

複素函数論 (原) 第 1 回: 今日高校の復習と準備だけ

0 初めに

0.1 本論に入る前に記号のお約束

$a < b$ を 2 つの実数, n を非負 (負でない) 整数とする.

- 整数の全体は \mathbb{Z} , 自然数 (1 以上の整数) の全体を \mathbb{N} , 有理数の全体を \mathbb{Q} , 実数の全体は \mathbb{R} , 複素数の全体は \mathbb{C} と書く.
- 集合 A の要素を大学では「元 (げん)」ともいう. (例) 2 は \mathbb{Z} の元である. $\sqrt{2}$ は \mathbb{Q} の元ではない.
- a が集合 A の元であるとき, $a \in A$ または $A \ni a$ と書く.
- 高校までと異なり, 「 $a < b$ または $a = b$ 」を $a \leq b$ と書く. 同様に, 「 $a > b$ または $a = b$ 」を $a \geq b$ と書く.
- $a < x < b$ なるすべての実数の集合を (a, b) と書き, 开区間 という.
- $a \leq x \leq b$ なるすべての実数の集合を $[a, b]$ と書き, 闭区間 という.
- 高校と同じく, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ は n の階乗である. ただし, $0! = 1$ と約束する.
- なお, この講義では, 原の趣味で, 「線形」を「線型」, 「関数」を「函数」, 「共役」を「共軛」と書くことが多い.

(用語の注) あるものがたった一通りに決まる (存在する) とき, 業界用語では **〇〇が一意に決まる (存在する)** という. この表現『一意』は頻出するから覚えよう (英語の *unique, uniquely* の訳).

0.2 複素函数論とは (この講義の目指すこと, 教科書には該当部分なし)

手短かに言って, 複素函数論とは, 函数 $f(z)$ の色々な性質を調べて行くものである. ただし, ここで z は一般の複素数で $f(z)$ の値自身も複素数である場合を考える.

独立変数 z の範囲を複素数にただけでどれほどの違いがあるのか, すぐには予想できないだろう. 実際, これ以上の条件をつけなければそんなに面白いことは起こらない. 大体, 実数函数を適当に複素数に拡張することはできるから, ここままでは何も新しいことはない.

ところが, 函数の「微分可能性」を要求すると, 事態は一変する. 実函数の場合には思いもよらなかったことが起こるのである. この点を予告するため, 以下の問題を考えてみよう.

問 1.1: 数列 $(a_n)_n$ の初めの数項が $0, 1, 2, 3, 4, 5$ と与えられている時, この後を予想せよ.

答 1.1: もちろん, 上の問いは典型的な悪問である. 「自然」な解としてはもちろん $6, 7, 8, 9, \dots$ と続くのだろうが, 問題文を見る限りこれに限る必要は毛頭ない. $0, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2,$ などでも, さらに天邪鬼に, $0, 1, 2, 3, 4, 5, \pi, 10^{100}, -0.9876543,$ などでも何でもアリだ.

では, 次のはどうだろうか?

問 1.2: 実数全体で定義された函数 $f(x)$ があって, その $0 \leq x \leq 1$ での値は $f(x) = x$ であることがわかっている. この時, $0 \leq x \leq 1$ 以外での $f(x)$ の形を予想せよ.

答 1.2: またもや, 問題の方が失格である. 問題文の限りでは $0 \leq x \leq 1$ 以外での $f(x)$ は何でもあり, である.

仕方ないので、少しアプローチを変えてみよう。上の問2では $f(x)$ に課した条件が緩すぎて話にならない。そこで：

問 1.3 : 上の問2の $f(x)$ に何とか条件をつけて、 $0 \leq x \leq 1$ 以外での $f(x)$ が一意に決まるようにせよ。

どんな条件をつければいいだろうか？ $f(x)$ はもちろん、連続でないと困る。(連続でない $f(x)$ も許すなら明らかに「何でもアリ」になってしまうので。) でもこれだけでは $x = 1$ などで折れ曲がることも可能だから、それを避けるために、微分可能性も要求したい。これで十分だろうか？

