微分積分学・同演習 A（原）第 1 回：今日はほぼ，準備だけ

0　初めに

この節では，第一回の内容として,「記号のお約束」「この講義で目指すもの」「偏微分の記号の意味など」を説明する．本来の講義内容は次節の第 2 回以降に展開する．

0.1　本論に入る前に記号のお約束.

$a < b$ を 2 つの実数，n を非負（負でない）整数とする．

- 整数の全体は $\mathbb{Z}$，自然数（1 以上の整数）の全体を $\mathbb{N}$，有理数の全体を $\mathbb{Q}$，実数の全体は $\mathbb{R}$ と書く．
- 集合 A の要素を大学では「元（げん）」ともいう.（例）2 は $\mathbb{Z}$ の元である．$\sqrt{2}$ は $\mathbb{Q}$ の元ではない．
- 高校までと異なり,「$a < b$ または $a = b$」を $a \leq b$ と書く．同様に,「$a > b$ または $a = b$」を $a \geq b$ と書く．
- $a < x < b$ なるすべての実数の集合を (a, b) と書き，開区間という．教科書ではこの開区間に変な記号（括弧のうえに○がついてる）を使ってるが，打ち込むのが大変だし，標準的ではないので使わない．
- $a \leq x \leq b$ なるすべての実数の集合を $[a, b]$ と書き，閉区間という．
- 高校と同じく，$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ は n の階乗である．ただし，$0! = 1$ と約束する．

(用語の注）あるものがたった一通りに決まる（存在する）とき，業界用語では○○**が一意に決まる（存在する）**という．この表現『一意』は頻出するから覚えよう（英語の unique, uniquely の訳）．

高校で「関数」と書かれたものは，この講義では「**函数**」と書く.（僕が学生の頃は「函数」と書く先生が多数派だったが，今では少数派になってしまった.） ついでに，僕は「線形代数」ではなく「線**型**代数」と書く派です（「形」と「型」は違うんですよ，と大学 1 年の最初に教わりました）．

0.2　この科目について．特に高校での微積との違いについて

この講義は後期の「微分積分学・同演習 B」とあわせて完成し，一年を通して『本格的な大学の微積分』を学ぶことを目的とする．前期では特に,「1 変数函数の微分とその応用」「1 変数函数の積分」「極限とは何か（その厳密な定義)」などを扱う．後期では「多変数函数の微分（偏微分)」「多変数函数の積分（重積分)」を扱う予定．

以下では，この科目が高校での微積とどう違うのか（どのように発展するのか）を述べる．なお，以下では,「高校で習うべき範囲だけを勉強した人」を前提として話をする．高校ですでに大学レベルの勉強をしていた人には，以下の記述は当然，当てはまらない．

後期の題材について：

順序が前後するが，まず後期で扱う題材について述べる．後期には「多変数函数の微分（**偏微分**)」「多変数函数の積分（**重積分**)」を扱うが，これらは高校では全く習わなかったはずであり，大学独自のものだ．なので,「大学での新しさ」についてはこれ以上述べる必要はないだろう．

前期の題材について：

問題は前期である．前期では,「1 変数函数」の微積分をやるので，高校でのものとかぶっているように見えるが，実はここが落とし穴である.（例年，舐めてかかって痛い目を見る人が複数います.）

高校との大きな違いは，以下の 3 つである．この違いを理解して，良く学習していただきたい．

- 微分については**テイラー展開**という新しい題材が加わる．これは原理だけではなく，**実際に計算できる**ことが大事．理系では必須なので，全員，マスターすること．
- 積分については，その定義を改良することに加え，**広義積分の収束・発散**という問題を扱う．広義積分の収束・発散が物理系の性質と密接に関わることも多いので，着実な理解が必要だ．
- 高校では「極限」の定義や扱いが曖昧（直感でごまかす）だった．理論物理をやる人にはこれでは不足なので，この科目では**極限の厳密理論**を少しだけ，やる（7月に入ってからの予定）．ここは例年，かなりの人が苦労するところだが，頑張って欲しい.（最悪，わからなくても，まあ良い.）

以下，上の各題材について，もう少し述べる．

テイラー展開について：

高校で微分を習った主な理由（微分の応用）は「極値問題を解きたいから」だったと思う．もちろん，極値問題は大事だが，これは高校でやったので，この科目ではほとんど触れない．そうではなく,「微分を用いて函数の近似を行う」**テイラー展開**という技法が，この科目の微分の中心になる．テイラー展開の例を挙げると，みなさんが高校で習った指数函数や三角函数が，以下のような（無限）級数で書けるというのだ：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n \tag{0.2.1}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \tag{0.2.2}$$

