教科書の p.141，定理 3) 定数函数でない解析函数の零点は孤立している．つまり，$f(\alpha) = 0$ の場合，α の周りに十分小さい近傍を取れば，この中では $z \neq \alpha$ で有る限り，$f(z) \neq 0$ である．

零点をことさらに強調するのは，解析函数の特異点が，往往にして，その函数の「分母」の零点として現れるからである．教科書では「定理 4」になってるが，例を見れば明らかだろう．たとえば，

$$f(z) = \frac{1+z^2}{z+z^2} \tag{4.2.3}$$

の特異点は $z = 0, -1$ だが，これは分母の零点である．また，

$$f(z) = \frac{\sin z}{1+z^2} \tag{4.2.4}$$

の場合も，特異点 $z = \pm i$ は分母の零点である．

最後に**無限遠点の扱い**について．

等角写像をやっていないので，ここでは結果だけ述べる．「無限遠点」での $f(z)$ の特異性などに言及することがあるが，これは

$$g(w) = f(1/w) \tag{4.2.5}$$

という新しい函数を定義して，この g の $w = 0$ での特異性で判断する．(大雑把にいうと，$w = 0$ は $|z| = \infty$ という感じだから，無限遠点を $w = 0$ に変数変換した感じ．)