2019.04.09.

微分積分学・同演習 A （S1-1 クラス，理学部物理学科向け）

担当：原　隆（数理学研究院）：伊都キャンパス W1 号館 C-601 号室，
phone: 092-802-4441,　e-mail: hara@math.kyushu-u.ac.jp

Office hours: 講義終了後に質問を受け付けます（そのうちに，正式な office hours の時間を決めます）．メイルでの質問も歓迎．

概要：

この講義は後期の「微分積分学・同演習 B」とあわせて完成し，一年を通して『本格的な大学の微積分』を学ぶことを目的とする．前期では特に,「極限とは何か（その厳密な定義）」「１変数函数の微分とその応用」「１変数函数の積分」などを扱う．後期では「多変数函数の微分（偏微分）」「多変数函数の積分（重積分）」および（時間があれば）「級数論」を扱う予定．**ただし,「1 変数函数の積分」の代わりに「偏微分」を前期にやるかもしれない．**

前期でキーとなる概念：(偏微分)，極限,（ϵ-δ 論法とコーシー列），微分，テイラー展開，積分または偏微分

後期でキーとなる概念：偏微分または積分，重積分，級数,（微分方程式）

特に講義を通して身につけて欲しいこと：

この講義で学んでほしい「能力」は以下の２つである．

- （最低限）微分や積分のいろいろな概念を習得し，実際に応用して使えるようになること
- （可能ならば）単にやり方を覚えるのではなく，自分の議論に自信が持てるようになること．

高校までの数学では主に最初の面に力点が置かれていた．ところが，昨今の中学，高校でのカリキュラムの制約上，その最初の面ですら，練習不足と思われる人が増えている．また,「この問題はこのように解けば良い」ことは知っているけども,「その方法がなぜ正しいのか」が説明できない人（「本当にその方法で良いのか，自信ある？」と問いかけると固まってしまう人）も多いようだ．一方，物理学科では（特に理論系）将来，少し高度な数学を要する面があり，その場合には，**自分で自信を持って議論を組み立てる能力**が不可欠となる．そこで，この講義ではこれまでの練習不足を補いつつ，自信を持って議論を組み立てられる人を養成することを目指す．

内容予定：

（以下は大体の目安で,「回数」はいい加減です．皆さんの理解度により，かなりの変更や増減あり．太字は特に高校よりも新しく重要な概念です — 必ずしも試験での比重が高いわけではないが.）

0. 物理などの講義のために「偏微分」の記号の説明（初回に定義のみ；偏微分は後でちゃんとやります.）

I. 極限，実数の連続性，関数の連続性（4 回程度）

1. 極限の厳密な定義：**ϵ-N 論法，ϵ-δ 論法**（教科書 2.1 節）．
2. 実数の連続性，有界単調列の収束，**コーシー列**（教科書 2.2 節前半と 4.1 節の最初）
3. 連続関数の定義，最大値最小値の定理，**中間値の定理**（教科書 2.2 節後半）

II. 1 変数函数の微分（4 回程度）

1. 微分の厳密な定義（定義だけ）と**平均値の定理**（教科書 2.3 節）
2. 関数の増減と凹凸（教科書 2.4 節）
3. テイラーの定理と**テイラー展開**（教科書 2.5 節）⟵ 案外，引っかかるかもしれないから要注意

この辺りで中間試験

このあと,「1 変数関数の積分」または「偏微分」をやります．

III. 1 変数函数の積分をやる場合は以下のように（4 回程度）

1. いくつかの基本概念（一様連続性，上限と下限；教科書 3.1 節）
2. **定積分の定義**（教科書 3.2 節）
3. 定積分の基本性質（教科書 3.3 節）
4. 数 e および指数関数，対数関数（教科書 3.4 節）
5. 広義積分

III. 偏微分をやる場合は以下のように（6 回程度）

1. ２変数の関数とは何か？

2. 偏微分の定義とその意味
3. 連鎖律
4. 高階の偏微分
5. 偏微分の応用：２変数関数の極値問題

この辺りで期末試験

教科書：斎藤正彦「微分積分学」（東京図書）．一年生には難しく感じられる部分も多いかもしれませんが，将来，特に理論物理に進んだ人には頼りになる教科書です．

参考書：上の教科書が合わないという人には，以下の本をお薦めします．また，この講義専用の講義ノートを別途つくって，僕の web page に上げます．

- 野村隆昭「微分積分学講義」（共立出版）．九大の数学科の先生が書いた本．進んだ面白い話題も入っているが，語り口は柔らかく，読みやすい．
- 高木貞治「解析概論」（岩波）．今の学生さんには難しすぎる，との意見もあるが，不朽の名著だ．超お奨め．
- 小平邦彦「解析入門 I, II」（岩波）．上の解析概論を少しとっつきやすくした感じ．激しくお奨め．
- 杉浦光夫「解析入門 1, 2」（東大出版会）．かなり分厚いけど，その分，記述は丁寧．お奨め．
- 僕の友達の田崎晴明さんの書きかけの本「数学：物理を学び楽しむために」．激しく超お奨め !!
  彼の web page (`http://www.gakushuin.ac.jp/~881791/mathbook/`) からダウンロードできる．

評価方法：中間試験（＋レポート）と期末試験の成績を総合して評価する．そのルールは以下の通り：

- 最終成績は一旦，１００点満点に換算してから，この大学の様式に従ってつける．
- その１００点満点（最終素点）は，以下のように計算する．
  - まず,「中間試験（＋レポート）の点」「期末試験の点」をそれぞれ 100 点満点で出す．
  - 次にこの２つを以下の式で「平均」し，一応の総合点を出す：

$$(\text{総合点 } A) = 0.50 \times (\text{中間（＋レポート）の点}) + 0.50 \times (\text{期末の点})$$
$$(\text{総合点 } B) = 0.10 \times (\text{中間（＋レポート）の点}) + 0.90 \times (\text{期末の点})$$

  - ただし，上の重みを若干変更する可能性はある（総合点 A で，中間と期末の比を 4 : 6 にするなど）．
  - 最終素点は

$$(\text{最終素点}) = \max\{\, (\text{総合点 } A), (\text{総合点 } B)\,\}$$

    とする．つまり,（総合点 A）と（総合点 B）を比べて，良い方をとるのだ．
- 上の「最終素点」に，必要ならば全体に少し修正を加えたものをつくり，最終成績を出す.（例外：以下の但し書きを参照）
- レポートの点は原則として，総合点 A, B には加えない．ただし，上の計算では合格基準に少し足りない人（百点満点で 10 点不足が限度）を助けるかどうかに使用する．また，レポートがずば抜けて良い場合，この事実は最終成績に反映される事もある．

（A をとるための重要な但し書き）期末試験ではあまり冒険をする訳にはいかず,（A と B の区別をつけるような）極端に難しい問題は出題しにくい．そのため，中間試験にも A, B の峻別を行う機能をある程度持たせて，**中間・期末ともに成績優秀**な人にのみ，A をあたえるようにする可能性がある —— 特に，期末を簡単にしすぎた場合はこうなる．この意味で，上の（最終素点）の式は完全には正しくなく，A をとるためには期末だけでの一発逆転は無理かも知れない．A を狙って頑張る人はこの点を考慮して，中間・期末とも確実に受験してほしい．

「学習到達度再調査」について：

この大学には「学習到達度再調査」とかいう，変な制度がある．この科目は必修科目でもあり，これに変に期待する人がいるかもしれないので，ここではっきり，宣言しておこう．

> 「再調査」は行わない可能性もある．再調査を行うか，誰を対象とするかは，**こちらの一存で**（もちろん公平に，しかし厳しく）決めさせていただく．

本音を言うと，再調査をする方が，こちらとしては厳しく点を付けやすい（厳しくつけておいて，誰を助けるかは再調査できちんと確かめれば良いから）．その分，皆さんには過酷なものになるでしょう．

だから，再調査には頼らず，期末試験まででちゃんと合格できるよう，しっかり学習して下さい．**期末試験までなら**皆さんの学習を助ける努力は惜しまないつもりで，質問などにも忍耐強く相手することを保証します．

合格（最低）基準：

合格のための条件（A, B がとれる条件ではない！）は，**講義中に出題する例題，レポート問題と同レベルの問題が解けること**である.（ただし「時間がなくてレポートは出せないけど試験には出すぞ」などの指示を講義中に与えることもあり得る.）具体的には**大体**，以下のようになる（進度の都合で内容に若干の変更があるので，完全なリストを現時点で呈示する事はできないが，講義を追っておれば明らかになるはず）.

- １変数関数の微分とその応用について，厳密性を少し犠牲にしても良いから，計算ができること（具体的には，導関数の計算，函数の増減と極値問題，逆関数の計算，テイラー展開など）.
- 1 変数函数の積分とその応用についても，厳密性を少し犠牲にしても良いから，計算ができること.

レポート，宿題について：

ほぼ毎回，簡単なレポートや「お奨めの宿題問題」を出す予定である．このレポートはレポートボックスに提出してもらい，採点ののち，次の講義時に返却の予定（詳細は来週）．これらの出題意図は「この程度できれば講義についていけるし，合格も可能だ」という目安を与えることと家庭学習の引き金にすること，である．成績評価に占めるレポートの比重は低いが，この講義をこなす上では重要な意味があるので，是非やること.

重要：**レポートは友達と相談した結果を書いても良い．ただし，誰と相談したかは明記すること．**（「俺は人に教えてやっただけで人からは全く教わってない」と思う人は書かなくても良いが.）相談した人の名前を書かせるのは，「お世話になった文献，人にはきちんと感謝する」という，学問上の最低ルールを守ってもらうためである．なお，**お世話になった人の名前を書いてもレポートの成績が不利になることはない.**

プリントの使いかた：

例年，僕は講義でプリントを配っていた．これらのプリントは板書にアップアップしないでも講義が聴けるように，また，教科書の足りないところを補うためだった.

ところが，毎回プリントを印刷するのはなかなか大変だし，講義の前にプリントがほしい，と言う声もあった.

このような理由のため，数年前から**講義の補助プリントはこの講義の web page に上げておいて，皆さんに自由にダウンロードしてもらう方法に変更し**，講義では最低限のプリント（日々のレポート問題など）のみを配ることとする．この講義のアドレスは http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/18/biseki01a-web.html だが，「九大 原隆」で検索して僕の web page を見つけた後，下の方の「講義」をクリックすれば，講義の一覧が出る.

なお，プリントにはタイプミスなどがかなりあると思うので，気づいたらできるだけ指摘してくれるとありがたい.

特に注意を要する題材：

１．この講義で一番難しいであろうことは，**極限の厳密理論**で，かなりの人が戸惑うでしょう．これはそんなに難しいものではなく，ゆっくり考えればさえすれば誰でも理解できます．また，将来，とくに理論系に行く人の半分くらいは，この程度が使えることが望ましいと思います.

しかし，新学期早々にここで立ち直れなくなっても困るので，これは最低限に絞りました．興味のある人は，個別に質問するなど，して下さい.

２．この講義の大きな目的は「使える微積分を学ぶ」ことで，**実際に手を動かす**（計算する）ことが大事です.

３．この講義の大半は,「高校でやったことのやり直し」に見えるかもしれませんが，ここに落とし穴があります．色々な題材が，少しずつ進化していて，**油断していると全くわからなくなってる**可能性がありますから，注意.

4. **テイラー展開**は高校では見なかったはずのもので，案外とまどう人が多いことに気づきました．一見簡単そうですが，油断しないで下さい.

この科目に関するルール：

世相の移り変わりは激しく，僕が学生だったときには想像すらできなかったことが大学で行われるようになりました．そのうちのいくつかは良いことですが，悪いこともあります．皆さんの反発は覚悟の上で，互いの利益のために，以下のルールを定めます.

- まず初めに，学生生活の最大の目的は勉強することであると確認する.

- 講義中の私語，ケータイの使用はつつしむ．途中入室もできるだけ避ける（どうしても必要な場合は周囲の邪魔にならないように）．これらはいずれも講義に参加している他の学生さんへの最低限のエチケットです．
- 僕の方では時間通りに講義をはじめ、時間通りに終わるよう心がける．
- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義を通して行う（補助として僕の web page も使う —— アドレスは http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html）.「講義に欠席したから知らなかった」などの苦情は一切，受け付けない．
- レポートを課した場合，その期限は厳密に取り扱う．
- E-mail による質問はいつでも受け付ける（hara@math.kyushu-u.ac.jp）．ただ，回答までには数日の余裕を見込んで下さい．なお，学生さんのメイルが往々にして spam mail に分類されてしまう事があります．見分け易いように，題名には「物理学科の○○です」などと書いて下さい．また僕にメイルしたのに，２，３日しても返事がない場合は返事を催促して下さい．たとえどんなに理不尽（例：人格攻撃）なメイルであっても，僕は返事はすることにしています．返事がないのはメイルが届いていない可能性が高いです．

演習書の奨め：

教科書の例題や節末問題，章末問題はできるだけやること．それでもわかった気がしなかったら，演習書（いわゆる問題集）をやることを勧めます．問題をやることによって，自分が曖昧にしかわかっていなかった部分がはっきりしてくることが多い．ただし，その際，**解答を鵜呑みにはせず，自分で納得するまで考えること．考えてもわからなかったら，友達や教官（僕を含む）に訊けばよい**．同じ理由で問題の解答を頭から覚える愚だけは避ける事．

演習書はどれでも良いが，一応，目についたものを列挙すると：

- 三村征雄編「大学演習 微分積分学」（裳華房）— 僕はこれを使った．ちょっとムズイかもね．
- 蟹江，桑垣，笠原「演習詳説 微分積分学」（培風館）— なかなか良いが，はじめは難しく感じるかも．
- 杉浦ほか「解析演習」（東大出版会） — これもまあ，大変ではありますが，良い本．
- 鶴丸ほか「微分積分 — 解説と演習」（内田老鶴圃） — 一番「普通」かも．
- 飯高茂監修「微積分と集合　そのまま使える答えの書き方」（講談社サイエンティフィック） — 題名は変だけど，馬鹿にはできない，なかなかの本．流石は飯高さん監修だけあるな．案外，おすすめ．

これ以外にもいくらでも出版されてるから，図書館や本屋さんで自分にあった（読みやすい，やる気になる）ものを選べば良い．ただしその際，解答や解説の詳しいものがよい．また，無理をして難しすぎるものを選ぶ必要はない．自分が簡単だと思うことでも，(人間はアホやから）わかってないことが一杯あり，むしろ簡単なところが盲点になって先に進めないのだ．簡単な演習書でもやれば，大きな効果があるはず．

