数理統計学 講義ノート（2019 年の 2 年用，担当：原隆）

（このノートは 2019 年 4 月現在の暫定版で，最初の部分しかありません．講義が進むに連れて，すこしずつ加筆訂正されるでしょう．講義ノートの章立ては教科書とは異なります —— 教科書に比べて，かなり細切れ．）

1 確率論の基礎

（教科書の第 2 章から入ります．）まずは確率論の基礎（枠組み）から考えて行こう．

1.1 確率論の舞台 — 事象と標本空間[1]

現実の問題の「確からしさ」を議論するのはなかなか大変である．そこで，数学ではまず，現実から少し切り離した形で，考えやすい舞台を設定する．(確率そのものはもう少し後で導入)．以下のような「実験」[2]を行うことを考える．

例 1： コインを一回だけ投げる．

例 2： コインを２回投げる．(この場合，２回続けて投げたものを一回の「実験」と考える．)

例 3： さいころを一回だけ投げる．

例 4： さいころを２回投げる．

例 5： ５２枚あるトランプから一枚取り出す．

このような例では，まず，上の「実験」の結果は何通りかある．一回「実験」をやった場合にその結果が何になるかは分からないが —— だからこそ「確率論」がでてくる ——，少なくとも**可能な結果の全体**はわかっている．そこで，以下の定義を行おう．

> **定義 1.1.1** 「実験」をやる場合，**可能な結果の全体**からなる集合を**標本空間**（sample space）$\mathcal{S}$ と言う．標本空間の元（つまり，一回の「実験」の結果になりうるもの）を**標本点**または**根元事象**と言う．

- 例 1 では $\mathcal{S} = \{H, T\}$．ここで H は表が出ること，T は裏が出ることで，根元事象は T と H．
- 例 2 では $\mathcal{S} = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$．ここで例えば (T,H) は一回目に表，２回目に裏がでること．
- 例 3 では $\mathcal{S} = \{1,2,3,4,5,6\}$．ここで i はさいころの i の面が出ること（$i = 1,2,\ldots,6$）
- 例 4 では $\mathcal{S} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,5),(6,6)\} = \{(i,j) \,\big|\, i,j = 1,2,\ldots,6\}$．ここで (i,j) は一回目に i の面，２回目に j の面が出ること．
- 例 5 では $\mathcal{S} = \{$ ハートのエース，ハートの２，ハートの３，...$\}$ と全部で５２個の要素からなる集合．

以下では有限な標本空間，および有限からのアナロジーで考えられる場合のみを考察する[3]．

さて，我々は根元事象のみに興味があるわけではない．たとえば例２で,「一回目に表が出ること」を知りたかったり，例３で「さいころで偶数の目が出ること」を知りたかったり，例５で「ハートが出ること（数字は問わない)」を知りたかったりする．このような問いに答えるため，**事象**と言う概念を導入する．

> **定義 1.1.2** **事象**とは実験の結果が持っている性質のこと．数学的に厳密に言うと，**事象**とは単に**標本空間の部分集合**，つまり「根元事象の集まり」のことである．なお，事象には空集合（起こり得ないこと)，および標本空間全体も含めて考える．

「部分集合」と言うと大げさだが，普通に我々の言っている「出来事」に相当していることを，下の例で納得されたい．

[1] 教科書の 2.1 節前半
[2] 「実験」と言っているが,「観測」などと思った方が良い場合も含める
[3] 有限でない場合はいろいろとややこしい（＝数学的に面白い）ことが起こるが，この講義ではすべて略

