

2019.04.08.

## 数理統計学 工学部地球環境後半 (S2-22+23)

担当: 原 隆 (数理学研究院) : 伊都キャンパス W1 号館 C-601 号室,

phone: 092-802-4441, e-mail: [hara@math.kyushu-u.ac.jp](mailto:hara@math.kyushu-u.ac.jp)

Office hours: 講義終了後に質問を受け付けます (そのうちに, 正式な office hours の時間を決めます). メールでの質問も歓迎.

**概要:** 統計学はそれ自身でも面白いのはもちろんであるが, 現在の科学, 工学, 医学 (疫学) において非常に重要かつ強力な道具になっている. この講義では, 数理統計の基本的な考え方を紹介し, 皆さんの将来に役立てることを目的とする.

**内容予定:** (以下は暫定的なものです. 皆さんの理解の程度などにより, 取捨選択します. また, 順序もある程度は入れ替えるかもしれません — 特に, 中心極限定理は教科書では 6 章にありますが, もっと前にやるかもしれません. 良い教科書だと思いますが, 題材の順序が僕の趣味と少し異なるので.)

より詳しくは, 上のアドレスからたどれる web page に順次, 記載して行きます.

0. はじめに: この講義で扱う問題の例. 科学の方法と統計. 統計学と確率論はどう違う?

### PART I. 確率

1. (一つの) 確率変数と確率分布 (教科書第 2 章)
2. (複数の) 確率変数と確率分布 (教科書第 3 章)
3. 二項分布と正規分布 (教科書第 4 章)
4. 確率分布と母関数 (教科書第 5 章)
5. 標本分布と中心極限定理 (教科書第 6 章)

### PART II. 統計

1. データの取り扱い (教科書第 1 章; 簡単に)
2. 推定 (教科書第 7 章)
3. 検定 (教科書第 8 章)

**教科書:** 皆本晃弥「確率統計」(近代科学社)

### 参考書:

- 服部哲弥「統計と確率の基礎」(学術図書出版社). 教科書よりも更に数学的に書かれた本. 数学寄りの人が統計の考え方を理解したい場合に有効と思われる.
- これ以外に, 講義ノートのようなものを作成し, 皆さんがダウンロードできるようにする可能性が高い (講義で配布することもある). 以下の URL (<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html>) から, この科目のページをご覧ください (4/8 現在ではまだ何もありませんが, そのうち, 何かは作ります. 詳しい講義ノートになるかは保証はできないけど.)

**評価方法：**(学期の最初には確定していませんでしたが、講義中に何回か宣言したとおり、以下のようにします。)

中間試験 (+レポート) と 期末試験 の成績を総合して評価する。そのルールは以下の通り：

- 最終成績は一旦、100点満点に換算してから、この大学の様式に従ってつける。
- その100点満点(最終素点)は、以下のように計算する。
  - まず、「中間試験 (+レポート) の点」「期末試験の点」をそれぞれ100点満点で出す。
  - 次にこの2つを以下の式で「平均」し、一応の総合点を出す：

$$(\text{総合点 } A) = 0.50 \times (\text{中間 (+レポート) の点}) + 0.50 \times (\text{期末の点})$$

$$(\text{総合点 } B) = (\text{期末の点})$$

- ただし、上の重みを若干変更する可能性はある(総合点 A で、中間と期末の比を 4:6 にするなど)。
- 最終素点は

$$(\text{最終素点}) = \max\{(\text{総合点 } A), (\text{総合点 } B)\}$$

とする。つまり、(総合点 A) と (総合点 B) を比べて、良い方をとるのだ。

- 上の「最終素点」に、必要ならば全体に少し修正を加えたものをつくり、最終成績を出す。
- レポートの点は原則として、総合点 A, B には加えない。ただし、上の計算では合格基準に少し足りない人(百点満点で10点不足が限度)を助けるかどうかにかんして使用する。また、レポートがずば抜けて良い場合、この事実は最終成績に反映される事もある。
- なお、上のように成績をつけるので、いうまでもなく、**期末試験の範囲は今学期にやったこと全部**が原則です。つまり、中間試験の範囲も、もう一回、期末試験の範囲になります。