本論に入る前に記号のお約束．

$a<b$ を２つの実数，n を非負（負でない）整数とする．

- 整数の全体は $\mathbb{Z}$，自然数（1 以上の整数）の全体を $\mathbb{N}$，有理数の全体を $\mathbb{Q}$，実数の全体は $\mathbb{R}$ と書く．
- 集合 A の要素を大学では「元（げん)」ともいう．(例) 2 は $\mathbb{Z}$ の元である．$\sqrt{2}$ は $\mathbb{Q}$ の元ではない．
- 高校までと異なり,「$a<b$ または $a=b$」を $a\le b$ と書く．同様に,「$a>b$ または $a=b$」を $a\ge b$ と書く．
- $a<x<b$ なるすべての実数の集合を (a,b) と書き，開区間という．教科書ではこの開区間に変な記号（括弧のうえに○がついてる）を使ってるが，打ち込むのが大変だし，標準的ではないので使わない．
- $a\le x\le b$ なるすべての実数の集合を $[a,b]$ と書き，閉区間という．
- 高校と同じく，$n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots2\cdot1$ は n の階乗である．ただし，$0!=1$ と約束する．

(用語の注）あるものがたった一通りに決まる（存在する）とき，業界用語では○○**が一意に決まる（存在する）**という．この表現『一意』は頻出するから覚えよう（英語の unique, uniquely の訳）．

4 月 16 日：今日は極限の話．厳密な話は「これぞ大学の数学」ですが，ちょっと難しく感じる人もいるでしょう．その場合には諦めずに「高校のノリに毛の生えた程度」でも良いから大筋をつかむようにして下さい．

レポート問題についての言わずもがなの注意：レポート問題の数は「必要よりも少ない」ことが多いです．これで足りないと思ったら，教科書，参考書，演習書の該当部分を自分でやってください．

第 1 回レポート問題：

今回は極限について，簡単な計算（高校の復習），および少しだけ厳密な話です．問 1 で問題番号や数列の名前が変なのは,「講義ノート」と同じにしたためです．
なお，*印のついた問題は進んだ話題なので，できなくても悲観するには及びません．

問 1： 以下の数列の $n \to \infty$ での極限を，高校のノリで（厳密性にはあまりこだわらずに）求めよ．ただし，極限の存在しない数列も混じっているかもしれないよ．

$$g_n = \frac{\sin n}{n} \qquad h_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad p_n = \frac{2n+1}{n+1} \qquad q_n = \frac{1}{\log(n+1)} \tag{1}$$

以下は極限の厳密な定義に関する，少し進んだレベルの問題である．できなくても悲観する必要は全くない．でもみんな，一度は挑戦してほしい．

問 2*： 「すべての $\epsilon > 0$ に対して」の意味を実感する問題．以下の (i),(ii) のうち，どれが正しくてどれが正しくないか，判定せよ．正しくないと思うものには反例（正しくない例）を与えよ．(a, b は未知の定数で，もちろん，ϵ には依存しない）．

(i) (すべての $\epsilon > 0$ に対して $|a - b| < \epsilon$) $\Longrightarrow$ $a = b$

(ii) (ある $\epsilon > 0$ に対して $|a - b| < \epsilon$) $\Longrightarrow$ $a = b$

問 3*： 以下の小問に答えよ．(本当は n は正の整数のつもりだが，小問 1), 2) では n は正の実数と思って良い．つまり，条件を満たすような正の実数 n の範囲を求めればよい．)

1) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < 10^{-2}$ となる n の範囲を求めよ．

2) $\epsilon > 0$ を非常に小さい正の実数として，$\dfrac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$ となる n の範囲を ϵ を用いて表せ．

3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ を，ϵ-N 論法を用いて求めよ．その際，$N(\epsilon)$ をどのようにとれば良いかを明記する事．

問 4*： 上の問 3 の 3) と同じノリで，問 1 の q_n の極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$ を，ϵ-N 論法を用いて求めよ．その際，$N(\epsilon)$ をどのようにとれば良いかを明記する事．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

レポートには**学生番号と氏名を明記**のうえ，

4 月 22 日（月）の 17:00 までに，原の部屋（W1 号館 C 棟 6 階，C-601）のポストに

入れて下さい．整理の都合上，用紙は A4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

4 月 24 日：今日も極限の話（＋実数の連続性）．あまり深入りはしませんが，今週もおつきあいくだされ．

第 2 回レポート問題： 今回も前回に引きつづき，極限についての簡単な計算（高校の復習），および少しだけ厳密な話です．問題番号は今学期とおしての通し番号にしています．
なお，*印のついた問題は進んだ話題なので，できなくても悲観するには及びません．

問 5： 以下の極限を，高校のノリで（厳密性にはあまりこだわらずに）求めよ．

$$(1)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x} \qquad (2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} \qquad (3)\quad \lim_{x\to 0}\; x\sin\Bigl(\frac{1}{x}\Bigr)$$

以下は極限の厳密な定義に関する，少し進んだレベルの問題である．できなくても悲観する必要は全くない．でも興味と意欲のある人は挑戦してほしい．

問 6： $\lim_{x\to 0} x^{1/4}$ を，ϵ-δ 論法によって求めよ． この場合，最良の $\delta(\epsilon)$ を使う必要は全くない．計算し易いように ϵ, δ を制限しても良い（もちろん，本当に見たい ϵ の範囲は入っている必要があるが）． この問と直後の問 6 で「求めよ」というのは,「予想される極限値に収束することを **ϵ-δ 論法によって証明せよ**」の意味です．予想される極限値を求めるには「高校のノリ」などが必要なのは，授業で説明した通りです．

問 7*： $\lim_{x\to 2}(x^4 - x^3 - x)$ を，ϵ-δ 論法によって求めよ． この場合，最良の $\delta(\epsilon)$ を使う必要は全くない．計算し易いように ϵ, δ を制限しても良い（もちろん，本当に見たい ϵ の範囲は入っている必要があるが）．

問 8：** （数列に関するチャレンジ問題）講義ノートの命題 1.1.7 は

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$$

と主張している．そこで，右辺の 「a_1 から a_n の平均」をより一般の加重平均にして，同様の結果が成り立つかどうかを考えよう．すなわち，$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ を正の数列として，

$$b_n := \Bigl(\sum_{j=1}^{n} \rho_j\, a_j\Bigr) \Big/ \Bigl(\sum_{j=1}^{n} \rho_j\Bigr)$$

を考える.「$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば必ず $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ となる」ためには，$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ がどのような条件を満たしていれば良いか？(命題 1.1.7. は $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \ldots = 1$ に相当している.）一般の ρ_j を考えにくい場合は，$\rho_j = j^\beta$（β は定数）の場合に「どのような β の値なら $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ となるか？」を考えても良い．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：（連休のため，かなり変則です）

レポートには**学生番号と氏名を明記**のうえ，

5 月 7 日（火）の 11:00 までに，原の部屋（W1 号館 C 棟 6 階，C-601）のポストに

折らないで入れて下さい．整理の都合上，用紙は A4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

先週のレポートの略解

問 1： 最初に「高校のノリ」の解答を書きます．その後に，ϵ-N での解答を書きます．

$\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ である．なぜなら，$|g_n| \le \dfrac{1}{n}$ であり，かつ右辺がゼロにいくから，左辺もゼロに行く（はさみうち）．

$\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ である．なぜなら，$h_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ であって，分母が無限大に行くから．

$\lim_{n\to\infty} p_n = 2$ である．なぜなら，$p_n = \dfrac{2+1/n}{1+1/n}$ であって，分子は 2 に，分母は 1 に行くから．

$\lim_{n\to\infty} q_n = 0$ である．なぜなら，分母が無限大に行くから．

ϵ-N 論法での解答は以下のようになります（レポートでは要求していませんが，参考までに）．

<u>g_n について</u>

（まず前提として，高校のノリで，極限はゼロだと予想しておく．以下，ϵ-N 論法で，これを証明する．）

任意の $\epsilon > 0$ を固定した時，$N(\epsilon) = 1/\epsilon$ と決めると，

$$n > N(\epsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad |g_n| \le \frac{1}{n} < \frac{1}{N(\epsilon)} = \epsilon$$

が成り立つ．これは $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ を ϵ-N 論法で書いたものそのものであるから，極限はゼロと証明された．

（注意）授業中でも述べたように，$N(\epsilon)$ はもっと大きく取っても良い．例えば，$N(\epsilon) = 5/\epsilon$ などでも構わない．

<u>h_n について</u>

（まず前提として，高校のノリで，極限はゼロだと予想しておく．以下，ϵ-N 論法で，これを証明する．）

任意の $\epsilon > 0$ を固定した時，$N(\epsilon) = 1/\epsilon^2$ と決めると，

$$n > N(\epsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad |h_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{N(\epsilon)}} = \epsilon$$

が成り立つ．これは $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ を ϵ-N 論法で書いたものそのものであるから，極限はゼロと証明された．

（注意）授業中でも述べたように，$N(\epsilon)$ はもっと大きく取っても良い．また，$\epsilon > 0$ は充分に小さいものだけを考えれば十分である．なので，$0 < \epsilon < 1$ のみを考えることにして，$N(\epsilon) = 1/\epsilon^4$ などでも構わない．（注意：$0 < \epsilon < 1$ なら $1/\epsilon^2 < 1/\epsilon^4$ なので，$N(\epsilon)$ を大きめに取ったことになっている．$\epsilon > 1$ ならこうではないので，話がややこしくなる．この意味で，ϵ を小さいものに限定しておくのは良い考えである．）

<u>p_n について</u>

（まず前提として，高校のノリで，極限は 2 だと予想しておく．以下，ϵ-N 論法で，これを証明する．）

一発でやるのは大変なので，まずは「前提」となる計算をする．

（前提の計算；どのくらい n が大きければ良さそうか？）

$$p_n - 2 = \frac{2n+1}{n+1} - 2 = \frac{-1}{n+1}$$

であるから，$n > 1/\epsilon - 1$ ならば，上の絶対値は ϵ より小さい．

（上を基にして，極限を求める証明）

任意の $\epsilon > 0$ を固定した時，$N(\epsilon) = 1/\epsilon$ と決めると，

$$n > N(\epsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad |p_n - 2| = \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{N(\epsilon)+1} < \frac{1}{N(\epsilon)} = \epsilon$$

が成り立つ．これは $\lim_{n\to\infty} p_n = 2$ を ϵ-N 論法で書いたものそのものであるから，極限はゼロと証明された．

（注意）上では $N(\epsilon)$ を，ギリギリの値よりもちょっとだけ大きめに取った．ギリギリなら $N(\epsilon) = 1/\epsilon - 1$ である．

<u>q_n について</u>

（まず前提として，高校のノリで，極限は 0 だと予想しておく．以下，ϵ-N 論法で，これを証明する．）

一発でやるのは大変なので，まずは「前提」となる計算をする．

（前提の計算；どのくらい n が大きければ良さそうか？）

$$q_n = \frac{1}{\log(n+1)}$$

なので，$q_n < 1/\epsilon$ を解くと，$n+1 > \exp(1/\epsilon)$ になる．

（上を基にして，極限を求める証明）

任意の $\epsilon > 0$ を固定した時，$N(\epsilon) = \exp(1/\epsilon)$ と決めると，

$$n > N(\epsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad |q_n| = \frac{1}{\log(n+1)} \le \frac{1}{\log\bigl(N(\epsilon)+1\bigr)} < \frac{1}{\log\bigl(N(\epsilon)\bigr)} = \frac{1}{1/\epsilon} = \epsilon$$

が成り立つ．これは $\lim_{n\to\infty} q_n = 0$ を ϵ-N 論法で書いたものそのものであるから，極限はゼロと証明された．

（注意）上では $N(\epsilon)$ を，ギリギリの値よりもちょっとだけ大きめに取った（結果がちょっとだけ簡単になるので）．ギリギリなら $N(\epsilon) = \exp(1/\epsilon) - 1$ であり，もちろん，これでも良い．

問 2： みなさん，答えは大体あってましたが，特に (1) の理由を書いてない人がほとんどでした．今回は減点してません（ちゃんと理由が説明した人は＋点）．次回からは「判定する」問題でも理由をちゃんと書いてください．

(1) 正しい．証明には背理法，または対偶を取るのが良い．

（背理法を用いた証明）．$a \ne b$ と仮定する．すると，$\epsilon = |a-b|/2$ は正の数である．しかし，このとき，不等式 $|a-b| > |a-b|/2 = \epsilon$ が成立してしまうので，仮定が成り立たない．つまり，仮定が成り立つなら，$a \ne b$ は許されない．

（対偶を用いた証明）．対偶は「$a \ne b$ ならば，$|a-b| \ge \epsilon$ となるような正の数 ϵ が存在する」である（ここのところが案外，難しいとは思うが）．でもこの対偶の結論は，$\epsilon = |a-b|$ とか $\epsilon = |a-b|/2$ などとすれば成立するので，対偶は正しい．よって対偶を取る前の命題も正しい．

(2) 間違いである．反例は，例えば，$a = 1, b = 2, \epsilon = 2$ などがある．より一般に，$a \ne b$ が与えられた時でも，$\epsilon = 2|a-b|$ などが反例である．

問 3： かなりの人ができていましたが，不等式を n について解く際に間違った人がある程度，いました．

(1) 解くだけ．答えは $n > 10^4$.

(2) 解くだけ．答えは $n > \epsilon^{-2}$.

(3) 最短の解答は，以下のようになります.（上の (2) は，下の $N(\epsilon)$ の選び方を見つけるためのヒントでした.）

任意の $\epsilon > 0$ に対して，$N(\epsilon) = \epsilon^{-2}$ ととってみる．すると，$n > N(\epsilon)$ では，

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{N(\epsilon)}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^{-2}}} = \epsilon$$

が成り立つ．これは ϵ-N 論法における，$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ の定義そのものである．よって極限はゼロ．

問 4： 上の問 1 の (4) を参照.