実数軸の上で考えている限り、いくら微分可能性を要求しても $f(x)$ は一意には決まらない。(一階だけでなく、「何階でも微分可能」を要求したとしてもダメ。) 典型的な例は以下のものである：

$$f(x) = \begin{cases} x + e^{1/x} & (x < 0) \\ x & (0 \leq x \leq 1) \\ x - 2e^{-1/(x-1)^2} & (x > 1) \end{cases} \quad (0.2.1)$$

この関数は、全ての実数 x において、何階でも微分可能である(各自、確かめよ)。なので、これだけの条件では「 $0 \leq x \leq 1$ 以外での $f(x)$ 」を一意に決めることはできない。(上の $f(x)$ と、「すべての x において $f(x) = x$ である関数」と、少なくとも二つの $f(x)$ が存在するので。)

ところが、 x を複素数まで拡張し、そこでも(複素変数に関する)微分可能性を要求すると、 $f(x)$ は見事に一意に定まる。(結果はもちろん、 $f(z) = z$ というもの。) 一般に、複素数を引数とする関数(つまり複素関数)が微分可能である場合、小さい領域での関数の振る舞いから複素平面全体での振る舞いが自動的に定まってしまう。

これが微分可能な複素関数の大きな特徴である。ある意味で「複素関数としての微分可能性」を要求すると、「自然に」関数が定まる。つまり、微分可能な関数(正確には正則関数)の世界では「変な例」がないのである！物理などで出会う関数にはこの手のものが多いが、それは数学的には「関数の正則性」を仮定するものとも考えられる。また、そうであるからこそ、限られた実験データから本来の関数の形を推測したりすることも許されてくるのである。この点で解析関数は大変に自然であり、これが複素関数論を勉強する大きな(最大の?)理由である。

微分可能な複素関数にはこれ以外にも大きな特徴がある。著しいものを挙げると：

- 一致の定理 (一部の領域での情報から全体が決まる；これまでに述べてきた問 1.3 など)。
- 一回微分可能なら実は無限回微分可能。
- Cauchy の積分定理、積分公式 (関数のある点での値を、他の部分での積分であらわすことができる)。
- いつでも冪級数展開ができる。
- 極限の交換が容易 ($f_n \rightarrow f$ が一様収束なら、 f_n の高階導関数も f の高階導関数に収束。則ち、極限と微分の順序を入れ替えられる)。
- 留数計算。複素関数や実数関数の積分を、実際に積分を計算することなく、「留数」という数を計算するだけで計算できる。工学部では実用上、非常に大事。

これらは、それ自身が数学として非常に美しいだけでなく、実用上も大変に大事だ。この理由で、みなさんは複素関数論を半年に渡って学習することになっているのだ。

1 複素数と複素関数

1.1 複素数と複素平面 (高校の復習, 教科書の 1.1 節)

高校でかなり学んだように, 複素数とは $x + iy$ (x, y は実数, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位) の形の数のことである. このとき, x を**実部**, y を**虚部**と言う. この講義では (また, 大抵の数学の本でも) 複素数の全体を \mathbb{C} で表す:

$$\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \text{ は実数, } i \text{ は虚数単位}\} \tag{1.1.1}$$

この節の残りの部分では x, y, a, b, c, d は実数, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位を表す.

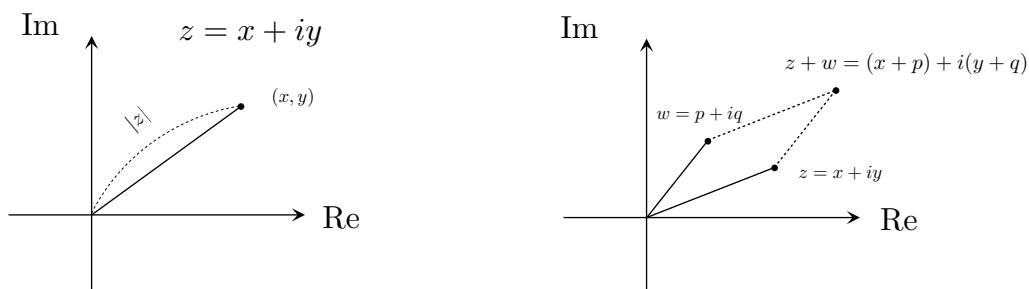
複素数 $z = x + iy$ に対し, $\bar{z} := x - iy$ を z の**複素共軛**と言う. また, $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ を z の**絶対値**と言う. 絶対値については $|z|^2 = z\bar{z}$ が成り立つ.