### 「学習到達度再調査」(?) について：

この科目は選択必修(6科目あるうちから2.5単位)ではあるが必修ではない、と原は理解しているので、「学習到達度再調査」は行わない予定です。また、進み具合によっては、期末試験に相当するものを「教場試験」として行う可能性もあります。

### 合格(最低)基準：

合格のための条件は、以下の通り。

- (1) 題材としては、上の「内容予定」に書いたものを理解していること。
- (2) 理解の程度としては、教科書の問題や講義中に出題する例題(やレポート問題)と同レベルの問題が解けること。(ただし「時間がなくてレポートは出せないけど試験には出さず」などの指示を講義中に与えることもあり得る。)

### レポート、宿題、教科書の問題、演習の問題について：

講義中に何回か、簡単なレポートや「お褒めの宿題問題」を出すかもしれない。これらの出題の意図は「この程度できれば講義についていけるし、合格も可能だ」という目安を与えることと家庭学習の引き金にすること、である。成績評価に占めるレポートや宿題の比重は低いですが、この講義をこなす上では重要な意味があるので、やってみること。「レポート」の作成はみんな協力してやっても構わないし、むしろ協力することを奨励する。ただし、(友達と協力してレポート問題を解いた場合でも)各人のレポートは自分の言葉で記述し、かつ、「○○君と一緒に考えました」とぐらいいは書くべきだ。また、教えてもらった事はそのままにせず、自分でもう一回考えて納得しておく事。(これらは高校校までで身に付いているべきだが、どうも怪しい人が多いようだから書いておく。)

また、当然のことではあるが、講義で進んだ部分に該当する教科書の問題くらいは全問、**やっておくこと**。

**この科目に関するルール：**世相の移り変わりは激しく、僕が学生だったときには想像すらできなかったことが大学で行われるようになりました。そのうちのいくつかは良いことですが、悪いこともあります。オヤジだとの批判は覚悟の上で、互いの利益のために、以下のルールを定めます。

- まず初めに、学生生活の最大の目的は勉強することであると確認する。

- 講義中の私語, ケータイの使用はつつしむ. 途中入室もできるだけ避ける (どうしても必要な場合は周囲の邪魔にならないように). これらはいずれも講義に参加している他の学生さんへの最低限のエチケットです.
- 僕の方では時間通りに講義をはじめ, 時間通りに終わるよう心がける.
- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義を通して行う (補助として僕の web page も使う —— アドレスは最初に載せた. M2B も使うかもしれない). 「講義に欠席したから知らなかった」などの苦情は一切, 受け付けない.
- レポートを課した場合, その期限は厳密に取り扱う.
- **期末試験を行った後では, いかなる特別の救済措置も講じない.** (この大学が定める「病気など正当な理由による追試験」は行うが, それ以外の「救済レポート」や「温情の追試験」などは一切やらないということ.) 逆に期末試験までなら, 皆さんの学習を助ける努力は惜しまないつもりである.
- E-mail による質問はいつでも受け付ける (hara@math.kyushu-u.ac.jp) ので積極的に利用するように. ただ, 回答までには数日の余裕を見込んで下さい.

わからない記号が出てきたら, また, 僕がおかしなことを言ってると思ったら, 質問 (または指摘) して下さい. 僕の言ってることがわからないままに 90 分も座っているのは時間の無駄です. あなたがわからない時は, 隣の友達も多分, わかってないでしょう. だから, 勇気をだして発言して下さいね. 僕は変な人格攻撃以外で激高する (した) ことはありません. (かなりの人格攻撃でも表面上は受け流せると思っているのだが, 試さないでね.)