いくつかの注意とコメント

- かなりの人が頑張っていたのは良かったと思います．また，ほとんどの人が A4 で出してくれたので僕は楽でした．是非，この調子で進んでください．
- 講義で述べたように，ϵ-N 論法は,「見当をつけた極限の値 α」に**実際に収束することを証明する**ための論法で，極限の値 α を求めるのには，直接の役には立ちません．なので，極限の値そのものは（普通は）別途見つける必要があり，その際には『高校のノリ』などを駆使する必要があります．

（補足）間違った α の値を用いて ϵ-N 論法を進めるとどこかで破綻するし，逆に正しい値を用いた ϵ-N 論法は絶対にうまく行くはずですから，最終的に正しい極限値かどうかの判定にはなります.（実際に「間違った α の値を用いてやってみたらどこかで破綻する」ことを確かめようとした人がいました．大変に良いと思います.）

- 同様に，今日やった ϵ-δ 論法も，「極限の値を見つけるためのもの」というよりも，「他の方法で見当をつけた α に**実際に収束する**」ことを証明するためのものです.
- 上の解答例でも，授業中にも説明したように，$N(\epsilon)$ はギリギリ効率よく（小さめに）とる必要はありません．計算しやすいように，大きめにとることが普通です．例えば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4+n^3+3n^2+2n+7}=0$ をやる場合，この分数が ϵ より小さい n の範囲をきっちり求めるのは大変です．でも $N(\epsilon)$ は大きめにとれば良いのだから，別に困りません．今日のレポート問題の問 7 は，このような事情を ϵ-δ でやってもらうものになっています.
- 上で述べたように，ϵ は「正で小さい」ものだけを考えれば十分です．なぜなら，ある $\epsilon>0$ で ϵ-N の結論部分が成り立つなら，$\epsilon'>\epsilon$ なる ϵ' でも自動的に成り立つから．この理由で，証明などでは最初から「$0<\epsilon<1/5$ に対して...」などと ϵ の範囲を制限することがあります.（このように制限すると，数式が簡単になる場合が案外あり，一例を上で示しました.）
- 数学の「概念」は，一旦わかれば非常に明快かつ便利なものです．ですが，それが基礎的なものであるほど，最初はなかなかわかりにくいものです．ϵ-δ なども（授業で説明したように）「窓に入ってくるかどうかを考える」という，非常に自然なものなのですが，慣れないうちは混乱するかもしれません．いくつかの具体例（講義ノートにもあります）をやってみると，だんだんとわかってくるところがあると思います.

最後に，講義ノートの命題 1.1.7 の証明（講義でやったけど，問 7 にも関係あるので再録）

任意の $\epsilon>0$ を固定する．まず，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}a_k=\alpha$ であることから，正の数 $N_1(\epsilon/2)$ が存在して，「$k>N_1(\epsilon/2)$ ならば $|a_k-\alpha|<\epsilon/2$」が成り立つことに注意する.

これを踏まえて，（十分大きな n のみを考えれば良いことは既に注意してるので）$n>N_1(\epsilon/2)$ を考えて（以下，簡単のため，$N_1(\epsilon/2)$ を N_1 と略記）

$$(*)\qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k-\alpha=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k-\alpha)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}(a_k-\alpha)+\frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}(a_k-\alpha)=\frac{1}{n}S_1+\frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}(a_k-\alpha)$$

と分ける — ここで $\displaystyle S_1=\sum_{k=1}^{N_1}(a_k-\alpha)$ を定義した．さらにこの時,

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}(a_k-\alpha)\right|\le\frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}\bigl|a_k-\alpha\bigr|<\frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}\frac{\epsilon}{2}=\frac{n-N_1}{n}\times\frac{\epsilon}{2}<\frac{\epsilon}{2}$$

が成り立っている.

さて，S_1 はこれまでの定義によって決まった定数なので，n を十分大きくとると，$\frac{1}{n}S_1$ をいくらでも小さくできる．特に，（大きな）$N_2(\epsilon/2)$ を見つけて，「$n>N_2(\epsilon/2)$ ならば $\left|\frac{1}{n}S_1\right|<\epsilon/2$ が成り立つ」ようにできる.

以上の準備の元に，$N(\epsilon)=\max\{N_1(\epsilon/2),N_2(\epsilon/2)\}$ と決める．すると，$n>N(\epsilon)$ ならば，上の（$*$）の第一項，第二項は共に $\epsilon/2$ より小さい．つまり，「$n>N(\epsilon)$ ならば，$\displaystyle\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k-\alpha\right|<\epsilon$」が成り立つことが証明された.

これは $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\alpha$ を ϵ-N 論法で書いたものに他ならない. □

5 月 7 日：今日は有界単調列，連続性などの話

第 3 回レポート問題：

問 8：** 前回の問 8（チャレンジ問題）に挑戦しよう.

問 9： （リベンジ問題）次の極限を ϵ-δ 論法を用いて求めよ.

$$(1)\quad \lim_{x\to 1}(x^3+2x^2+x) \qquad (2)\quad \lim_{x\to -1}(x+1)^{1/5}$$

問 10： 以下の数列が収束するか否かを判定せよ．ただし，極限値は求めなくてもよい.（つまり，極限がわからなくても使える収束の判定法を用いよう，ということだ.）

$$(1)\quad a_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \qquad (2)\quad b_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \qquad (3)\quad c_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k} \qquad (4^*)\quad d_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

(3) はちょっと難しく見えるかもしれないが，少し工夫するとできる．(4) も似たような問題ではあるが，もう少し工夫が必要.

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります.

レポート提出について：

レポートには**学生番号と氏名を明記**のうえ，

5 月 13 日（月）の 17:00 までに，原の部屋（W1 号館 C 棟 6 階，C-601）のポストに

折らないで入れて下さい．整理の都合上，用紙は A4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ.

——————先週のレポートの略解——————

問 5：

(1) イメージとしては，e^x の方が x よりもずっと速く無限大になるから，極限はゼロ．厳密にやる方法の一例は以下のような感じ.

$f(x) = e^x - 1 - x - x^2/2$ とおくと，

$$f'(x) = e^x - 1 - x, \quad f''(x) = e^x - 1$$

である．特に，$x > 0$ では $f''(x) > 0$ である．また，$f'(0) = f(0) = 0$ でもあるので，これらから $x > 0$ では $f'(x) > 0$，$f(x) > 0$ がわかる．つまり，$x > 0$ では

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}, \qquad \frac{e^x}{x} > 1 + \frac{x}{2}$$

である．この右辺は $x \to \infty$ で無限大に行くから，e^x/x も無限大に行く.

（注意）講義の中で注意したように，ある函数 $g(x)$ が $x \to \infty$ で無限大に行くことを言うには，$g'(x) > 0$ のみでは足りない（反例はたとえば，$g(x) = 1 - 1/x$）．この問題では e^x が x よりも「速く」無限大に行くことを言う必要があるので，上の解答例では $e^x \geq x^2/2$ を示した.

(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^2}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{1+\cos x}=1\times 0=0$$

(3) これは問 [1] の g_n と実質的に同じ．極限は 0.

問 6： 少し出題ミスでした．$x^{1/4}$ が実数の範囲で定義できるためには，$x>0$ が必要でしたね．ここを気にしてくれた人がいました．

（裏の計算）極限値の予想は 0．それで $|x|^{1/4}$ が ϵ より小さくなる x の範囲（十分条件）を求めたい．
$|x|^{1/4}<\epsilon$ の両辺を 4 乗して $|x|<\epsilon^4$ となるから，$\delta=\epsilon^4$ とすれば十分だろう．

（表の解答）任意の $\epsilon>0$ に対して $\delta=\epsilon^4$ ととると，

$$|x|<\delta \quad \text{では} \quad |x^{1/4}|<\delta^{1/4}=\epsilon$$

がなりたつ．これは $\lim_{x\to 0}x^{1/4}=0$ を ϵ-δ で書いたものに他ならない．よって，極限は 0 である．

問 7： （裏の計算）極限値の予想は 6．それで因数分解を用いて $|x^4-x^3-x-6|=|x-2|\times|x^3+x^2+2x+3|$ であることを利用して，この量が ϵ より小さくなる x の範囲（十分条件）を求めたい．

x が大きいと右辺の $|x^3+x^2+2x+3|$ も大きくなって厄介なので，最初から $|x-2|<\delta\le 1$ というように，δ と x の範囲を区切って考える（ここの δ はもっと小さく，$\delta<0.1$ などでも良い）．最初から区切らないやり方も最後に載せる．この場合，$1<x<3$ であるから，

$$|x^4-x^3-x-6|=|x-2|\,|x^3+x^2+2x+3|<45|x-2|$$

がなりたつ．つまり，$|x-2|$ を $\epsilon/45$ より小さくとれば，上の量は ϵ よりも小さくなる．

（表の解答）任意の $\epsilon>0$ に対して $\delta=\min\{1,\epsilon/45\}$ ととると，

$$|x-2|<\delta \quad \text{では} \quad |x^4-x^3-x-6|=|x-2|\,|x^3+x^2+2x+3|<\delta\times 45\le\frac{\epsilon}{45}\times 45=\epsilon$$

がなりたつ．これは $\lim_{x\to 2}(x^4-x^3-x)=6$ を ϵ-δ で書いたものに他ならない．よって，極限は 6 である．

(最初から x の範囲を区切らない方法；最終的には区切りますが)

$$|x^4-x^3-x-6|=|x-2|\times|x^3+x^2+2x+3|$$

は同じ．さて，$|x-2|<\delta$ とすると，$2-\delta<x<2+\delta$ である．この範囲では，上の右辺の第 2 因子は

$$|x^3+x^2+2x+3|<(2+\delta)^3+(2+\delta)^2+2(2+\delta)+3=19+18\delta+7\delta^2+\delta^3$$

となる．δ はゼロに近く取って良いから（why?），上の右辺は大体 19 だとわかる．でもちょっとだけ 19 よりも大きいから，例えば，$\delta<1/100$ とかにしておけば，上の右辺は 20 以下，となる．なので，$\delta=\min 1/100,\epsilon/20$ などとしても良いことがわかる．

（コメント）上で重要なのは，因数分解した時の因子 $(x-2)$ である．これはモロに δ くらいの大きさだから，これ以外の部分 (x^3+x^2+2x+3) が**あまり大きくないなら，**この二つをかけた結果をいくらでも小さくできる．
問題は「(x^3+x^2+2x+3) が大きくない」ことを示すのが難しく見えるところだろう．皆さんはこれまで，あまりこのような「評価」をやったことがないだろうから，慣れないと戸惑うのは仕方ない．
この辺りは,「何が重要か，どこまで妥協できるか」を考えつつ，経験を積めば，段々とできるようになる.（そもそも，x は 2 の近くにいるわけだから，(x^3+x^2+2x+3) はそんなに大きなわけがない（$x\approx 2$ なら 19）．この感覚をきちんと言語化できたら十分なのだが，今の段階ではできなくてもあまり気にする必要はない.）

5 月 14 日：今日はコーシー列，函数の連続性などの話．ある程度抽象的な話は，今日および来週の前半で終わる予定で，その後は具体的な計算主体になります．

第 4 回レポート問題：

問 11： 以下の数列がコーシー列であるか否かを判定せよ．コーシー列の場合には，$N(\epsilon)$ をどう取れば良いか，も明記しよう — もちろん，ギリギリの大きさの $N(\epsilon)$ にする必要はない．（**この問題は，「コーシー列」の定義を理解して，以下の数列がその定義に合ってるか否かを判定してもらうものです．すでに収束を判定してもらったものも含まれてますが，コーシー列の定義の確認だと思って，やってみてください．**）

(1) $a_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ によって定義される数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

(2) $b_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}$ によって定義される数列 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$．ここで α は正の定数．（コーシー列か否かは α の値によるかもしれませんよ）

(3) $n \geq 1$ に対して不等式

$$|c_{n+2} - c_{n+1}| \leq r\,|c_{n+1} - c_n|$$

を満たす数列 $(c_n)_{n=1}^{\infty}$．ただし，ここで r というのは，$0 < r < 1$ を満たす（n によらない）定数である．

なお，必要なら，和の大きさを評価するには「積分を使ったズルい方法」を用いても構いません．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

レポートには**学生番号と氏名を明記**のうえ，

5 月 20 日（月）の 17:00 までに，原の部屋（W1 号館 C 棟 6 階，C-601）のポストに

折らないで入れて下さい．整理の都合上，用紙は A4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

——————先週のレポートの略解——————

問 8： ともかく，$\rho_j \equiv 1$ の場合の証明を参考にしてやってみよう．

（PART I）以下では，「$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \rho_j = \infty$ ならば，b_n の極限が必ず α である」ことを証明する．

まず任意の（小さな）$\epsilon > 0$ を固定する．すると，a_n の極限が α であるから，（大きな）$N_1 = N_1(\epsilon/2)$ が存在して，

$$(*) \qquad n > N_1 \qquad \Longrightarrow \qquad |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$$

が成立する．そこで，$n > N_1$ に対して

$$(**) \qquad b_n - \alpha = \frac{\sum_{j=1}^{n} \rho_j\, a_j}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j} - \alpha = \frac{\sum_{j=1}^{n} \rho_j\,(a_j - \alpha)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j} = \frac{\sum_{j=1}^{N_1} \rho_j\,(a_j - \alpha)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j} + \frac{\sum_{j=N_1+1}^{n} \rho_j\,(a_j - \alpha)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j}$$

と分けてやる.（∗∗）の第 2 項は上の（∗）のおかげで,

$$\frac{\displaystyle\sum_{j=N_1+1}^{n} \rho_j\,(a_j-\alpha)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\rho_j} \le \frac{\displaystyle\sum_{j=N_1+1}^{n} \rho_j\,|a_j-\alpha|}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\rho_j} < \frac{\displaystyle\sum_{j=N_1+1}^{n} \rho_j\,\frac{\epsilon}{2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\rho_j} < \frac{\epsilon}{2}$$

となっている.

一方,（∗∗）の第 1 項の分子は，N_1 を決めたら決まる定数である．なので，もしも

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\rho_j = \infty$$

であるならば,（大きな）$N_2 = N_2(\epsilon/2, N_1)$ が存在して,

$$(\ast\ast\ast) \qquad n > N_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{N_1}\rho_j\,(a_j-\alpha)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\rho_j}\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

を成立させられる.

以上から，$N = \max\{N_1, N_2\}$ と取れば，$n > N$ において,（∗∗）の右辺第 1 項，第 2 項ともに，その絶対値が $\epsilon < 2$ より小さくなり，結局,（∗∗）の左辺の絶対値は ϵ より小さくなる．つまり,

$$n > N \qquad \Longrightarrow \qquad |b_n - \alpha| < \epsilon$$

が成り立つので，b_n の極限は α になる．以上で，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\rho_j = \infty$ が，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ の十分条件であることが示された.