複素数の演算を簡単に復習しておく: 以下のように, 「和」「差」「積」「商」を定義する.

- 加法と減法: $z_1 = a + ib, z_2 = c + id$ に対して, 複合同順で $z_1 \pm z_2 := (a \pm c) + i(b \pm d)$.
- 乗法: $z_1 = a + ib, z_2 = c + id$ に対して, 積 $z_1 z_2 := (ac - bd) + i(bc + ad)$.
- 除法: $z_1 = a + ib, z_2 = c + id$ に対して, 商 $\frac{z_1}{z_2} := \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$

まあ, このようなことは高校でやりましたよね.

さて, 人間は直感の動物であるから, 扱う対象を図にできれば良いことがあると思われる. 実数の集合については**数直線**がそれであった. これを真似て複素数の集合を表すとどうなるだろうか? 一般の複素数は $z = x + iy$ の形として実数 (x, y) の組で表されている. だからこれを図示するには横軸に x , 縦軸に y をとって2次元平面上に表すのが良いだろう (下図左). こう描くと, $|z|$ は原点と z の距離だということがよくわかる (高校でやったはず).



ともかくこれで, それぞれの複素数と2次元平面上の各点が一対一対応をすることになる. この, 複素数を表す平面の事を**複素平面**と呼ぶ¹. 以下ではしばしば, 複素数を複素平面上の点として考えていく.

ここで注意. 複素数の和については, 複素平面で簡単な図形的理解が可能だ (上図の右). 和の定義を見ると, 単に実部と虚部を別々に足して, それらを和の実部と虚部に行っている. つまり, $z = x + iy$ と $w = p + iq$ (x, y, p, q は実数) の和は $z + w = (x + p) + i(y + q)$ であって, 複素平面で見れば, ベクトル (x, y) とベクトル (p, q) の和をやっているのと同じである. つまり, 二つの複素数の和は, 複素平面上では通常のベクトルの和とすることができる.

¹高校では「複素数平面」と習ったかも

1.2 極形式と冪根 (教科書の 1.2 節)

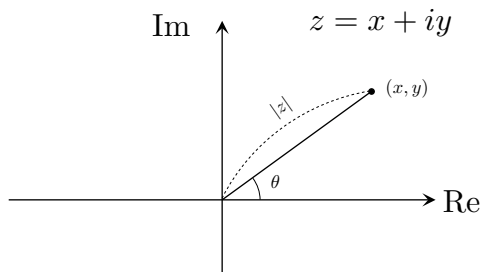
極形式 さて, 点 (x, y) は平面上の点と見なせるが, これを極座標で表すこともできる. つまり,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) \tag{1.2.1}$$

とするのである. ここで

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.2.2}$$

となる (各自, 確かめよう). この θ を $z = x + iy$ の**偏角** (argument) と言い, $\arg z$ と書く (下図参照). また, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ の表現方法を「 z の**極形式**」という.



さて, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ と表せる θ は一意には決まらない. なぜなら, もし, $\theta = \theta_1$ がこの式を満たしているなら, $\theta_2 = \theta_1 + 2\pi$ も同じ式を満たすからだ:

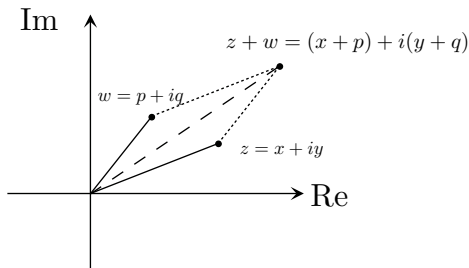
$$r(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r\{\cos(\theta_1 + 2\pi) + i \sin(\theta_1 + 2\pi)\} = r\{\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)\} = z \tag{1.2.3}$$

より一般に, $\theta_1 + 2m\pi$ (m は整数) の形をしたものはすべて偏角になりうる. これでは不便なので, 偏角を一意に決めるため, 「たくさんある偏角のうち, $-\pi < \theta \leq \pi$ の範囲にあるもの」を見つけて², これを**偏角の主値** (principal value) と呼び, $\text{Arg } z$ で表す. 直感的には, 上図で書いてある θ のことである ($\text{Im} z < 0$ の場合は, 実軸から下向きに (マイナスの角度で) 測る).