この講義で考える問題の例:

**問題 0.** (病気の検査の問題) ある病気にかかっているかどうかを調べる検査があり, この検査の精度は 99% である. つまり, ある人が病気であるのに病気でないと誤判断する (偽陰性) 確率は 0.01, 病気でないのに病気だと誤判断する (擬陽性) 確率も 0.01 である.

一方, この病気は割合に稀なものであって, 全人口のうち, 0.01% (割合で言えば, 0.0001) くらいの人がこの病気にかかっていることがわかっている.

さて, 僕がこの検査を受けたところ, 僕は陽性 (病気だ!) と判断されてしまった. 僕が本当に病気である確率はどれくらいと思ったら良いか?

**問題 1.** (確率の問題, 確率変数) Fair なサイコロを  $n$  回投げた時, でた目の数の合計を  $S_n$  とする.  $S_n$  は確率的に分布するが, その分布はどうなっているか?

**問題 2.** (正規分布と極限定理) 同じような人の集団に対する試験, テストなどの結果は往々にして「正規分布」とよばれる分布に近くなる — 試験の点数分布, 学生の身長や体重の分布など. これは本当か? どのような時に, この「正規分布」を期待できるのか? 正規分布を期待できる場合, その理由は何なのか?

以上は確率の問題. つまり, 考えているモデル (分布) があって, 何回か試行すると結果はどうなるか? というお話. ここまでは高校での数学などで, ある程度はやってると思います.

でも, この講義で本当にやりたいのは, 上の「逆」の問題です. つまり, ある種の実験結果があったとき, その背後にあるのはどんな分布か, ということね.

**問題 3.** (コインはイカサマか?) 今, 手元にあったコインを 8 回投げたところ (コイントス), 8 回とも表が出た. このコインはイカサマ (表が出やすい) と判断すべきだろうか?

**問題 4.** (コインはイカサマか? その 2) 今, 手元にあったコインを 20 回投げたところ (コイントス), 12 回表が出た. このコインを一回投げたとき, 表が出る確率はどのくらいと評価したらよいだろうか?

上の問題はコインで書いたけども, 実用上は以下のような問題になる.

**問題 3a.** (この薬は効果があるのか? 「検定」の問題) 何の治療もしなければ致死率 20% の病気がある. いま, この病気に対する「新薬」が提唱された. この薬を患者さん十人に使ってみたところ, 死亡した人は一人しかいなかった. この薬は効果があると言えるだろうか?

(注意) 本当の薬の治験はもっと条件を厳しくして科学的に行われる. 上のはあくまで簡単化したものである.

**問題 3b.** (この製法は効果があるのか?) ある工場では, どうも生産性が上がらず, 不良品の割合が 10% にも及んでいた. 新しい製法をやってみた場合, 100 個の製品中, 不良品は 8 個だった. 新しい製法の方が良いと言えるだろうか?

**問題 4a.** (品質管理; 「推定」の問題) ある工場で作っている電球の耐久試験をした. 100 個の電球を選び, それらをつけっぱなしにして, 電球が切れるまでの日数を測定したのである. その結果, 切れるまでの平均日数は 360 日, その標準偏差は 30 日だった. この工場で作られた電球の平均寿命は, 大体, どの範囲にあると思ったら良いだろうか?

上では大体, 良い方向の効果を探す問題ばかりを考えたけども, 悪い効果を探す場合にも同じような設問はできる (ある状況が健康に本当に悪いのかどうか, など). このように, 統計の手法というのは, 現代社会を生きて行く上では必要不可欠になっている.

残念ながら, このような統計の考え方はそれほど社会に浸透しているとは思えない. また, マスコミ関係にも, 時折, 不勉強が目立つものがある (まあ, 僕も不勉強だというのは, 日本人だから付け加えておきましょう). この講義では確率と統計の基本的な考え方を学修することで, 皆さんの将来の自衛に役立てたい.