(PART II) 本当は，これが必要条件でもあることも示して欲しい．その前に「必要条件」の意味を明らかにしておく．問題には「$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば必ず $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ となる」と書いてあるが，この「必ず」の意味は,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ となるようなどんな数列に対しても，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ となる

という意味である.（こうなるような ρ_j の（必要十分）条件を求めよ，というのが問題だった.）

さて，上の意味で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が必要でもあることを示すには，必要条件の定義そのもので,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\rho_j = \infty$ ではない場合には,「$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ではあるが $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ とはならない」数列 (a_n) が存在する

ことを示せば良い.（以下，議論を簡単にするため,「上に有界な単調増加数列は収束する」ことを用いるが，これを使わなくても証明はほとんど同じである.）

いま，$\rho_j > 0$ を仮定しているので，$\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\rho_j$ は常に正であり，かつ，n について単調増加である.「$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\rho_j = \infty$ ではない」とは,「$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\rho_j < \infty$」ということだから，これは要するに，数列 $\sum_{j=1}^{n}\rho_j$ が上に有界であることを保証する．したがって,「上に有界な単調増加数列は収束する」定理から，この数列の極限値が存在するはずなので，それを R としよう：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\rho_j = R$$

（この R が正であることは，$\sum_{j=1}^{n}\rho_j$ が正，かつ単調増加であることから明らか.）

ところがこれは，ϵ-N で書くと,（$\epsilon = R/2$ などとして）

$$\text{ある } N(R/2) \text{ が存在して } n > N(R/2) \text{ では} \qquad 0 < R - \sum_{j=1}^{n}\rho_j < \frac{R}{2}$$

ということである．最後の不等式は，特に，$n \le N(R/2)+1$ までの和が $\frac{1}{2}R$ より大きいことを保証している．なぜなら $n = N(R/2)+1$ に対して上の不等式から

$$\sum_{j=1}^{N(R/2)+1}\rho_j > R - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R$$

となるから.

そこで，数列 a_n として，例えば

$$a_n = \begin{cases} \alpha + 1 & (n \le N(R/2) + 1) \\ \alpha & (n > N(R/2) + 1) \end{cases}$$

と取ってみると，この数列はもちろん，α に収束する．
しかし一方で，等式

$$b_n - \alpha = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \rho_j \, (a_j - \alpha)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \rho_j}$$

の右辺の分子の和の中身は $j \le N(R/2) + 1$ のところのみゼロでなくて

$$b_n - \alpha = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{N(R/2)+1} \rho_j \, (a_j - \alpha)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \rho_j} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{N(R/2)+1} \rho_j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \rho_j}$$

となっている．この上の分母は R 以下，分子は $\frac{1}{2}R$ 以上であることはすでに見た．これを用いると，全ての $n > N(R/2) + 1$ に対して，

$$b_n - \alpha = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{N(R/2)+1} \rho_j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \rho_j} \ge \frac{R/2}{R} = \frac{1}{2}$$

が成り立つことがわかる．これでは，b_n は α に収束しようがない !! というわけで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \rho_j = \infty$ が必要条件であることも証明できた． □

問 9： リベンジ問題なので，簡単に．

(1) （裏の計算）極限値の予想は 4．それで因数分解を用いて $|x^3 + 2x^2 + x - 4| = |x - 1| \times |x^2 + 3x + 4|$ であることを利用して，この量が ϵ より小さくなる x の範囲（十分条件）を求めたい．

x が大きいと右辺の $|x^2 + 3x + 4|$ も大きくなって厄介なので，最初から $|x - 1| < \delta \le 1$ というように，δ と x の範囲を区切って考える（ここの δ はもっと小さく，$\delta < 0.1$ などでも良い）．この場合，$0 < x < 2$ であるから，

$$|x^3 + 2x^2 + x - 4| = |x - 1| \times |x^2 + 3x + 4| < 14|x - 1|$$

がなりたつ．つまり，$|x - 1|$ を $\epsilon/14$ より小さくとれば，上の量は ϵ よりも小さくなる．

（表の解答）任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta = \min\{1, \epsilon/14\}$ ととると，

$$|x - 1| < \delta \quad \text{では} \quad |x^3 + 2x^2 + x - 4| = |x - 1| \times |x^2 + 3x + 4| < 14|x - 1| < 14\delta \le 14 \times \frac{\epsilon}{14} = \epsilon$$

がなりたつ．これは $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x^3 + 2x^2 + x) = 4$ を ϵ-δ で書いたものに他ならない．よって，極限は 4 である．

(2)

（裏の計算）極限値の予想は 0．それで $|x + 1|^{1/5}$ が ϵ より小さくなる x の範囲（十分条件）を求めたい．

$|x + 1|^{1/5} < \epsilon$ の両辺を 5 乗して $|x + 1| < \epsilon^5$ となるから，$\delta = \epsilon^5$ とすれば十分だろう．

（表の解答）任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta = \epsilon^5$ ととると，

$$|x + 1| < \delta \quad \text{では} \quad |(x + 1)^{1/5}| < \delta^{1/5} = \epsilon$$

がなりたつ．これは $\displaystyle\lim_{x\to -1}(x + 1)^{1/5} = 0$ を ϵ-δ で書いたものに他ならない．よって，極限は 0 である．

問 10： みなさん，かなり頑張ってました．有界性を示す（または有界でないことを示す）部分で苦労した人が多かったのは予想通りです．こういうことは高校ではあまりやらなかったでしょうから，今から，できるようになりましょう．(物理学科なら，厳密でなくても以下のような評価が必要になります.)

(1) 「この数列は有界でないので，収束しない」が答えです.「有界でない」ことをどうやって示すか，については，以下に二つの例を示します.

方法 A. 積分を用いる方法．この方法を理解しておけば将来，役に立つでしょう．ただ，この講義に限って言えば，まだ「積分」をちゃんとやってないので，ちょっとフライイングぎみですね.

$$\frac{1}{k} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \log(k+1) - \log(k)$$

の両辺を $k = 1$ から $k = n$ まで足して，

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \log(n+1) - \log(1) = \log(n+1)$$

である．右辺は $n \to \infty$ で無限大に行くから，a_n も無限大に行く.

方法 B. 積分を使わずに工夫する，教科書に載ってる方法．まあ，こういうやり方は気がつかないとできない部分も多いし，汎用性もあまりないので，あまり気にしなくても良いです.（ですが，一応，積分というフライイングなしでやる方法として紹介します.）

$n = 2^m$（$m = 1, 2, 3, \ldots$）のところに着目して，以下のように議論する．任意の正の整数 l に対して，

$$\sum_{k=2^{l-1}+1}^{2^l} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^{l-1}+1}^{2^l} \frac{1}{2^l} = 2^{l-1} \times \frac{1}{2^l} = \frac{1}{2}$$

が成り立つので，

$$a_{2^m} = \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=2^{l-1}+1}^{2^l} \frac{1}{k} \geq \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{2} = \frac{m}{2}$$

を得る．この右辺は $m \to \infty$ で無限大に行くから，a_{2^m} は上に有界でなく，問題の数列は収束しない.

（問題の数列が収束するなら，その部分列ももちろん，収束する．上では「部分列 (a_{2^m}) が収束しない」ことを示したので，対偶により，問題の数列も収束しないといえる.）

(2), (3), (4) は全て（うまく部分列を考えたりして）「上に有界な単調増加数列は収束する」などを用いて収束を証明できます．ただし，有界性を示すのがなかなか難しかったようですね．以下でも「積分を用いたズルイ方法」と「積分をできるだけ用いない方法」を示します．ただ，解答がややこしくなることを避けるため，先ずは積分を用いたズルイ方法での解答例（全文）を書き，そのあとに，積分を用いない方法を書きます．なお，積分を用いた方法は，まだこの授業では積分の基礎をやってないので現時点では「ズルい」方法ですが，物理学科のみなさんは，積極的に使えるようになってもらえれば，将来，役にたつかもしれません.

(2) まず，b_n は（和の中身が正だから）**単調増加**であることに注意する．次に，

$$\frac{1}{k^2} = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^2} dx \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2} dx$$

の両辺を $k = 2$ から $k = n$ まで足すと

$$b_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{n}$$

を得る．これから，$b_n \leq 1 + 1 = 2$ がわかるので b_n は**上に有界**．よって**単調増加かつ有界**である b_n は収束する.

（積分を用いない有界性の証明の例）$k \geq 2$ では

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

である．なので，これを $k = 2$ から n まで足して（$k = 1$ はそのまま 1 として足す）

$$b_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

を得て，有界性が証明できる．

(3) この問題も次の問題も，問題の数列はそのままでは単調ではない．n が偶数，奇数で分けて考え，後で両者が同じ極限に行くことを示す．(もう少し「カッコイイ」やり方は後に書きます．)

n が偶数のとき，$n = 2m$ と書くと，

$$c_{2m} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{-1}{2l-1} + \frac{1}{2l} \right) = -\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{2l(2l-1)}$$

これは単調減少であり，また，以下に示すように下に有界である．従って，c_{2m} は $m \to \infty$ で収束する．(積分を用いた「下に有界」の証明は以下の通り)

$$\sum_{l=2}^{m} \frac{1}{2l(2l-1)} \le \int_1^m \frac{1}{2x(2x-1)} dx = \int_1^m \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x} \right) dx = \frac{1}{2} \log\left(\frac{2m-1}{2m} \right) + \frac{1}{2} \log 2 \le \frac{1}{2} \log 2.$$

次に，n が奇数の時であるが，$n = 2m+1$ と書くと，

$$c_{2m+1} - c_{2m} = -\frac{1}{2m+1}$$

であって，この差は $m \to \infty$ でゼロに行く．c_{2m} が収束するので，c_{2m+1} も同じ極限に収束する．

結果として，c_n は，n が偶数でも奇数でも同じ極限に収束する．なお，この極限の値は $-\log 2$ であるが，なぜ $-\log 2$ なのかは「テーラー展開」を学べばわかる．(もっと巧妙に $-\log 2$ を出す方法もあるが，ここでは触れない．) ともかく，ここで大事なことは**極限値そのものよりも，この数列が収束する**（理由を述べられる）ことだ．

（積分を用いない c_{2m} の有界性の証明の例）一番単純には，以下のようにして，(2) の結果を使うのが簡単でしょう...

$$-c_{2m} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{2l(2l-1)} \le \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l^2}$$

（もうちょっとカッコイイ別解）n が偶数と奇数の場合に分けて書くと

$$c_{2m} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{-1}{2l-1} + \frac{1}{2l} \right) = -\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{2l(2l-1)}$$

と

$$c_{2m+1} = -1 + \sum_{k=2}^{2m+1} \frac{(-1)^k}{k} = -1 + \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{1}{2l} - \frac{1}{2l+1} \right) = -1 + \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{2l(2l+1)}$$

となってる．なので，c_{2m} は単調減少，c_{2m+1} は単調増加だ．さらに，

$$c_{2m+1} - c_{2m} = -\frac{1}{2m+1} < 0$$

である．従って，(c_n) を大きさの順番に並べると，(以下の m は 4 以上くらいのつもり)

$$c_1 < c_3 < c_5 < c_7 < \cdots c_{2m+1} < \cdots < c_{2m} < \cdots c_6 < c_4 < c_2$$

が成り立っている．ということは，c_{2m} は下から c_1 で押さえられてるので，下に有界である．同様に，c_{2m+1} は上から c_2 で押さえられてるので，上に有界である．よって，こいつらの単調性と合わせて，c_{2m+1} と c_{2m} のそれぞれが収束することが言える．最後に，c_{2m+1} と c_{2m} の差はゼロに行くから，両者はおなじ極限に収束することも言える．

(4) この問題も (3) と同じように解ける．

まず，n が偶数のとき，$n = 2m$ と書くと，(3) と同様にして

$$d_{2m} = \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{-1}{\sqrt{2l-1}} + \frac{1}{\sqrt{2l}} \right) = -\sum_{l=1}^{m} \frac{\sqrt{2l} - \sqrt{2l-1}}{\sqrt{2l-1}\,\sqrt{2l}} = -\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2l-1}\,\sqrt{2l}\,(\sqrt{2l} + \sqrt{2l-1})}$$

これは単調減少である．また，

$$\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2l-1}\sqrt{2l}\,(\sqrt{2l}+\sqrt{2l-1})} \le \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{(\sqrt{2l-1})^3} \le 1 + \int_1^m \frac{1}{(\sqrt{2x-1})^3} dx = 1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \le 2$$

であるため，d_{2m} は下に有界．従って，d_{2m} は収束する．

また，

$$d_{2m+1} - d_{2m} = -\frac{1}{\sqrt{2m+1}} \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (m \to \infty)$$

なので，d_{2m+1} も d_{2m} と同じ極限に収束する．

結果として，d_n は収束する．

（もうちょっとカッコイイ別解）実は (3) とまったく同じようにしてやれます．n が偶数と奇数の場合に分けて書くと

$$d_{2m} = \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{-1}{\sqrt{2l-1}} + \frac{1}{\sqrt{2l}} \right) = -\sum_{l=1}^{m} \frac{\sqrt{2l}-\sqrt{2l-1}}{\sqrt{2l-1}\sqrt{2l}} = -\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2l-1}\sqrt{2l}\,(\sqrt{2l}+\sqrt{2l-1})}$$

および

$$d_{2m+1} = -1 + \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{1}{\sqrt{2l}} + \frac{-1}{\sqrt{2l+1}} \right) = -1 + \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2l+1}\sqrt{2l}\,(\sqrt{2l}+\sqrt{2l+1})}$$

となって，d_{2m} は単調減少，d_{2m+1} は単調増加とわかる．後は (3) と全く同様にして，できてしまう．

注意：

- 最初の数項を見て，

$$(\text{間違い !!}) \qquad \frac{1}{k^2} < \frac{1}{2^k} \qquad (\text{間違い !!})$$

  などとしてしまった人が一定数いました.（この不等式は，k の大きいところでは成り立ちません！）もう少し注意しましょう．
- 数列の収束をいうには，有界性だけでも単調性だけでも不足で，**両方が必要**です．当たり前に見えたのかもしれないけど，この両方はきちんと念を押しましょう．これは大事なことなので，試験でも,（両方を使うなら）両方を明記しないと減点の対象とします．
- この問題のような和の場合，**和の中身の各項がゼロに行っても，和の結果が有界とは限りません**（(1) のように）．逆に，**和の中身が正であっても，有界な場合もあります**（(2) のように；また，高校で習ったはずの「等比級数」も良い例です．勿論，有界のためには，和の中身がゼロに行くことは必要ですが）．これらの点は，最初は直感に反する部分があるとは思いますが，少し（例を色々）考えて見てください．時間があれば，後でこのような問題（級数）を取り扱いたいと思っています．
- (3), (4) については，(a) n が偶数だけの場合は完璧に解答しつつ n が奇数の場合を忘れたり，または (b) 両方の場合が収束することを示しながらも，両方の極限が同じ値になることをチェックしてなかったりした人がかなり，いました．この点も気を付けて下さい．
- なお,「有界性」をいうのが難しかった，という感想はかなりありました．その通りだと思います．今はできなくても，段々とできるようになるので，この辺りは（積分による）テクニックを覚えるつもりでやってください．今日，出題の問題のいくつかは，やはりこの方向の問題です．

