原のセミナー紹介：暫定版 (2020.07.30)

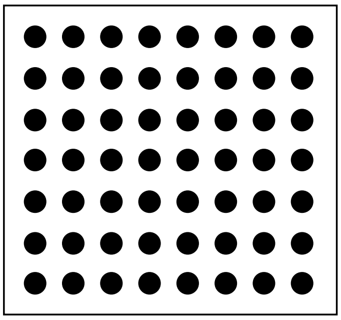
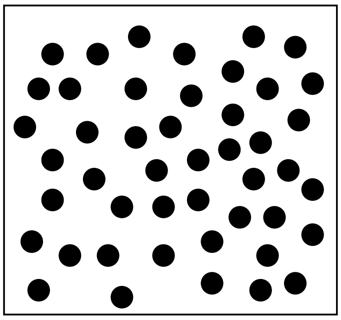
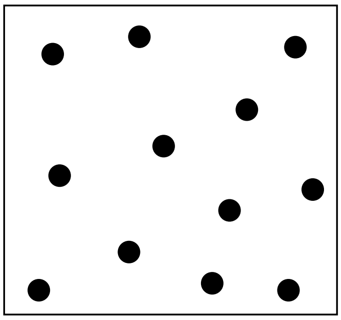
（以下は昨年までのスライドを少し手直ししたものです．
本来は，これに音声解説をつけて up する予定でした．
しかし，遠隔授業の準備などで，思うように時間が取れないので，音声解説なしバージョンを，ともかく up します.）

- **原の専門は数理物理学，統計物理学，場の量子論**
- **特に，相転移，臨界現象**
  液体-気体の変化，磁石，素粒子論における場の量子論
- **数学の分野にあてはめれば，確率論**
  Random walk, percolation, **中心極限定理** etc
- **最近では統計力学の基礎にも興味がある（成果はまだ）**
  （コーヒーはなぜ冷めるのか？）
- **このような問題をできるだけ数学的に厳密に解明したい**
- **あまり高尚な数学は使わない（使えない）が，地道な計算力，対象に対する興味が重要.**
- **興味のある方は事前にお話を !!**

相転移・臨界現象とは？

- （例）水の３相（固相，液相，気相）
- ミクロには，分子が互いに相互作用しながら熱運動 ——— ランダムの極致
- マクロには秩序が見える（均質な固相，液相など）.
- 特定のパラメーター（温度）で，秩序が大きく変わる（液体から固体へ）
  ——— 相転移
- 相転移点付近で，様々な物理量（帯磁率など）が発散 ——— 臨界現象

（以下は，個体，液体，気体の分子の模式図；気体の場合は，分子間の距離はもっともっと遠いが）.

臨界現象の例 1．$\mathbb{Z}^d$ 上の simple random walk (chain),

- **原点出発．隣の $2d$ 個のサイトのどこにでも行ける．**
- **（Q1) n 歩の random walk の数 c_n は？**
- **（A1）簡単だ！ $(2d)^n$ こある．**
- **（Q2）こんな n 歩の rw の端点の（原点からの）距離は？**
- **（A2）確率的に $\sqrt{n}$ くらいが一番多い．**
- **中心極限定理（独立な確率変数の和に関する極限定理）の特殊な場合とも考えられる．**

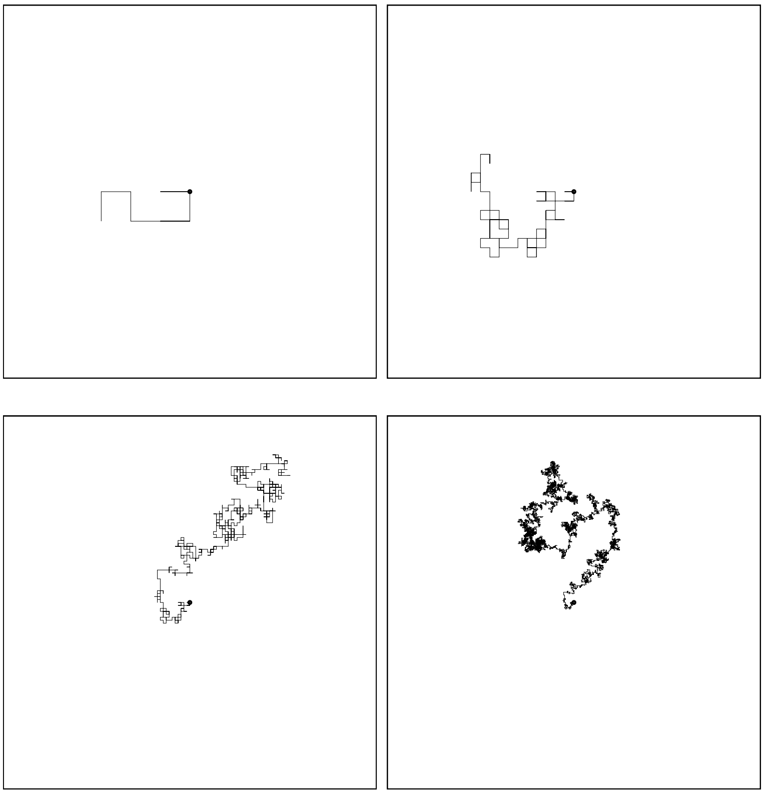


図 1: ２次元ランダムウォークの例１：左上から $10, 10^2, 10^3, 10^4$ steps. 横軸は x, 縦軸は y で，図示している範囲は $2\sqrt{n}$.