高校時代に初めてこの式を見たとき，僕は非常に衝撃を受けた.「わけがわからない」と思っていた $\sin x$ が，自分でもわかる（と当時は思ってた） x^{2n+1} の和で書けるのだ！

後になって「上の右辺が無限級数なので，右辺も実は良くわからないものである」ことは理解した．しかしそれでも，この式には大きな意味がある：$|x|$ が小さい時には，上の式の右辺の**近似値**は計算できるからだ．となれば，等号でつながっている左辺の e^x や $\sin x$ の値の**近似値**も計算できる．つまり，このテイラー展開というのは,「わけのわからない」**函数の近似値を計算する手段**として非常に有効なのである[17]．

このような理由で，テイラー展開は物理をはじめとする理系の学問では必須のテクニック[18]だから，絶対にマスターすることが肝要だ．

積分について：

積分については,「積分は微分の演算」つまり 「$F'(x) = f(x)$ となる函数 $F(x)$ を $f(x)$ の不定積分という」という定義であったろうと思う．これでは，このような $F(x)$ が見つけられない積分を定義できない．例えば，$f(x) = e^{-x^2}$ という函数に対しての $F(x)$ は，高校までの知識では絶対に求められないし，$F(x)$ が存在するかどうかもわからない．これでは困るので，この科目では，**まず定積分を定義してから不定積分を定義する**ことをおこなう（大雑把に言えば,「区分求積法」を厳密にする）．その結果として,「連続函数は積分可能」という定理を得る．

さらに，物理と密接に関連した話題として**広義積分**を考える．これは例えば

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{L\to\infty} \int_0^L e^{-x}\, dx \tag{0.2.3}$$

[17] それのみならず，物理系の理論的な解析にも有用だ．振り子の運動を扱う場合，正しい運動方程式は $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -g\sin x$ であるが，$\sin x \approx x$ と近似して，正しい運動方程式の代わりに $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -gx$ を扱うことは，物理の授業ですぐに習うだろう（このように近似すれば，高校までに習った「単振動」と同じになる）．これは近似ではあるが，物事の本質を正しく捉える「良い近似」である．一般に，物理においては本質を抉り出す「良い近似」を行って我々の理解を深めることが本質的である（というようなことは，物理の先生が強調されると思う）

[18] 数学としてみても，テイラー展開自身は非常に面白いのだが

などのことである（高校でも練習問題としてこのような積分をやった人も多いかもしれない）．概念としては簡単だが，いくつかの落とし穴があるので，注意されたい．

極限の厳密理論について：

本来，大学での微積分の最大の目的は，この**極限の厳密理論**をマスターしてもらうことだった.「物理だから厳密性は必要ない」と思うかもしれないが，理論物理をやる人は知っておいた方が良いし，実際，素粒子，統計物理，量子情報などでは，極限の厳密理論の考え方を（息をするように）普通に使って論文を書く人も多い．

ところが，ここ 20 年ほどの（高校からの）カリキュラム改定のため，1 年の微積でこの題材をフルにやることは困難になっている.（原因は，高校で論理を十分にやってこなかったため；これはもちろん，みなさんの落ち度ではない．このようなカリキュラムと教え方のせいです.）仕方ないので，この科目では最小限の題材に絞って扱う．

最悪，この部分がわからなくても，あまり気にする必要はない．今わからなくても，4 年生になる頃にもう一度勉強すればわかるようになってる可能性も高い.（また，わからないからといって，理論物理を断念する必要もないだろう.）

0.3 偏微分への導入

来学期への準備を兼ねて，また物理の授業などでは平気で偏微分を使うだろうから，偏微分の基本の基本のみをやる．詳しくは後期にちゃんとやる．

一般の n 変数のときには式がいたずらに複雑になるので，主に 2 変数の場合を考える．

定義 0.3.1 (偏微分係数) 2 変数函数 $f(x,y)$ の点 (a,b) における第 1 変数に関する偏微分係数とは極限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} \tag{0.3.1}$$

のことである（もちろん，この極限が存在する場合のみ，この定義は有効）．これは記号で $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $f_1(a,b)$, $f_x(a,b)$，$D_1f(a,b)$ などと書く．同様に，第 2 変数に関する偏微分係数とは

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}=\lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} \tag{0.3.2}$$

のことであって，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$，$f_2(a,b)$, $f_y(a,b)$，$D_2f(a,b)$ などと書く．

上のように各点で偏微分係数を計算すると，(x,y) の函数として $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$，$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ が定まる．これを f の（x，y に関する）**偏導函数**と呼ぶ．