記号の補足

- $a_n := 1/n$ などの $:=$ は,「左辺を右辺で定義する」の意味です．
- $\max\{A, B\}$ とは,「A と B の小さくない方」の意味です．

5 月 21 日：今日の前半は「函数の連続性」，最後に微分です．特に微分はほとんど高校の復習（定義が厳密な極限の定義を用いただけ）ですが，まあ，聞いて下さい．

第 5 回レポート問題：

問 12： 以下の導関数を，ϵ-δ 論法を用いて，厳密に計算せよ．f' はもちろん，f の一階導函数を表す．

$$\begin{aligned} &(1)\quad f(x) := x^n \qquad \text{に対して} \qquad f'(x), \qquad \text{ここで } n \text{ は正の整数} \\ &(2)\quad g(x) := \sin x \qquad \text{に対して} \qquad g'(x) \end{aligned}$$

なお，(2) については，高校の時に習った三角函数の公式や不等式（極限に関するもの以外）は使って良い．それでも難しい人は，ともかく「こんな感じ」ということを書いてみよう．

問 13： （高校の復習）以下の導関数を計算せよ．f' と f'' はもちろん，f の一階，二階の導関数を表す．上の問題とは異なり，厳密性などは拘らず，高校のノリで計算すれば十分．

$$\begin{aligned} &(1)\quad f(x) := \cos(x^3) \qquad \text{に対して} \qquad f'(x) \quad \text{と} \quad f''(x) \\ &(2)\quad g(x) := \left(e^{x^2}+1\right)^3 \qquad \text{に対して} \qquad g'(x) \end{aligned}$$

上で e^{x^2} とは，指数関数の肩に x^2 が乗っているものである．

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について： 要望に応じて，以下のどちらかで提出してもらうことにしました．

レポートには学生番号と氏名を明記のうえ，以下のいずれかで提出してください．**（基幹教育事務室のレポートボックスに出す方は，締め切りが早いことに要注意！）**

- 5 月 27 日（月）の 13:00 までに，基幹教育事務室のレポートボックス　3　番に
- 5 月 27 日（月）の 17:00 までに，原の部屋（W1 号館 C 棟 6 階，C-601）のポストに（これまで同様）

どちらも**折らないで**入れて下さい．整理の都合上，用紙は A4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ（ただし，クリップは使用不可）．

先週のレポートの略解

問 11： かなり頑張ってた人も多くいました．ただ,「コーシー列の定義の確認だと思ってやってください」と書いたのに,「これは収束するからコーシー列」などと解答した人が一定数，いました．数学的には間違いではないですが，これはコーシー列の練習なので，半分くらいの点を与えています．

コーシー列の判定をする場合，m, n はどちらかの方が大きいとして，例えば，$m > n$ として，やっても構いません．$m < n$ の場合は，$m > n$ の場合にて m, n を交換すれば同じことだからです（また $m = n$ なら $a_m - a_n = 0$ なので何も証明すべきことはないし）．なので，以下でも，$m > n$ としてやります．

(1) この問題は「2 つずつまとめる」ことをうまく使わないと，なかなかできません．最初から三角不等式を使ってうまくいかなかった人がある程度いました．

$m>n$ の時，すこし計算すると，

$$a_m-a_n=\sum_{k=n+1}^{m}\frac{(-1)^k}{k}=(-1)^{n+1}\Bigl[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}-\cdots\pm\frac{1}{m}\Bigr]$$

となることがわかる（最後の $\pm$ は，$m-n$ が偶数ならマイナス，奇数ならプラス）．

$m-n$ が偶数なら，隣り合った 2 項を，(第 2 項と第 3 項，第 4 項と第 5 項，のように）うまくまとめて正負を考えると，上のカッコ内が

$$0\le\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}-\cdots-\frac{1}{m}\le\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m}<\frac{1}{n+1}$$

であることがわかる．また，$m-n$ が奇数の場合も同様にして，カッコ内が

$$0\le\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}-\cdots-\frac{1}{m-1}+\frac{1}{m}\le\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m-1}+\frac{1}{m}\le\frac{1}{n+1}$$

であることがわかる．要するにどちらの場合でも，$m>n$ ならば

$$|a_m-a_n|\le\frac{1}{n+1}$$

が成り立つと言える．よって，

$$\text{任意の }\ \epsilon>0\ \text{ に対して，}N(\epsilon)=\frac{1}{\epsilon}\ \text{ と決めると，}\Bigl(m,n>N(\epsilon)\quad\Longrightarrow\quad|a_m-a_n|<\epsilon\Bigr)\ \text{が成り立つ}$$

が証明できた．(a_n) はこのようにコーシー列であり，従って，収束する．

(2) 結論は，$\alpha>1$ ならコーシー列，$\alpha\le1$ ならコーシー列ではない，です．ある程度，このくらいの見当をつけた上でやってみると楽ですが，そうでなくても,「積分で評価」を地道にやれば，見えて来ます．以下では地道にやってみます．

和の中身が正なので $m>n\ge1$ の時には $b_m>b_n$ であり，

$$0<b_m-b_n=\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k^\alpha}$$

が成立している．この右辺を積分で評価してみる．$y=1/x^\alpha$ のグラフをすこしずらしながら考えると

$$\int_{n+1}^{m+1}\frac{1}{x^\alpha}\,dx\le\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k^\alpha}\le\int_{n}^{m}\frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

が成り立つ．それぞれの積分を計算して

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}-(m+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k^\alpha}\le\frac{n^{1-\alpha}-m^{1-\alpha}}{\alpha-1}\qquad(\alpha\ne1)$$

および

$$\log(m+1)-\log(n+1)\le\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k^\alpha}\le\log m-\log n\qquad(\alpha=1)$$

を得る．

これを見ながら，場合分けして考える．

(case 1) $\alpha>1$ の時は，

$$\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k^\alpha}\le\frac{n^{1-\alpha}-m^{1-\alpha}}{\alpha-1}\le\frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

であって，右辺は $n\to\infty$ でゼロに行くから，コーシー列になりそうだ．実際，$N=N(\epsilon)$ を

$$\frac{N^{1-\alpha}}{\alpha-1}=\epsilon\qquad\text{つまり}\qquad N=\bigl\{\epsilon(\alpha-1)\bigr\}^{-1/(\alpha-1)}$$

ととると（直後の注意参照），$n > N$ では

$$n^{1-\alpha} < N^{1-\alpha} = \epsilon(\alpha-1)$$

となるので，

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^\alpha} < \epsilon$$

が成り立つ．つまり，上で決めた N にたいして，

$$m > n > N \qquad \Longrightarrow \qquad |b_m - b_n| < \epsilon$$

が成り立つといえた．よって，この時はコーシー列である．

（注意） 上ではギリギリの N を求めたが，もちろん，ここまでやる必要はない．重要なのは，ϵ と N の満たすべき関係が

$$\frac{N^{1-\alpha}}{\alpha-1} < \epsilon \qquad \text{つまり} \qquad N^{\alpha-1} > \frac{1}{\epsilon(\alpha-1)}$$

である，ということだ．$\epsilon > 0$ がいくら小さくても，ϵ を決めた時点で右辺は有限値に決まってる．そうしたら，N を大きく大きくとることで，上の不等式を満たさせることができる．つまり必要な $N(\epsilon)$ が存在すると言える．

(case 2) $\alpha = 1$ の時はコーシー列でない．これを特殊な m, n の取り方について示す[1]．$m = 2n$ とすると，

$$b_{2n} - b_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \log(2n+1) - \log(n+1) = \log\Bigl(\frac{2n+1}{n+1}\Bigr)$$

が成り立つことがわかる．しかし，この右辺は，n をいくら大きくしてもゼロに行かない（むしろ，$\log 2 > 0$ に収束する）．つまり，$N(\epsilon)$ をいくら大きくとっても，$|b_m - b_n|$ が小さくならないような $m, n > N(\epsilon)$ が見つかってしまった．なので，これはコーシー列ではない．

(case 3) $\alpha < 1$ の時もコーシー列でない．上より

$$b_{2n} - b_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{(m+1)^{1-\alpha} - (n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

が得られるが，これは $m \to \infty$ でいくらでも大きくなってしまう．つまり case 2 と同じく，$N(\epsilon)$ をいくら大きくとっても，$|b_m - b_n|$ が小さくならないような $m, n > N(\epsilon)$ が見つかってしまった．なので，これはコーシー列ではない．

(3) 結論は「コーシー列である」です．この問題は典型的な「**極限の値がわからなくても収束が言える**」例なので，頭の隅にとどめておいて下さい．

問題の不等式を繰り返し使うと

$$(*) \qquad |c_{n+2} - c_{n+1}| \leq r|c_{n+1} - c_n| \leq r^2|c_n - c_{n-1}| \leq \cdots \leq r^{n-1}|c_3 - c_2| \leq r^n|c_2 - c_1|$$

を得る．一方で，$m > n$ に対して，

$$c_m - c_n = \sum_{k=n}^{m-1} (c_{k+1} - c_k)$$

が成立するので，三角不等式と (*) を用いて

$$|c_m - c_n| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |c_{k+1} - c_k| \leq \sum_{k=n}^{m-1} r^{k-1}|c_2 - c_1| = r^{n-1} \times \frac{1-r^{m-n}}{1-r} \times |c_2 - c_1| < \frac{r^{n-1}}{1-r}\,|c_2 - c_1|$$

を得る．この右辺は，$n \to \infty$ でゼロに行くからコーシー列になりそうだ．実際，$N = N(\epsilon)$ を，

$$\frac{r^{N-1}}{1-r}\,|c_2 - c_1| = \epsilon \qquad \text{つまり} \qquad N - 1 = \log_r\Bigl\{\frac{\epsilon(1-r)}{|c_2 - c_1|}\Bigr\}$$

[1] 今は「コーシー列でない」ことを示すので，「上手くいかない」m, n の特殊例を示せば十分

と取れば（ここも直後の注を参照）($c_1 = c_2$ は最後に考える)，

$$m > n > N \qquad \Longrightarrow \qquad |c_m - c_n| < \epsilon$$

が成り立つといえる．よって，この時はコーシー列である．

なお，上で $c_2 = c_1$ の時には，$c_{n+1} = c_n$ となるので，全ての項が等しく，この場合は当たり前にコーシー列になっている．

（注意） 上ではギリギリの N を求めたが，もちろん，ここまでやる必要はない．重要なのは，ϵ と N の満たすべき関係が

$$\frac{r^{N-1}}{1-r}|c_2 - c_1| < \epsilon \qquad \text{つまり} \qquad r^{N-1} < \frac{\epsilon(1-r)}{|c_2 - c_1|}$$

である，ということだ．$\epsilon > 0$ がいくら小さくても，ϵ を決めた時点で右辺は正の有限値に決まってる．そうしたら，N を大きく大きくとることで，r^{N-1} と極端に小さくして，上の不等式を満たさせることができる．つまり必要な $N(\epsilon)$ が存在すると言える．

注意：

- やはり，コーシー列の定義がわかってない人が一定数，いました（まあ，難しいけどね）．コーシー列であることを言うには，「どんなに小さい $\epsilon > 0$ に対しても」うまく N が取れて，「任意の $m, n > N$ に対して」$|a_m - a_n| < \epsilon$ とできる，ことを示す必要があります．
  - $\epsilon > 0$ はどんなに小さいものでも扱う必要があります．こちらで勝手に $\epsilon = 1$ などと決めてはいけません．
  - m, n も同様です．N を決めたら，N より大きい**すべての** m, n を扱う必要があります．勝手に $m = n+1$ とか，$m = 2n$ とかに決めてはいけません．
- $N(\epsilon)$ は m, n に依存してはダメ，です．$N(\epsilon)$ が m, n に依存してしまってる人がいました．これでは「$m, n > N$」が一般に意味を持ちません．よく考えてみてください．
- コーシー列の定義はわかっていて，「これを示したい」が明確であるが，和の扱いが下手なために結論に到達しなかった人，がかなりいました．これは仕方ないです．解答例を見て，ある程度のテクニックを身につけるようにしてもらえば，将来，役にたつと思います．(原は数学として「テクニックを覚える」ことはあまり推奨したくないのですが，しかし，「和を積分で評価する」などのある程度の定石はあります．このような，あとあと物理で役立ちそうなことは，積極的に問題に取り入れるようにはしています．)
- 途中まで正しく評価しているのだが，最後のあたりでわからなくなったのか，苦し紛れに「このように $N(\epsilon)$ をとると...」と書いている人もいました．何回も言うように，レポートの成績は最終成績には基本的に関係ないから，無理をしないで，わからないところは正直に書いてほしい．その方が，僕も皆さんの弱点がわかって良いのです．
- なお，高校までと同じく，レポートや試験では「理由，説明を書く」ことも求められています（答えのみで良い，の場合を除いて）．今回の問 11 でも，途中の不等式や評価式抜きで，「$N(\epsilon) = \cdots$ とすると」と書いてる人がいましたが，途中の計算はどこかにはちゃんと書いて下さい．

5 月 28 日：微分の 2 回目です．テイラー展開の基礎となる,「平均値の定理」を中心にやります．

進度の関係により，今回のレポート出題はありません．

——先週のレポートの略解——

問 12： よく頑張った人もいましたが，思ったよりも苦戦してる人もいました．

(1) 答えは nx^{n-1} であることは高校で習ってるから，これを如何に厳密に示すかだ．

（出発点とゴール）このような問題では「正しく計算したら，絶対にできる糸口が見つかるはず」という**強い信念**の下に計算することが大切である．そのためには，出発点とゴールをはっきりさせることから始める．今回は微分の定義（出発点）から

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-(x)^n}{h}=nx^{n-1} \qquad \text{または} \qquad \lim_{h\to 0}\left[\frac{(x+h)^n-(x)^n}{h}-nx^{n-1}\right]=0 \qquad (*)$$

を示すことが目標だ．

(少し予備計算)　(*) の後ろの式の左辺の中身を，二項定理を使って計算すると

$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^n-(x)^n}{h}-nx^{n-1}&=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k-nx^{n-1}=\frac{1}{h}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k=\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^{k-1}\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k+1}x^{n-k-1}h^k=h\times\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k+2}x^{n-k-2}h^k \qquad (**)\end{aligned}$$

となる．$|h|<\delta\le 1$ に対してはこれより

$$\left|\frac{(x+h)^n-(x)^n}{h}-nx^{n-1}\right|=|h|\times\left|\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k+2}|x|^{n-k-2}h^k\right|<|h|\times\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k+2}|x|^{n-k-2} \qquad (***)$$

がなりたつことがわかる．この右辺は，最初の $|h|$ 以外は h に依存しないから，これ全体を ϵ より小さくなるように $|h|$ を取るのは（以下のように）簡単だ．というわけで，下の解答例になる．