- 例１では可能な事象は $\varnothing$ （起こり得ない）, $\{H\}$ （「表が出た」）$\{T\}$ （「裏が出た」），$\mathcal{S} = \{H, T\}$ （「表または裏が出た」）．
- 例２での事象の例は（根元事象で無いものを書くと） $\{(H, H), (H, T)\}$ （「一回目に表が出た（２回目は何でも良い）」）， $\{(H, T), (T, T)\}$ （「２回目に裏が出た（１回目は何でも良い）」）， $\{(H, H), (T, T)\}$ （「２回とも同じ目が出た」）など．
- 例３では $\{1, 3, 5\}$ （「奇数の目が出た」），$\{1, 2, 3, 4\}$ （「４以下の目が出た」）など．
- 例４では $\{(1, j) \,\big|\, j = 1, 2, \ldots, 6\}$ （「１回目に１が出た」），$\{(i, j) \,\big|\, i + j = \text{偶数}\}$ （「１回目と２回目の数字を足すと偶数」）など．
- 例５では｛ハートのエース，ハートの２，ハートの３,...,ハートの１３｝（「ハートが出た」），とか｛ハートの３，スペードの３，ダイヤの３，クローバーの３｝（「３が出た」）など．

事象を標本空間の部分集合として定義するのは，以下の事象の演算ともあっている．まず，２つの事象 E, F に対して，その**和事象**を集合としての和集合 $E \cup F$ として，またその**積事象**を集合としての交わり $E \cap F$ として定義する（事象の場合，$E \cap F$ を EF と略記することが多い）．日常言語に直せば，$E \cup F$ とは E または F の**どちらかが起こること**，$E \cap F = EF$ とは E と F の**両方が起こること**を意味する．更に，E^c を $\mathcal{S} \backslash E$ （E の補集合）をして定義し，E の **余事象**と言う．これは日常言語では「事象 E が起こらないこと」に相当する．

- 例１で，$E = \{H\}, F = \{F\}$ とすると，$E \cap F = \varnothing$．これは「表と裏が同時に起こることは無理」という直感にあっている．$E^c = \{T\}$ であるが，裏が出るというのは「表が出ない」ことでもあるから，これも余事象の定義にあっている．また，$E \cup F = \mathcal{S}$ であるが，これは「表または裏が出る」と言うのは要するに可能性全部だから．
- 例２で，$E = \{(H, H), (H, T)\}, F = \{(H, T)\}, G = \{(T, H)\}, D = \{(T, T)\}$ とすると，$E \cap F = \{(H, T)\}$，$E \cap G = \varnothing$，$E \cup G = \{(H, H), (H, T), (T, H)\}$ などとなる．また，$D^c = E \cup G$ であるが，確かに「『２回とも裏』と言うことはない」という事象になっている．

なお，$A \cap B = \varnothing$ の時,「A と B は互いに背反」という．

1.2 数学における確率[4]

今までは単に確率をやる舞台を設定したにすぎない．これからいよいよ,「確率」を割り振っていこう．

数学ではある意味で「天下りに」確率を定める．本当のところを言うと，確率の定め方そのものは数学の仕事ではなく，実験の行い方に即して物理学・化学・心理学... などに基づいて決めるべきものだ．しかし，通常は確率を定めるところから始めることになる．

ただし，ここでどのような p_j を選ぶか，は個々の問題に応じてうまく決めてやる必要がある．

- 例１で，コインが裏表同じように出やすいのなら，$P(H) = P(T) = 1/2$ とするのが良いだろう．
- 例３で，さいころのどの目も同じように出やすいのなら， $P(j) = 1/6$ とすべし．しかし，イカサマさいころで 6 が出やすく，1 が出にくい，のなら，例えば $P(1) = \frac{1}{12}, P(6) = \frac{3}{12}, P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{6}$ ととるのが良いかも知れない．

今までの話を，標本空間が $\mathcal{S} = \{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$ になる実験について一般化しておく（e_j が根元事象）．上で見たように，数学的に確率を決めるというのは，それぞれの根元事象の確率（起こり易さ） p_j （$j = 1, 2, \ldots, N$） を与えることである．それでこの根元事象の起こり易さ（確率）は現実をできるだけ反映するように決めるのだった．