三角不等式 二つの複素数 z, w に対して,

$$|z + w| \leq |z| + |w| \tag{1.2.4}$$

が常に成り立つ. これを三角不等式という. その理由は以下の図を見れば明らかだろう.



$|z|$ というのは, 点 z と原点の距離である. $|w|$ というのは, 原点と w の距離だが, これは (平行四辺形), z と $z + w$ の距離とも同じだ. 一方で, $|z + w|$ というのは, 原点と $z + w$ の距離で, 図で見ると, 破線の部分の長さである. $0, z, z + w$ で作られる三角形を考えると, 三角不等式はまさにこの三角形の辺の長さの関係を言っている.

三角不等式を何回もつかうと, n この複素数の和についても

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| \tag{1.2.5}$$

が成り立つことがわかる.

²このような θ がただ一つだけ存在することは, 各自で納得せよ

極形式における積と商 極形式を使うと、複素数の積と商を、ある程度直感的に理解できる。

二つの複素数 z, w を考え、それぞれを極表示した結果が

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad w = s(\cos \phi + i \sin \phi) \quad (1.2.6)$$

であるとする。この時、三角関数の加法定理を用いると

$$zw = rs(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \phi + i \sin \phi) = rs\{\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)\} \quad (1.2.7)$$

となることがわかる (各自、一度は自分で計算して納得せよ)。これは zw が

- その絶対値 (大きさ) は $rs = |z| \times |w|$ であり,
- その偏角は $\theta + \phi = \arg z + \arg w$ である

ことを意味している。特に偏角が和になっているところは重要だ。

同様に、 $w \neq 0$ の場合、商は

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s} \{\cos(\theta - \phi) + i \sin(\theta - \phi)\} \quad (1.2.8)$$

となることがわかる。これは $\frac{z}{w}$ が

- その絶対値 (大きさ) は $\frac{r}{s} = \frac{|z|}{|w|}$ であり,
- その偏角は $\theta - \phi = \arg z - \arg w$ である

ことを意味している。特に偏角が差になっているところは重要だ。

冪根 第1回の最後として、「 n 乗根」の話をしておこう。以下の問題を考える：

z を複素数、 n を正の整数とする。 $w^n = z$ となるような複素数 w を全て求めよ。

上の問いの答えに当たる w を「 z の n 乗根」といい、 $z^{1/n}$ とか $\sqrt[n]{z}$ とか書く。(ただし、この値は一意に決まらず、一般に n 個あることをすぐ下で見る。)

この問題を、「 $z = x + iy, w = p + iq$ と置いて、 $w^n = z$ の両辺の実部と虚部を比較」して解こうとすると、まあ解けない。($n = 1, 2$ ならなんとかなるが; 一般の n も一度はやってみて、大変だということを理解したほうが良い。)

しかし、このように**積に対しては極表示を使うとうまくいくことが多い**ので、極表示を用いよう。以下、 $r > 0$ の場合を考える ($r = 0$ なら $z = 0$ であって、この場合は $w = 0$ しかないので、面白くない)。

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad w = s(\cos \phi + i \sin \phi) \quad (1.2.9)$$

とおく。 z を表す r, θ は既知として、未知の s, ϕ を決めようというわけだ。

ドモアブルの公式を用いると、

$$w^n = s^n (\cos \phi + i \sin \phi)^n = s^n \{\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)\} \quad (1.2.10)$$

がすぐにわかる。つまり、 w^n の絶対値は s^n 、その偏角は $n\phi$ なのだ。これが $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ に等しいためには、

$$r = s^n, \quad \text{かつ} \quad \theta = n\phi - 2\pi k \quad (k \text{ は任意の整数}) \quad (1.2.11)$$