(解答例)（上の計算を念頭において）任意の $\epsilon>0$ に対して

$$\delta=\min\left\{1,\quad \frac{\epsilon}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k+2}|x|^{n-k-2}}\right\}$$

と決めてやる．

となる．$|h|<\delta\le 1$ に対しては上の (***) より

$$\left|\frac{(x+h)^n-(x)^n}{h}-nx^{n-1}\right|=|h|\times\left|\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k+2}|x|^{n-k-2}|h|^k\right|<|h|\times\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k+2}|x|^{n-k-2}<\epsilon$$

がなりたつことがわかる．これは

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{(x+h)^n-(x)^n}{h}-nx^{n-1}\right]=0$$

を ϵ-δ 論法で示したことに他ならない．よって，微分の値は nx^{n-1} であることが証明された．

(2) こっちはちょっと大変ですが，やはり，強い信念を持って変形していけばなんとかなります．

（出発点とゴール）もちろん，結果は $\cos x$ のはずだから，示したいのは

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}=\cos x \qquad \text{または} \qquad \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}-\cos x\right]=0$$

ということである．

（少し予備計算）加法定理を用いると，我々の見たい量（ゼロになるといいたい量）は

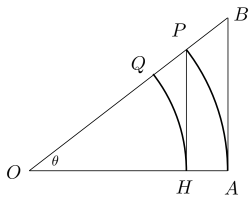
$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}-\cos x=\frac{\sin x\,\cos h+\cos x\,\sin h-\sin x}{h}-\cos x=\cos x\left[\frac{\sin h}{h}-1\right]+\sin x\,\frac{\cos h-1}{h}$$

となる．$\sin x$ とか $\cos x$ とかがあって，一見，ややこしそうに見えるが，要するにこいつらは絶対値が 1 以下だから，

$$\left|\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}-\cos x\right|\le\left|\frac{\sin h}{h}-1\right|+\left|\frac{\cos h-1}{h}\right| \qquad (*)$$

とできる．

これは偶函数なので，以下，(*****) の式を出すまでは，$0<h<\delta\le 1$ のみを考える．($-1<h<0$ の場合は，$h'=-h$ と変換すると，以下の評価になる)．



さて，上のように三角形と円弧の図を書くと，$0<h<1$ では

$$0<\sin h<h<\tan h$$

がなりたつことがわかる[2]．最初の不等式から $0<(\sin h)/h\le 1$ を得て，$0<h<1$ では絶対値が外せて

$$\left|\frac{\sin h}{h}-1\right|+\left|\frac{\cos h-1}{h}\right|=1-\frac{\sin h}{h}+\frac{1-\cos h}{h} \qquad (**)$$

であることがわかる．さらに，$h<\tan h$ から $\cos h<(\sin h)/h$ を得て，

$$1-\frac{\sin h}{h}<1-\cos h$$

が出るので，(**) から

$$\left|\frac{\sin h}{h}-1\right|+\left|\frac{\cos h-1}{h}\right|<1-\cos h+\frac{1-\cos h}{h}=(1+h)\,\frac{1-\cos h}{h} \qquad (***)$$

も得られる．さらに半角の公式と $\sin h<h$ を用いると

$$\frac{1-\cos h}{h}=\frac{2(\sin h/2)^2}{h}=\frac{h}{2}\times\left[\frac{\sin(h/2)}{h/2}\right]^2\le\frac{h}{2}$$

となるので，これを (***) に用いて

$$\left|\frac{\sin h}{h}-1\right|+\left|\frac{\cos h-1}{h}\right|<(1+h)\,\frac{1-\cos h}{h}\le(1+h)\,\frac{h}{2}<h \qquad (****)$$

が得られる（最後のところでは，$h<1$ も用いて $(1+h)/2<1$ とした）．

結局，(*) と (****) から，$|h|<1$ では

$$\left|\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}-\cos x\right|<h \qquad (*****)$$

[2] 図において，OA と OP の長さは 1 で，PH, BA は OA に垂直である．すると $\sin h$ は線分 PH の長さ，h は弧 AP の長さになるので，$\sin h=$ (線分 PH の長さ) $<$ (線分 PA の長さ) $<$ (弧 PA の長さ) $=h$ を得る．後半部分は線分 BA の長さと弧 PA の長さの比べ合いだが，これはそれほど明らかではないかもしれない．その場合には，線分 OH の長さが $\cos h$ であることに注目して，$\frac{1}{2}(\cos h)^2\,h=$ (扇型 OHQ の面積) $<$ (三角形 OHP の面積) $=\frac{1}{2}\cos h\,\sin h$ をもちいると，後半部分が得られる

であることが証明されてしまった！(結果は簡単だった)

(解答例)　上の計算を踏まえて任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\delta = \min\{1, \epsilon\}$$

と決めると，$0 < |h| < \delta$ では，上の (*****) から

$$\left| \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} - \cos x \right| < |h| < \epsilon$$

がなりたつことがわかる．これは

$$\lim_{h\to 0} \left[\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} - \cos x \right] = 0$$

を ϵ-δ 論法で示したことに他ならない．よって，微分の値は $\cos x$ であることが証明された．

注意：

- 「何の極限を考えるのか」の混乱が散見された．問題の通りなら，x での微分なので，((1) なら)
$$\lim_{y\to x} \frac{y^n - x^n}{y - x} = n\,x^{n-1} \qquad \text{または} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n\,x^{n-1}$$
を示すべきだ．また，x が変数みたいで紛らわしいなら x を a などとして
$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n\,a^{n-1}$$
などを狙っても，もちろん良い．**ただし後者の場合は,「x を動かして，固定した a に近づける」ので，右辺は na^{n-1} だ．** この右辺を nx^{n-1} にした人が何人か見られたが，左辺は a の函数，右辺は x の函数なので，等式が成立するはずがない．自分が何を示したいのか，ちゃんと理解することが重要だ．

- 高校の時に微分の練習として（$x > 0$ で）
$$x > \sin x > x - \frac{x^3}{6}, \qquad 1 > \cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$$
などを証明した人もいるだろう．この不等式の証明には「微分」を使うことが多いので，この不等式を用いて「導函数」の値を求めるのは，またもや論理に飛躍があるので，あまりやっては欲しくない.（でも，欲しい結果の背後にはこのような不等式やテイラー展開があるということを意識することは重要だ.）

- 上の三角函数の不等式の証明が，なんとなく納得できない人もいると思う．面積を使ったわけだが,「円の面積は極限を用いて定義しているのだから，論理に飛躍はないのか？」などの疑問で，大変に尤もである．またそもそも，$(\sin h)/h$ の極限が 1 であることは，図から「ほぼ明らか」なので，どこに厳密な議論をすべきかがそもそもあやふやな感じもする．このような疑問を避けるためには，これから学ぶ **「テイラー展開」を用いて，**$\sin, \cos$ **などを級数の形で定義する**ことを行えば良い．実際，テイラー展開を用いるのが,（多項式以上に複雑な）函数を厳密に定義する一つの有力な方法である（この講義では時間の関係で，あまり級数の収束性には触れられない可能性が高いが）．

問 13： 単なる計算問題で，大抵の人はできてましたが，10 人（？）くらい間違った人がいました．そういう人は，この機会に高校の復習をやってください！

(1) ともかく微分します．

$$f'(x) = -\sin(x^3)\ \times (x^3)' = -3x^2\ \sin(x^3)$$

これをもう一回微分して（「積の微分」です．前の x^2 と後ろの $\sin(x^3)$ と，それぞれの微分から 2 項出ることに注意！）

$$f''(x) = -6x\ \sin(x^3) - 3x^2 \times \cos(x^3) \times 3x^2 = -6x\ \sin(x^3) - 9x^4\ \cos(x^3)$$

(2) ともかく微分します．

$$g'(x) = 3(e^{x^2}+1)^2 \times \frac{d}{dx}(e^{x^2}+1) = 3(e^{x^2}+1)^2 \times e^{x^2} \times (x^2)' = 3(e^{x^2}+1)^2 \times e^{x^2} \times 2x = 6x\,e^{x^2}\ (e^{x^2}+1)^2$$

6 月 4 日：今日はテイラーの定理とテイラー展開です．高校ではやってないはずなので，しっかり勉強して下さい．中間試験についての**現時点での暫定的な**情報は以下の通りです.（より詳しくは追い追い，アナウンス.）

- 中間試験は，今やってる「微分」が完了した後，一週間程度の期間を置いてから行います.
- 試験日は 6/25 の可能性が高いですが，**まだまだ変更の可能性もある**ので，今後のアナウンスに注意！
- 試験場所は（恐らく，いまの教室では小さすぎるので）別の大きな教室にする予定です.
- 試験範囲は，これまでにやった「極限」「微分」です.「微分」には当然,「テイラー展開」なども含みます.
- 何度も強調したように,「極限の厳密な理論」ができなくても十分に単位が出せる問題にします.
- 具体的には,「高校のノリで微分を計算する」「高校のノリで極限を計算する」「与えられた関数をテイラー展開する」（これ以外にも付け加えるかも）などの計算問題が半分以上になります．なので，高校での範囲も含めて,「計算がしっかりできる」ようになってください.（計算問題が壊滅的では，救いようがない.）
- 「極限の厳密な理論」に関する問題もちょっと（1/3 くらいとか）出します.
- なお，最終成績をどのように出すか，などは最初に宣言した通りです.

第 6 回レポート問題：

一回は自分で手を動かしてやっておくべきものです．なお，以下の問題で「最初のゼロでない 3 項」とは，例えば展開の結果が（$x = a$ の周りでの展開の場合）

$$f(x) = c_1(x-a) + c_5(x-a)^5 + c_9(x-a)^9 + c_{13}(x-a)^{13} + \cdots$$

となっていた場合，最初の 3 項，つまり

$$c_1(x-a) + c_5(x-a)^5 + c_9(x-a)^9$$

の部分を指します（テイラー展開した結果の係数がゼロであった項は数えないで，最初から 3 項の意味）.

問 14： （テイラー展開の計算問題）以下の関数を，$x = 0$ の周りでテイラー展開した場合の，最初のゼロでない 3 項を求めよ.（公式通りに地道に計算すること.）

$$f(x) = e^x, \qquad g(x) = \sin(x), \qquad h(x) = \cos(x), \qquad p(x) = \sqrt{1+x}$$

問 15： （テイラー展開の応用）

(1) $f(x) = \sin(x)$ を，$x = a$ の周りでテイラー展開した場合の，最初のゼロでない 3 項を求めよ．ここで a は定数である.

(2) $\sin(31^\circ)$ の値を小数点以下 2 桁まで正確に求めよ（31° とは度数法 —— 円周一周が 360° —— での角度）. この際，$\sin(x)$ の $x = \pi/6$ の周りでのテイラー展開を用いて考えるとよく，数値計算には電卓を使用してよい.

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります.

レポート提出について：

レポートには**学生番号と氏名を明記**のうえ，以下のいずれかで提出してください．**（基幹教育事務室のレポートボックスに出す方は，締め切りが早いことに要注意！）**

- 6 月 10 日（月）の 13:00 までに，基幹教育事務室のレポートボックス　3　番に
- 6 月 10 日（月）の 17:00 までに，原の部屋（W1 号館 C 棟 6 階，C-601）のポストに（これまで同様）

どちらも**折らないで**入れて下さい．整理の都合上，用紙は A4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ（ただし，クリップは使用不可）.

6 月 11 日：今日はテイラーの定理とテイラー展開の 2 回めです．
中間試験についての**現時点での暫定的な**情報は以下の通りです．

- 中間試験の日時は，**6/25（火）の 3 限**（通常の授業時間）に確定しました．
- 試験場所は **2303** です．いつもと違うので要注意！(欠席してる人にも教えて！)
- 試験範囲は，これまでにやった「極限」「微分」です.「微分」には当然,「テイラー展開」なども含みます．
- 何度も強調したように,「極限の厳密な理論」ができなくても十分に単位が出せる問題にします．
- 具体的には,「高校のノリで微分を計算する」「高校のノリで極限を計算する」「与えられた関数をテイラー展開する」（これ以外にも出すかも）などの計算問題が半分以上になります．なので，高校での範囲も含めて,「計算がしっかりできる」ようにはなってください．
- 函数の極値問題（函数の極大極小を求める問題）は，高校で散々やったでしょうから，中間試験では出題しません．
- 教科書の 1 章の「逆三角函数」「原始函数の計算」などは範囲外です．
- 「極限の厳密な理論」に関する問題もある程度（1/3 かもうちょっと）出します．
- なお，最終成績をどのように出すか，などは最初に宣言した通りです．
- より詳しくは追い追い，アナウンスします．

第 7 回レポート問題：

問 16： （テイラー展開の計算問題その 2）以下の関数を，$x = 0$ の周りでテイラー展開した場合の，最初のゼロでない 3 項を求めよ．今回は「ズルい方法」を用いても良い．

$$f(x) = \sin(x^2), \qquad g(x) = \tan(x^3), \qquad h(x) = \sqrt{1 + x^3},$$

問 17*： （テイラー展開の応用）次の極限を求めよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x^3} + \sqrt{1 - x^3} - 2}{\tan(x^2) - \sin(x^2)}$$

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

レポートには**学生番号と氏名を明記**のうえ，以下のいずれかで提出してください．**（基幹教育事務室のレポートボックスに出す方は，締め切りが早いことに要注意！）**

- 6 月 17 日（月）の 13:00 までに，基幹教育事務室のレポートボックス　3　番に
- 6 月 17 日（月）の 17:00 までに，原の部屋（W1 号館 C 棟 6 階，C-601）のポストに（これまで同様）

どちらも**折らないで**入れて下さい．整理の都合上，用紙は A4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ（ただし，クリップは使用不可）．

先週のレポートの略解

原が意図した形の答えでないものもありましたが，一理あるので，それらはもちろん，不利にならないように配慮しています．以下のコメントなども参照してください．**なお，$1/n!$ を忘れた人がある程度いました．よくよく注意して下さい！**

問 14： 題意について：「最初の 3 項を求めよ」とは，(それが $a_1+a_2+a_3$ だった時)，単に「和の形で」$a_1+a_2+a_3$ と書いてもらうことを想定していました． 大体の人はこのように書いてくれてましたが，ちょっと紛らわしかったかもしれません．

(1) 微分すると

$$f(x)=e^x,\ f'(x)=e^x,\ f^{(2)}(x)=e^x,\ldots$$

であるから，いつまで微分しても e^x のままである．よって，テイラーの定理の主要項（ゼロでない最初の 3 つ）は

$$1+x+\frac{x^2}{2}$$

である．

(2) 微分すると

$$g'(x)=\cos x,\quad g''(x)=-\sin x,\quad g^{(3)}(x)=-\cos x,\quad g^{(4)}(x)=\sin x=g(x)\qquad \text{（以下，繰り返し）}$$