しかし，この根元事象の確率 p_j はいくつかの性質を満たすべきである．まず，これは確率だから 0 と 1 の間にないといけない．更に，$\mathcal{S}$ そのものというのは全事象だから（いつでも起こる）この確率は 1 であるべし．要するに

$$0 \le p_j \le 1, \qquad \sum_{j=1}^{N} p_j = 1 \tag{1.2.1}$$

[4]教科書の 2.1 節の後半

であればよい，ということになる．そして，根元でない事象 $E = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m\}$ については，

$$(E\text{ の確率}) = \sum_{j=1}^{m} p_j \tag{1.2.2}$$

となるはずである．と言うのも，E とは「e_1 か，e_2 か，…，e_m の**どれか**が起こる」事象だから，それぞれの事象の確率の和になるのが自然.

これが数学での確率論の出発点である．要するに

- 標本空間 $\mathcal{S}$ 上に根元事象の確率 p_j を (1.2.1) を満たす形で与え，
- 根元事象でない一般の事象 E の確率を (1.2.2) で計算する．

それで，**このルールを満たすものを全て確率と認める**のである．(しつこいが，どのように p_j を選ぶか，は個々の問題に応じてうまく決める.)

さて，上のように決めた「それぞれの事象の確率」はどんな性質を満たしているだろうか？上では根元事象から確率を決めたが，そうでない場合 —— つまり，根元事象の和事象である色々な事象の確率から決めた方が楽な場合 —— も（後でたくさん）出てくる．そのために,（根元事象から出発しない場合にもなりたつ）抽象的な確率の性質を公理としてまとめておく．

定義 1.2.1 (確率の公理) 標本空間 $\mathcal{S}$ が与えられたとき，$\mathcal{S}$ 上の**確率**（または確率測度）とは，以下を満たす関数（数の組） P のこと：$\mathcal{S}$ の部分集合（事象） E のそれぞれについて値 $P[E]$ が定まり，かつ

1. 全ての $E \subset \mathcal{S}$ に対して $0 \le P[E] \le 1$ （確率は E を超えない）
2. $P(\mathcal{S}) = 1$ （全確率は E）
3. E_1, E_2 が**排反**，つまり「$E_1 \cap E_2 = \varnothing$」，のとき，$P\bigl[E_1 \cup E_2\bigr] = P[E_1] + P[E_2]$

なお，標本空間 $\mathcal{S}$ とその上の確率測度 P をあわせて**確率空間**と言う．

上の性質を満たしている P なら何でも確率と認めてしまおう，と言うのが数学の立場である．しつこいけども，実際にどのような P を採用するかは考えている具体的問題によって，適当に（適切に）決める．

命題 1.2.2 確率について，以下が成り立つ（ベン図を書いて意味を確認しよう）．

$$P[E^c] = 1 - P[E] \qquad (E^c \text{ は } E \text{ が起こらない事象のこと}) \tag{1.2.3}$$

$$E \subset F \quad \Longrightarrow \quad P[E] \le P[F] \tag{1.2.4}$$

$$P[E \cup F] = P[E] + P[F] - P[EF] \tag{1.2.5}$$

根元事象から考えるよりも，他の事象から考えた方が確率を割り振りやすい例として，２枚のイカサマコインを投げる場合を考えよう．２枚のコインがあり，１枚目は表が p，裏が $1-p$ の確率で出る．２枚目は表が q，裏が $1-q$ の確率で出る，としよう．

このとき標本空間は $\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$ である．さて，この４つの根元事象にどのように確率を割るふるべきか，だが：１枚目と２枚目の出方は無関係と思うのが良いだろう（数学的には「独立」という；後述）．すると，

$$P[\,1\text{ 枚目が表}] = p, \qquad P[\,2\text{ 枚目が表}] = q \tag{1.2.6}$$

ととるのが良いのでは？これは根元事象の言葉では

$$P[\{(H,H),(H,T)\}] = p, \qquad P[\{(H,H),(T,H)\}] = q \tag{1.2.7}$$

と言うことになるね．後，基本的性質から

$$P[\{(T,H),(T,T)\}] = 1-p, \qquad P[\{(H,T),(T,T)\}] = 1-q \tag{1.2.8}$$

も言えているわけだ．でもこれだけでは4つの根元事象の確率は決まらない．実際，

$$P[\{(H,H)\}]=a,\quad P[\{(H,T)\}]=b,\quad P[\{(T,H)\}]=c,\quad P[\{(T,T)\}]=d \tag{1.2.9}$$