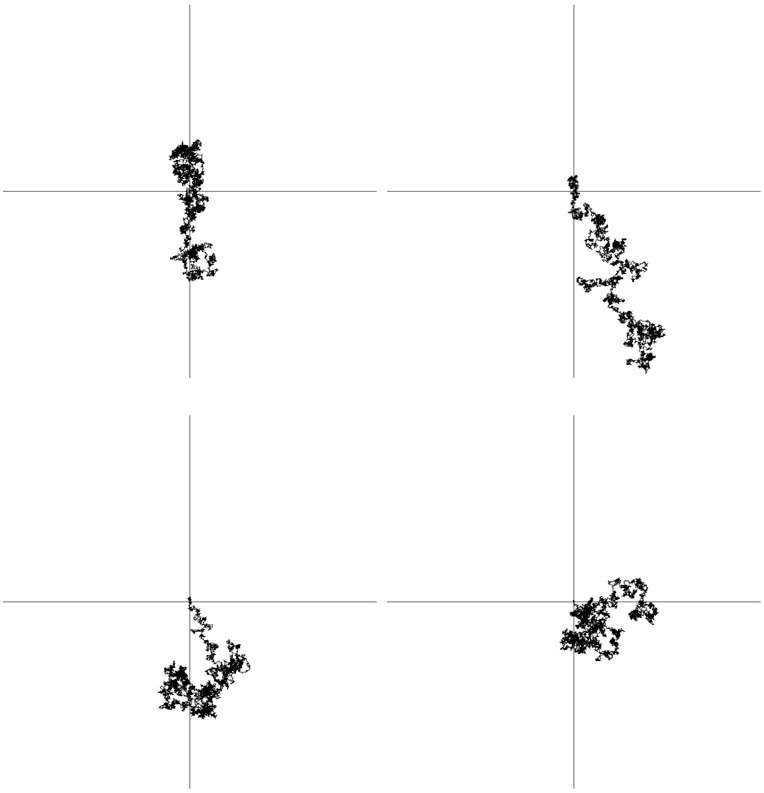


図 2: 2次元ランダムウォークの例 2：左上から $10^5, 10^6, 10^7, 5 \times 10^7$ steps. 横軸は x, 縦軸は y で，図示している範囲は $2\sqrt{n}$.

臨界現象の例 2．$\mathbb{Z}^d$ 上の self-avoiding walk (chain), SAW

- 原点出発．隣の $2d$ 個のサイトのどこにでも行ける．ただし，自分の軌跡とは交わらない（self-avoiding constraint）．
- （Q1) n 歩の random walk の数 c_n は？
- （A1）よくわからない．$d > 1$ なら全く簡単でない！
- （Q2）n 歩の rw の端点の（原点からの）距離 r_n は？
- （A2）よくわからない．$d > 1$ なら全く簡単でない！
- 無害に見える「self-avoiding constraint」のために，極端に難しい問題になる．
- 中心極限定理の範疇におさまらない． $\leftarrow$ 確率論の問題として，非常に面白い．

SAW に関する部分的な結果

- Connective constant $\mu := \lim_{n\to\infty} (c_n)^{1/n}$ はすべての次元で存在 (subadditivity, 1957)
- c_n，r_n の漸近形の予想：$n \to \infty$ では

$$c_n \sim A\,\mu^n\, n^{\gamma-1}, \qquad r_n \sim B\, n^\nu$$

  A, B, γ, ν は定数．γ と ν（臨界指数）はかなり普遍的（モデルの詳細によらない）だろう．なぜ普遍的なのか？が大問題．
- 特に，$d = 2$ では $\gamma = \frac{43}{32}$，$\nu = \frac{3}{4}$ (almost proven)
- $d \geq 5$ では $\gamma = 1$，$\nu = 1/2$ （proven by Hara and Slade, simple rw と同じ）
- $d = 4$ では $\gamma = 1$，$\nu = 1/2$ だが対数補正がつくと予想：

$$c_n \sim A\,\mu^n\,(\log n)^{1/4}, \qquad r_n \sim B\, n^{1/2}\,(\log, n)^{1/8}$$

- $d = 3$: completely open!

まとめ

- random walk に限らず，パーコレーション，スピン系など，統計力学のいろいろなモデルは類似の臨界現象を示す．
- これらの臨界現象の背後には，中心極限定理の範疇に入らない（確率変数同士の相関が本質的に効いてくる）極限定理が隠れていると考えられる．
- 大変に heuristic には「くりこみ群」の描像で理解できるが，数学的厳密化はこれから．
- 数学的にもやりがいのある問題である．（が，非常に難しい．）