となる．注意すべきは，$x=0$ にすると，偶数階の微係数がみんなゼロになること．なので，答えは

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

である．

(3) 同様に計算する．今回は奇数階の微係数がゼロになるので，答えは

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

である．

(4) 微分すると

$$p'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2},\quad p''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2},\quad p'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}$$

などとなっている（2 階微分までで十分だったが）．答えは

$$1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2!}\Bigl(-\frac{1}{4}\Bigr)x^2=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$$

である．

問 15： 題意について：(2) で「小数点以下 2 桁」と言った場合，四捨五入するのか，それとも 3 桁目以上を切り捨てるのか，確かに曖昧でした．原の周囲では「四捨五入」派が大多数であることは確実ですが，「3 桁目以上を切り捨て」派もいるのかもしれません．もちろん，採点ではどちらも満点にしています．

(1) テイラーの公式から

$$\sin(a)+\frac{1}{1}\cos(a)\,(x-a)-\frac{1}{2!}\sin(a)\,(x-a)^2=(\sin a)+(\cos a)\times(x-a)-\frac{(\sin a)}{2}\,(x-a)^2$$

が答え．

（補足）$a=0$ などの特殊な場合はゼロの項がでてくるのでもっとややこしくなりますが，そこまでは要求するつもりはなかったです．ちゃんとやった人は，大変に良かったと思います．そのような特殊な場合も考えた答えは以下の通りです．

$a=n\pi$（n は整数）とかける場合：

$$(\cos a)\times(x-a)-\frac{(\cos a)}{3!}\,(x-a)^3+\frac{(\sin a)}{5!}\,(x-a)^5=(\cos a)\times\Bigl[(x-a)-\frac{1}{3!}\,(x-a)^3+\frac{1}{5!}\,(x-a)^5\Bigr]$$

$a=(n+\frac{1}{2})\pi$（n は整数）とかける場合：

$$(\sin a)-\frac{(\sin a)}{2!}\,(x-a)^2+\frac{(\sin a)}{4!}\,(x-a)^4=(\sin a)\times\Bigl[1-\frac{1}{2!}\,(x-a)^2+\frac{1}{4!}\,(x-a)^4\Bigr]$$

上の 2 つ以外の場合：

$$(\sin a) + (\cos a) \times (x-a) - \frac{(\sin a)}{2}(x-a)^2$$

(2) すべて**弧度法（ラジアン）に直して**計算する．

$$a = 30^\circ = \frac{\pi}{6}, \qquad x = 31^\circ = \frac{\pi}{6} \times \frac{31}{30} = \frac{31}{180}\pi, \qquad x - a = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$$

として，(1) の式を用いると（本当は残項を考えるべきだが，この問題ではそこは無視して良いことにする）

$$\sin(31^\circ) \approx \sin\Bigl(\frac{\pi}{6}\Bigr) + \cos\Bigl(\frac{\pi}{6}\Bigr) \times \frac{\pi}{180} - \frac{1}{2}\sin\Bigl(\frac{\pi}{6}\Bigr) \times \Bigl(\frac{\pi}{180}\Bigr)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{180} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \Bigl(\frac{\pi}{180}\Bigr)^2 \approx 0.51503884034700513827$$

となるので，答えは $0.515 \approx 0.52$.（正確な値は $\sin(31^\circ) = 0.51503807491005421008\ldots$）

（補足）残項まで考えて，きちんと誤差評価をすると，以下のようになります．残項まで入れたテイラーの公式は

$$\sin x = (\sin a) + (\cos a) \times (x-a) - \frac{(\sin a)}{2}(x-a)^2 - \frac{(\cos\xi)}{6}(x-a)^3 \qquad (\xi \text{ は } a \text{ と } x \text{ の間})$$

となっている．この残項の大きさはどのくらいか，が問題であるが，一番簡単には $0 < \xi < \pi/2$ より $0 < \cos\xi < 1$ を用いて，$x > a$ では

$$0 < \frac{(\cos\xi)}{6}(x-a)^3 \le \frac{(x-a)^3}{6} = \frac{1}{6}\Bigl(\frac{\pi}{180}\Bigr)^3 \approx 8.86 \times 10^{-7}$$

などとすれば良い．これによると，この残項を考えに入れて厳密に

$$\sin(31^\circ) \le \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{180} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \Bigl(\frac{\pi}{180}\Bigr)^2 \approx 0.51503884034700513827$$

および

$$\sin(31^\circ) \ge \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{180} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \Bigl(\frac{\pi}{180}\Bigr)^2 - \frac{1}{6}\Bigl(\frac{\pi}{180}\Bigr)^3 \approx 0.51503795425084943697$$

が得られる．これを見ると，小数点以下 2 桁どころが 5 桁までは確実にとれていることがわかる．

（注意）

- しょうもない計算間違いをした人が，何人かいました．また，途中計算では正しくできているのに，最終結果を書くところで $\pm$ を間違うなどのミスも目立ちました — 特に，[14](4)．注意しましょう．
- 計算間違いでも目立つのが，分母の $k!$ を忘れるケースです．注意しましょう．
- 問 15(2) では，弧度法に直さなかった人が 5 人近くいました．$\sin 31^\circ$ が 0.5 から非常に離れてたらおかしいと思わないかなあ...
- また問 15(2) では，$x = 0$ の周りの展開に，直接 $x = 31\pi/180$ を代入した人もいました．これでも間違いではないですが，せっかく (1) で $x = a$ の周りの展開をやったんですから...（そもそも，$|x-a|$ が大きいと，誤差があまり小さくなりません．）

補足説明：テイラー展開を無限次までやれるのか？について．問 14 の各函数について，テイラー展開を無限次までやれるのか否かは以下の通りである．

(1) 授業で説明したとおり，$e^x, \sin x, \cos x$ の残項は，すべての x に対してゼロに行く．例えば，e^x の場合の残項は $\dfrac{e^\xi}{n!}x^n$ だが，固定された x に対しては，この項の絶対値は $\dfrac{e^{|x|}}{n!}|x|^n$ よりも小さく，これは $n \to \infty$ でゼロに行く．結果として，授業でも説明したように

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

という，$e^x, \sin x, \cos x$ を無限級数の形で（多項式の極限として）表す式が得られる．

(2) $p(x) = \sqrt{1+x}$ の場合はもうちょっと複雑だ．まず，$p(x)$ を微分した結果は

$$p^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\,\frac{(2n-3)!!}{2^n}\,\frac{1}{(1+x)^{n-1/2}}$$

となるので，テイラーの公式の結果は

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\,x^k + (-1)^{n-1}\,\frac{(2n-3)!!}{(2n)!}\,\sqrt{1+\xi}\,\Bigl(\frac{x}{1+\xi}\Bigr)^n$$

となる．ここで ξ は x と n で決まる，0 と x の間の数である．また，$(2n)!! = (2n)(2n-2)(2n-4)\cdots(6)(4)(2)$ および $(2n-3)!! = (2n-3)(2n-5)(2n-7)\cdots(5)(3)(1)$.

この形の残項を見ると，これがいつゼロに行くのかはあまり明らかではない．しかし，主要項の各項の係数部分について（色々と試行錯誤の末）

$$(*)\qquad \frac{(2n-3)!!}{(2n)!} \approx c\,k^{-3/2} \qquad c \approx 0.2820$$

であることを見つけておこう．これを用いれば，少なくとも $0 \le x \le 1$ であれば，残項がゼロに行くことはわかる．しかし，$x > 1$ の場合，ξ がゼロに近ければ $\frac{x}{1+\xi} > 1$ となってヤバイかもしれない．また $x < 0$ の場合，特に，$x < -1/2$ の場合は，ξ が -1 に近いなら，またもや $|\frac{x}{1+\xi}| > 1$ となりかねない．これらはすべて，ξ の位置がはっきりしない（0 と x の間としかわからない）ことが原因である．

ともかく，以上の議論から，$-1/2 < x \le 1$ くらいなら残項がゼロに行って，

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\,x^k$$

と書けることがわかった.（以下は，今の段階ではかなり「趣味」の世界である．もうちょっとシステマティックな話は今学期の最後に行いたい.）

これ以外の x でもうまく行くのか，については，この形のテイラーの公式ではかなり難しい．しかし（今日説明予定の）「積分形の残項を出すテイラーの公式」を用いると，もう少し進める．

まずその前に,「主要項の各項は $|x| > 1$ では発散する」に注意しておこう．これは上の（$*$）を用いれば容易に理解できる．

なので，我々としては「$-1 \le x \le -1/2$ くらいの時に，残項がゼロに行くのか？」を考えれば良いこととなった．

「積分形の残項を出すテイラーの公式」によれば，

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\,x^k + (-1)^{n-1}\,\frac{(2n-3)!!}{2^n\,(n-1)!}\int_0^x \frac{(x-y)^n}{(1+y)^{n-1/2}}\,dy$$

が成立する．$x < 0$ なので，式が見やすくなるように $z = -x > 0$ として残項を書き直すと（$u = -y$ の変数変換も行う）残項の絶対値は

$$\frac{(2n-3)!!}{2^n\,(n-1)!}\int_0^z \frac{(z-u)^n}{(1-u)^{n-1/2}}\,du$$

となっている．$z \le 1$ を考えてるので，非積分関数の分子に $(z-u)^n \le (1-u)^n$ を用いて非積分関数を上からおさえると

$$\frac{(2n-3)!!}{2^n\,(n-1)!}\int_0^z \frac{(z-u)^n}{(1-u)^{n-1/2}}\,du \le \frac{(2n-3)!!}{2^n\,(n-1)!}\int_0^z \sqrt{1-u}\,du = \frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}\,(n-1)!} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} = O(1/\sqrt{n})$$

となり，これは $n \to \infty$ でゼロに行く．つまり，この $-1 \le x \le -1/2$ の場合も残項はゼロに行くことがわかった．

まとめると，$p(x) = \sqrt{1+x}$ については，$|x| > 1$ なら残項は発散し，$|x| \le 1$ なら残項はゼロに行く．結果として，

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\,x^k \qquad (|x| \le 1)$$

が得られた．

（みなさんがおそらく，将来習うこと.）$|x| = 1$ が境目になった直接の理由は，$\sqrt{1+x}$ の中身が $x < -1$ で負になり，平方根が定義できなくなるためである．もう少し深い理由は「複素関数論」というのを習えばわかる．

6 月 18 日：今日は積分に入ります．
中間試験についての情報は以下の通りです．

- すでに述べた通り，試験日時は，**6/25（火）の 3 限**（通常の授業時間）に確定しました．
- 試験場所は **2303** です．いつもと違うので要注意！(欠席してる人にも教えて！)
- 試験範囲は，これまでにやった「極限」「微分」です.「微分」には当然,「テイラー展開」なども含みます．
- 何度も強調したように,「極限の厳密な理論」ができなくても十分に単位が出せる問題にします．
- 具体的には,「高校のノリで微分を計算する」「高校のノリで極限を計算する」「与えられた関数をテイラー展開する」**など**の計算問題が半分以上になります．なので，高校での範囲も含めて,「計算がしっかりできる」ようにはなってください．(計算問題が壊滅的では，どうしようもありません．)
- （上への補足）ただし,「見かけは極限の問題だけど，テイラー展開をしないと解き難い（レポートの 17 番みたいに)」なども出る可能性があります．習ったことを十分に習得しておれば解ける問題ばかりであるのは確かですが．
- （補足 2）授業中に言ったように,「函数の極値問題」は中間試験では出題しません（高校で散々やってるはずなので）．
- 「極限の厳密な理論」に関する問題もある程度（1/3 かもうちょっと）出します．
- なお，最終成績をどのように出すか，などは最初に宣言した通りです．
- まず無いとは思いますが，緊急の予定変更の場合，web page を使う可能性がありますので，念のため注意しておいて下さい．

——————先週のレポートの略解——————

問 16： できるだけ，手を抜いて（つまり，効率の良いやり方で）やりましょう．最後に $O(x^{14})$ などを書いてありますが，ここまでは要求していません．ただし，**将来の誤差評価のためには，この項も書くように習慣づけた方が良い**です．以下のいずれも，$X = x^3$ などの置き換えをしないと，ほぼ確実に死にます．2,3 人，そのまま微分しまくった人がいましたが,（その勇気は讃えるにしても）あまり良い方法ではないですよ．

$f(x)$ について．

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + O(t^7)$$

であるところに $t = x^2$ を代入して

$$\sin(t) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + O(x^{14})$$

が答え．

$g(x)$ について．

ともかく，$\tan(t)$ の展開を求めた上で，$t = x^3$ とおきましょう．ただ，$\tan(t)$ の展開もそこそこ面倒です．微分しない方法をまず，示します．

$$\tan(t) = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{t - \dfrac{t^3}{3!} + \dfrac{t^5}{5!} + O(t^7)}{1 - \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^4}{4!} + O(t^6)}$$

である．分母を扱うために $X = \frac{t^2}{2!} - \frac{t^4}{4!} + O(t^6)$ として考えると，分母は

$$\frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + O(X^3) = 1 + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^4}{4!} + \frac{t^4}{4} + O(t^6) = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{5}{24}t^4 + O(t^6)$$

とわかる（ここの所，何次まで残すかをちゃんと考えて，注意深く残すこと）．従って

$$\tan(t) = \Big(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + O(t^7)\Big) \times \Big(1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{5}{24}t^4 + O(t^6)\Big) = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + O(t^7)$$

が得られる．従って，

$$\tan(x^3) = x^3 + \frac{1}{3}x^9 + \frac{2}{15}x^{15} + O(x^{21})$$

が答え．

（上の variation）おそらく上のやり方が一番簡単だと思いますが，最初から級数の形に置いてしまって，係数を決める方法もあります．まず，$\tan t$ は t の**奇函数**であることに注意すると，展開した場合には t **の奇数次**しかでてこないはず．なので，

$$\tan(t) = at + bt^3 + ct^5 + O(t^7)$$

と仮定して（a, b, c はこれから決める定数）みる（もしこれで「最初のゼロでない 3 項」に足りないなら，dt^7 なども後で加える）．結果

$$at + bt^3 + ct^5 + O(t^7) = \tan(t) = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{t - \dfrac{t^3}{3!} + \dfrac{t^5}{5!} + O(t^7)}{1 - \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^4}{4!} + O(t^6)}$$

となる．この両辺が等しいように，a, b, c を決めたい．そのためには分母を払ってしまうのが簡単だろう．分母を払うと

$$\bigl\{at + bt^3 + ct^5 + O(t^7)\bigr\} \times \Bigl\{1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + O(t^6)\Bigr\} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + O(t^7)$$