## 補足：科学と統計

この機会に、いわゆる「科学」に対する誤解について述べておく。

「科学」というのは、皆さんも小学校から学んで来た「理科」の延長ではある。科学は「観察や実験」にもとづいて、「理論」と「実験」が互いに手を携えて進むものだという事は、皆さんも理解しているだろう。

1. 何か興味のあるものを観察（実験）する。
2. それがどのような仕組みで起こるのか、などについての「仮説」を立てる。
3. その仮説が正しいか否かを判定できそうな「実験」を考える。
4. その実験の結果を良く観察することにより、さきほどの仮説が妥当そうか否かを判定する。
  - 妥当そうなら、もっと別の状況などを考えて、その仮説の有効性を調べて行く
  - 妥当そうでないなら、先ほどの仮説は捨てる。替わりの新しい仮説を立て、その妥当性を実験で探る
5. 以下、1 に戻って繰り返す

科学は上のようなプロセスで進み、「仮説」のうち、非常に尤もらしいもの（数々の実験の試験をくぐり抜けて、否定されずに残ったもの）が「〇〇の理論」などとして教科書に載ることになる。皆さんがこれまで学んで来た科学の多くは、上のプロセスによって抽出された「〇〇の理論」がほとんどであったはず。しかしこれは「科学は正しい」という間違った概念を植え付けてしまう可能性があるかと危惧する。

そこで、上に説明した事情から、

### 科学の理論には 100%正しいということはない

ことには注意したい。しかし同時に、上の実験（観察）の繰り返しから、

教科書に載るような「〇〇の理論」は（それまでの実験や観察で確かめられる範囲においては）**ほぼ、間違いのないものである**

ことも注意しておきたい（「絶対に正しい」と「ほぼ間違いのない」の差は非常に大きい。また、「このくらいの範囲までは正しいだろう」「ここから先はよくわかりません」などの予測がつけられる点も大きい）。さらに、

以前は全く関係ないと思われていた分野が、より統一的な「〇〇の理論」で記述できることがわかり、科学全体として**密接に関連した大きな理論体系**を作っている

のが現在の科学である（例：以前、物理と化学は別物だったが、化学反応の基礎は「量子力学」という物理の理論で理解できる。生命現象も、その一部は化学、物理学から理解が可能になってきた）。この意味で、**科学とは非常に確からしい仮説の集合体であるが、その仮説は互いに密接に関連している。一つの仮説を別の仮説で置き換えた時は、それと関連するたくさんの「〇〇の理論」をも同時に相手する必要がある**ことを強調しておきたい。また、GPS や半導体などの例でわかるように、現代の我々は非常に高度な科学理論の恩恵を直接、受けている。逆にいえば、これらの理論は何万回、何億回の実験をくぐり抜けているのだ。（いわゆるトンデモ科学を信奉しているひとは、この最後の点を知らないか、意識的に無視していることが多い。）

さて、統計との関係について、科学は上に述べたように、大きな理論体系を作っているし、その理論体系を作るのが大きな目標ではある。しかし、**理論を作るにいたらない時点でも、手法が正しければ十分に科学になっている**ことは強調しすぎても強調しすぎることはない。

例えば、ある病気に対して、この薬が効くらしい、という経験則があるとする。「経験則」というだけでは心もとないけども、**統計の知識を駆使して、この薬が本当に病気に効くのか、調べることはできる** — 問題 3a. もし、このような調査（実験）の結果、**実際に効果がある（らしい）ことが確かめられれば、この薬は効くと言って良い**。この場合、「なぜこの薬が効くのか」は全くわかっていない（作用機序が不明）訳だが、それは後の問題であり、「この薬が効く（可能性が非常に高い）」ことがわかった時点で、これは十分に良い科学である。このような立場を医学の見地から押し進めたのが「疫学」であって、これは正しく使えば、我々の生活環境をよくするのに非常に有効なはずである（例：公害病）。

このように、統計学の手法は、いろいろな現象を科学の土俵に乗せる（そしてときには有用な薬や手法を開発したり、危険な環境をなくす）ための強力な武器になる。なので、この科目の学修は、皆さんの将来に役に立つはずなのだ。