と書くと，上のは

$$a+b=p,\quad a+c=q,\quad c+d=1-p,\quad b+d=1-q \tag{1.2.10}$$

となって，不定方程式になる．でも，この場合はやはり余分な仮定をおくのが良いだろう．1枚目と2枚目が「独立」なのなら，

$$P[\{(H,H)\}]=P[\,1\text{ 枚目が表，}2\text{ 枚目も表}]=P[\,1\text{ 枚目が表}]\times P[\,2\text{ 枚目が表}]=pq \tag{1.2.11}$$

と考えるのがよいだろう．その他も同様に考えると，

$$P[\{(H,T)\}]=P[\,1\text{ 枚目が表，}2\text{ 枚目は裏}]=P[\,1\text{ 枚目が表}]\times P[\,2\text{ 枚目が裏}]=p(1-q) \tag{1.2.12}$$

$$P[\{(T,H)\}]=P[\,1\text{ 枚目が裏}]\times P[\,2\text{ 枚目が表}]=(1-p)q \tag{1.2.13}$$

$$P[\{(T,T)\}]=P[\,1\text{ 枚目が裏}]\times P[\,2\text{ 枚目が裏}]=(1-p)(1-q) \tag{1.2.14}$$

となる．

1.3 数の数え方の復習（高校の復習；流し読みで良い）

（始めに）以下のようなことは頭から覚え込むのではなく，自分で納得して理解するようにすべし．まず記号を導入する．

定義 1.3.1
- $n>0$ に対して，$n! := n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$，また $0!=1$ と定義する．
- $0\le k\le n$ に対して，$\displaystyle\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ と定義し，「二項係数」と呼ぶ．
- $0\le n_i\ (i=1,2,\ldots,r)$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} n_i = n$ のとき，$\displaystyle\binom{n}{n_1\,n_2\,n_3\,\cdots\,n_r} := \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\,\cdots\,n_r!}$ を**多項係数**と言う．

さて，上の記号は何に使うかというと：1 から n までの数字を書いた n 枚のカードがあって，これから k 枚を取り出す場合を考える．取り出し方（戻し方）に応じて，大体3とおりある．

Case 1: n 枚のカードから繰り返しを許して k 枚とり，その結果を並べる場合．この場合の結果は $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ と言う列になる（a_j は j 番目に出たカードの目）．ここでそれぞれの a_j は勝手に 1 から n の値をとれるので，結果の総数（場合の数）は

$$n\cdot n\cdot n\cdots n=n^k \tag{1.3.1}$$

となる．

Case 2: n 枚のカードから繰り返しを許さないで k 枚とり，その結果を並べる場合．やはり結果は $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ の形になるが，今回は a_j は全て別のものにならざるを得ない．a_1 は n 通り，a_2 は a_1 をよけるから $(n-1)$ 通り，と考えて行くと，結果は

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!} \tag{1.3.2}$$

となる．高校ではこの数を ${}_nP_k$ と書いた．

Case 3: n 枚のカードから繰り返しを許さないで k 枚とるが，その順序は気にしない場合．やはり結果は case 2 のように $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ の形になるが，今は a_j の順序を気にしない（順序が異なっても同じものと見なす）．従って場合の数は *Case* 2 のものを 「k 個の数字を並べる並べ方」$k!$ で割ったものになる：

$$\frac{n!}{(n-k)!}\times\frac{1}{k!}=\binom{n}{k}={}_nC_k \tag{1.3.3}$$

1つだけ，これらの応用例を挙げておく．この証明は帰納法でもできるし， Case 3 の数え方を使う方法もある．