（記号の注意）括弧に 2 重の意味があるためになかなか避けにくいのだが，$\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ などというのは，点 (a,b) における $\frac{\partial f}{\partial x}$ の値のつもりであって，$\frac{\partial f}{\partial x}$ に (a,b) をかけたものではない．これは文脈から明らかとは思うが，式がどうしても複雑になって混乱するといけないので，念のため．

以下の定義はよく使うので，ここで与えておく．

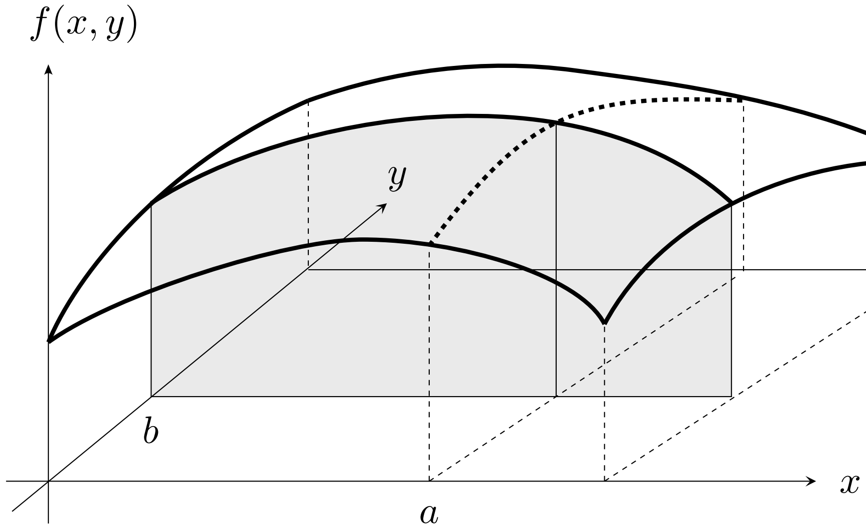
定義 0.3.2 (C^1-級) 多変数函数 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ がその定義域（の一部）D で

- f は各変数 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ のそれぞれについて偏微分可能で
- かつ，その n-この偏導函数が $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ の連続函数である

であるとき，f は D で$\underline{C^1\text{-級}}$であるという．

偏微分の図形的な意味について，簡単に述べておこう．その定義からわかるように，x での偏微分というのは $y=b$ を一定にして x だけを動かして微分，という事だ．これは $z=f(x,y)$ のグラフを $y=b$ の面で切った切り口を見て，この切り口のグラフの変化率を考えていることになる．下図では太い実線がそれにあたる．一方，y での偏微分は $x=a$ の面での断面を問題にしている．下図では太い点線のグラフを見ていることになる．

このようなイメージは非常に役に立つものだから，できるだけ持つように心がけよう．



(記号についての注意)

$f(x,y)$ の偏導函数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ の記号としては，$\frac{\partial f}{\partial x}$　$D_x f$　$D_1 f$　$\partial_x f$　$\partial_1 f$　f_x　f_1 などが一般的である．時たまに f'_x というのも見かけるが，それほど一般的ではない．いずれにせよ，**どの変数で微分するのかがわかるように何らかの明記を行う**ことが不可欠である．時々，f' とだけ書いて $\frac{\partial f}{\partial x}$ のつもりである人がいるから，念のために注意しておく．

問 0.1. 次の函数をそれぞれの独立変数で偏微分せよ．

$$a)\quad x^2+y^3, \qquad b)\quad 2x^2y \qquad c)\quad \sin(xy^2) \qquad d)\quad (x^2+y+z^3)^2$$

$$e)\qquad f(x,y)=\begin{cases}0 & (x,y)=(0,0)\text{ の時}\\ \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\text{ の時}\end{cases}$$

0.3.1　偏導函数がゼロ，の函数は？

1 変数の函数 f の場合，導函数 f' が恒等的にゼロというのは簡単だった — f は定数しかない．

ところが，多変数の函数では事情が異なる．例えば，2 変数函数 $f(x,y)$ が $f_x(x,y)\equiv 0$ を満たしていると，これは f が x には依存しないと言ってるにすぎない.（1 変数の時も「x に依存しない」ことは同じだけど，あの場合は x しか変数がなかったから，x に依存しないなら定数だった.）いまは y にはいくら依存してもよいのだから，このような f は

$$f(x,y)=g(y)\qquad g\text{ は任意の函数} \tag{0.3.3}$$

と書ける．これは一般には定数函数ではない！

1 変数に慣れすぎたあまり,「導函数がゼロなら定数」と思い込みがちだが，偏導函数に関してはこれは正しくないから，注意しよう．