であることが必要十分だ。 $s > 0$ に注意すると、これは

$$s = \sqrt[n]{r} = r^{1/n}, \quad \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n} \quad (k \text{ は任意の整数}) \quad (1.2.12)$$

と解ける。ここで $s = \sqrt[n]{r} = r^{1/n}$ とは、 $s^n = r$ となるような正の数 s のことである³。

³このような s が一意に存在することは、「 $y = s^n$ という関数が s の単調増加関数で、したがって、 $y = r$ という直線と一点で交わる」ことからわかる

なお、 $\phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}$ と書いているが、この k は $k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$ 以外の値を考えても、 ϕ の値は、 $k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$ のどれかと同じになる。これも考えに入れると、最初の問いの答えは以下ようになる。

上の問いの答えは、 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ と極表示した場合、 $w = s(\cos \phi + i \sin \phi)$ で与えられる。ここで、

$$s = \sqrt[n]{r} = r^{1/n}, \quad \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n} \quad (k \text{ は } 0 \text{ 以上 } (n-1) \text{ 以下の任意の整数}) \quad (1.2.13)$$

以上が「 z の n 乗根」を求めた結果である。いくつかの注意：

- $z = 1$ という、非常に単純な場合、その n 乗根を (慣習にしたがって) w ではなく ω と書くと

$$\omega = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \quad (k \text{ は } 0 \text{ 以上 } (n-1) \text{ 以下の任意の整数}) \quad (1.2.14)$$

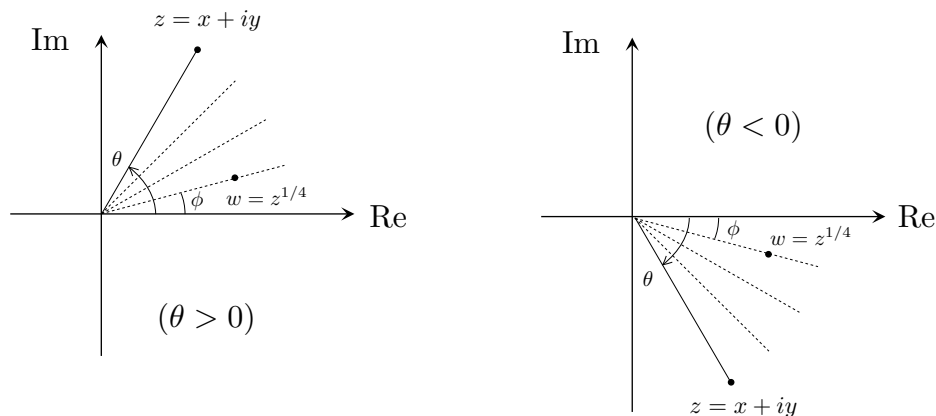
となる。全部で n のこの n 乗根があるのだ。 $n = 2, 3$ くらいでは、この n 乗根が具体的にどうなってるのか、各自求めてみると良い。

- 上の n 乗根を複素平面で図示してみよう (答えは、教科書の p.13)。

一般の z の n 乗根について、 θ を z の偏角の主値にとり $k = 0$ とした場合の w を、「 z の n 乗根の**主値** (principal value)」という。数式で書けば

$$(z^{1/n} \text{ の主値}) = |z|^{1/n} \left\{ \cos\left(\frac{\text{Arg } z}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\text{Arg } z}{n}\right) \right\} \quad (1.2.15)$$

ということである。下の図を参照 (左が、 $\theta = \text{Arg } z > 0$ の例、右が、 $\theta = \text{Arg } z < 0$ の例、ともに $n = 4$ とした)。図で $w = z^{1/4}$ とあるところは、本当は「 $w = z^{1/4}$ の主値」と書くべきだが、ややこしくなりすぎるので略した。



今日は最初であるし、大半は高校の時にやったことだろうから、レポート出題は無し。ただし、次回以降に困らないように、教科書の問題 1.1 (p.8)、問題 1.2 (p.13) をやっておくこと。全てをやる必要はないが、教科書の巻末に答えのある**奇数番の問題**はできるだけやって、自分でわかっているか確認することが望ましい。