ということになる．左辺を展開すれば

$$at + \Bigl(b - \frac{1}{2!}a\Bigr)t^3 + \Bigl(c - \frac{1}{2!}b + \frac{1}{4!}a\Bigr)t^5 + O(t^7) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + O(t^7)$$

これが成り立つためには,「5 次より高く近似」する多項式の一意性により，両辺の係数が等しくなければならない．つまり，

$$a = 1, \qquad b - \frac{1}{2!}a = -\frac{1}{3!}, \qquad c - \frac{1}{2!}b + \frac{1}{4!}a = \frac{1}{5!}$$

ということである．これを a, b, c の順に解けば，

$$a = 1, \qquad b = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{3}, \qquad c = \frac{1}{5!} + \frac{1}{2!}\frac{1}{3} - \frac{1}{4!} = \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{20 - 5 + 1}{5!} = \frac{16}{5!} = \frac{2}{15}$$

となって，$\tan(t) = at + bt^3 + ct^5 + O(t^7)$ に代入すると答えを得る．

（ガンガン微分する方法）もちろん，$q(t) = \tan t$ を何回も微分してテイラーの公式を用いても良いが，かなり計算が大変だ．コンピューターに聞いた結果は以下の通り.（最近は高校でやらないかもしれないけど，$\sec(t) = 1/\cos(t)$）

$$q'(t) = \sec t, \qquad q''(t) = 2\bigl(\sec t\bigr)^2\ \tan t, \qquad q^{(3)}(t) = 2\bigl(\sec t\bigr)^4 + 4\bigl(\sec t\bigr)^2\bigl(\tan t\bigr)^2$$

$$q^{(4)}(t) = 16\bigl(\sec t\bigr)^4 \tan t + 8\bigl(\sec t\bigr)^2\bigl(\tan t\bigr)^3, \qquad q^{(5)}(t) = 16\bigl(\sec t\bigr)^6 + 88\bigl(\sec t\bigr)^4\bigl(\tan t\bigr)^2 + 16\bigl(\sec t\bigr)^2\bigl(\tan t\bigr)^4$$

$t = 0$ にすると当然のことながら偶数階の微分はゼロで

$$q'(0) = 1, \qquad q''(0) = 0, \qquad q^{(3)}(0) = 2, \qquad q^{(4)}(0) = 0, \qquad q^{(5)}(0) = 16$$

となる．あとはテイラーの公式に入れて，分母の $k!$ などを忘れずに計算すると，答えにたどり着く．

「テイラー展開」の結果は常に多項式（と残項の $O((x-a)^m)$）です．この問題なら，分母分子に $\sin, \cos$ のテイラー展開を入れただけではダメで，分数をさらに展開して，右辺を x の多項式にしないといけません．一定数の人がここを間違っていたので，注意してください．

$h(x)$ について．

前回，

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3)$$

を得たので，$t = x^3$ として

$$\sqrt{1+x^3} = 1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 + O(x^9)$$

を得る．

問 17： ともかく，分母子ともにテイラー展開しよう．どのくらいの次数までやるべきかは，やってみないとわからないが，まあ，x^6 や x^9 くらいまで見てみて，足りなかったらまた考える．なお，以下の計算では $\sqrt{1-x^3}$ などが必要になるが，これらは $t=-x^3$ と置いてみれば，$\sqrt{1-x^3}=\sqrt{1+t}$ となって，問 16 での計算がそのまま使える．

分母は

$$\tan(t)-\sin(t)=t+\frac{1}{3}t^3+\frac{2}{15}t^5+O(t^7)-\Big\{t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+O(t^7)\Big\}=\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{8}t^5+O(t^7)$$

より

$$\tan(x^2)-\sin(x^2)=\frac{1}{2}x^6+O(x^{10}).$$

(分母，分子とも，ゼロでない最初の項まで見れば十分である — 本当に十分かは以下のようにやってみないとわからないが — ので，x^6 までをとった．ただしこの場合も，誤差をしっかり評価するために，$O(x^{10})$ などを明記するのが良い．)

分子も同様に，

$$\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}-2=1+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^6+O(x^9)+\big\{1-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^6+O(x^9)\big\}-2=-\frac{1}{4}x^6+O(x^9)$$

とわかる．従って，求める極限は

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}x^6+O(x^9)}{\frac{1}{2}x^6+O(x^{10})}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}+O(x^3)}{\frac{1}{2}+O(x^4)}=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

とわかる．

（注）闇雲にロピタルを使おうとすると分母と分子を 6 回微分しないといけないので（なぜ 6 回とわかるかというと，上の計算で分母子が x^6 から始まってるから），たいていの人は死ぬと思います．一応，僕もやって（正確にはコンピューターに計算させて）みましたが，あまりに式が汚いのでここに書く気をなくしました．もちろん，分母と分子を別々に考えるつもりで,「分子では $x^3=t$，分母では $x^2=t$ とおく」などの工夫をすれば，分子は 2 回，分母は 3 回の微分で済みます．でもそこまで知恵のある人なら，迷わずにテイラー展開をしましょう —ロピタルというのも，煎じ詰めればテイラー展開を使ってるわけだから．

番外問題より

- 質問「$O(x^5)$ や $o(x^5)$ とかは，その前に比べて無視して良いと言う意味か？」
  答え「無視して良いかどうかを**判定するために**これらの記号を用いる．例えば，上の問 17 で，最初はケチって分母，分子とも x^3 までしか求めなかった場合を考えてみよ．求める極限は
  $$\lim_{x\to 0}\frac{0+o(x^3)}{0+o(x^3)}$$
  となるが，これでは足りないことはわかるだろう？」
- 質問「問 17 など，何次まで展開すべきか？」
  答え「必要十分なだけ，やる．そのためにこそ，残項のオーダーを $O(x^4)$ などと明記して計算するのが望ましい．」

7 月 2 日：今日は積分の 2 回め，特に「連続函数は積分可能」の「説明」をします．時間があれば広義積分に入ります．

第 8 回レポート問題：

問 18： （区分求積法の問題）以下の 2 つの定積分を,「適当なリーマン和の極限」として求めよ．a は正の定数とする．

$$(A) \quad \int_0^a x\,dx \qquad\qquad (B) \quad \int_0^a \sqrt{x}\,dx$$

ただし，この問題 18 では計算しやすいようなリーマン和の極限を一つ求めれば十分とする．なぜなら，定理「連続関数は可積分」によれば,「どのようにリーマン和をとっても，その極限は等しい（だから可積分）」が保証されているから．

問 19*： 上の (A) について，今度はリーマン積分の定義にできるだけ沿って,「どのような分割 Δ の取り方，どのような分点 $\vec{\zeta}$ の取り方に対しても同じ極限が存在する」ことを示すよう，努力してみよう.（つまり,「連続函数は可積分」の定理は援用しないで，素朴に頑張ろう.）なお，僕の講義ノートでは，分割を Δ ではなく P で表している．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

レポートには**学生番号と氏名を明記**のうえ，以下のいずれかで提出してください．**（基幹教育事務室のレポートボックスに出す方は，締め切りが早いことに要注意！）**

- 7 月 8 日（月）の 13:00 までに，基幹教育事務室のレポートボックス　3　番に
- 7 月 8 日（月）の 17:00 までに，原の部屋（W1 号館 C 棟 6 階，C-601）のポストに（これまで同様）

どちらも**折らないで**入れて下さい．整理の都合上，用紙は A4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ（ただし，クリップは使用不可）．

前回，講義ノートを忘れたままで講義したので，記号が講義ノートのものとずれてしまった．記号の確認のために，主要部分を以下に載せる．

定義 1 (定積分) $a < b$ と．区間 $[a, b]$ で定義された（連続な）函数 $f(x)$ に対して，定積分 $\int_a^b f(x)dx$ を以下のように定義する（下図を参照）．

- まず，区間 $[a, b]$ を n 個（n は大きな整数）の小区間に分ける：$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.
  これを区間 $[a, b]$ の分割といい，P で表す．できる小区間は $[x_{i-1}, x_i]$ である（$i = 1, 2, \ldots, n$）．
  小区間の幅の最大値を $|P|$ と書く：$|P| = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})$.
- 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ に勝手に点 ζ_i をとる（$i = 1, 2, \ldots, n$）．以後 $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ をまとめて $\vec{\zeta}$ と書く．
- 上のように決めた P と $\vec{\zeta}$ に対して，f のリーマン和

$$R(f; P, \vec{\zeta}) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\,(x_i - x_{i-1}) \tag{2}$$

  を定義する．
- さて，$|P| \to 0$（区間の幅がゼロ）を満たすような任意の P と，P に対して上のようにとった任意の $\vec{\zeta}$ を考える．$|P| \to 0$ の極限で $R(f; P, \vec{\zeta})$ の値が（$P, \vec{\zeta}$ の取り方によらず）一定の値に近づくならば，$f(x)$ は $[a, b]$ 上で**積分可能**（または可積分）といい，その極限値を定積分 $\int_a^b f(x)dx$ の値と定める．模式的に数式で書けば

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \text{“}\lim_{|P| \to 0}\text{''}\ R(f; P, \vec{\zeta}) \tag{3}$$

  とするのである（上の極限はかなり複雑なので“ ”を付けた）．

なお，$a = b$ の場合は $\int_a^a f(x)dx = 0$ と定義する．
また，$a > b$ の場合は $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ と定義する．($a > b$ の時の定義はもちろん，$\int_b^a f(x)dx$ が定義できる時のみ有効である.）このようにして定義した積分をリーマン式積分，または**リーマン積分**という．

とくに大事な定理は以下のものである：

定理 2 (連続函数は積分可能，教科書の定理 3.2.3) 函数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ 上で連続なら，f は $[a, b]$ 上で積分可能である．また,「有限個の点を除くと連続」な函数も積分可能である．

7 月 9 日：今日は広義積分です．
大してややこしい話ではないのですが，ぼんやりしていると，定義をきちんと理解できず，試験の時などに困るので，注意してください．
来週の火曜日は「月曜の授業」なので，この微積の講義はありません．次回は 7/23 になります．

期末試験についての**現時点での暫定的な**情報は以下の通りです．

- **試験日時と場所は，大学指定の** 通り．
- 試験範囲は，これまでにやった「極限」「微分」「積分」および「偏微分の計算」です.「微分」には当然，「テイラー展開」なども含みます．また,「偏微分の計算」は最初の回に説明したことを，最後の回にもう一度復習します．
- 何度も強調したように,「極限の厳密な理論」ができなくても十分に単位が出せる問題にします．
- 具体的には,「函数を偏微分する」「極限を計算する」「テイラー展開する」「(広義）積分を計算する」**など**の計算問題が大半（2/3？）になります（以上はあまり厳密性は要求しない）．なので，高校での範囲も含めて,「計算がしっかりできる」ようにはなってください．
- （上への補足）ただし,「見かけは極限の問題だけど，テイラー展開をしないと解き難い問題」なども出る可能性があるのは中間試験と同じです．習ったことを十分に習得しておれば解ける問題ばかりであるのも中間試験と同じです．
- 「極限の厳密な理論」に関する問題もちょっと（1/3 くらい？）出します．広義積分などと絡む可能性もあります．
- なお，最終成績をどのように出すか，などは最初に宣言した通りです．
- 緊急の予定変更の場合，この科目の web page を使う可能性がありますので，注意して下さい．

期末試験では「A4 の紙一枚（片面だけに書いたもの；原則として手書きだが，自分の「オリジナルまとめ」をコンピューターなどで打ち込んだものも可)」の持ち込みを認めます．学生番号と氏名を書いて，試験当日，答案とともに提出して下さい.「自分は持ち込み無しで受ける」という人は，学生番号と名前を書いた「A4 の紙」を提出して下さい．

（補足説明）

- 原則として，持ち込み用紙は採点しません．ただし,（以下の方針から判断して）非常に良いものを作った場合には，ホンの少しだけ良いことがあるかもしれません．
- 持ち込みを認める理由：ある程度の分量の概念を学習したため，**持ち込み用紙を自分で書いて，全体を整理して勉強する手助けとしてもらいたい**，というのが最大の狙いです．
- 「持ち込み用紙を自分で準備することを通して勉強する」ことが最大の狙いですから，皆さんには，自分で持ち込み用紙を準備する事を奨めます．友達と協力して持ち込み用紙を作成した場合は，**「○○さんと一緒に作りました」と明記**して下さい．このような明記がないのに非常によく似たものが複数現れた場合，また，酷似したものがネットにあった場合，には，それなりの措置を講じるかもしれません．
- まちがっても,「試験対策委員の作成したものを多数の人間が持ち込む」などはやらないでくださいね．しつこいけども,「自分で勉強してまとめる」のが最大の目的です．試験対策委員の作ったものを持ち込んでも何の役にも立ちません.（自分でまとめが作れない人は，その程度の実力だということです．その時点で諦めるか，死にものぐるいで勉強するかしかないでしょう.）
- 例題とその解答を延々と書く事はルール違反ではないけども，勉強にならないので，お勧めしません.（書くなら，要点だけを書くのが良い.）あまりに酷い場合には減点する可能性があります．
- なお，このように持ち込み用紙は提出してもらうので，提出前にコピーを取っておく方が無難です — 持ち込み用紙も答案と一緒に返却の予定ですが，返却までのタイムラグがありますから（特に再調査をやる場合，再調査までに勉強し直したい人は注意してください）．

言わずもがなの注意：持ち込みを認めるのは，半年にしてはそこそこの分量をやったからです．決して「持ち込みだから楽勝」などと思わないでください．

第 9 回レポート問題：

問 20： 次の広義積分を計算せよ（$a > 0$ は正の定数）．

$$(a)\quad \int_0^{-1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}dx \qquad (b)\quad \int_0^{\infty} x^2\, e^{-ax} dx$$

問 21： 次の広義積分を計算せよ（$a > 0$ は正の定数）．ただし，広義積分が定義できないものもあるかもしれないよ．また，(c) については，その値を求めるのは（現時点では）不可能．**収束するか発散するかのみ答えれば十分**だが，それもかなり難しいかも．（コーシー列の考えを使えばできるが，それを用いずとも解答は可能だ．）

$$(a)\quad \int_{-1}^{3} \frac{1}{x}dx \qquad (b)\quad \int_0^{\infty} \frac{2}{e^{ax}+e^{-ax}}dx \qquad (c)^*\quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$$

問 22***：** これは「夏休みチャレンジ問題」とする方が良いでしょうが，来週がお休みなので，興味のある人のために，ここで出題しておくことにしました．興味のある人だけ挑戦してください．（この問題の解答例は，すぐには公開しません．）

（問題の趣旨）今まで高校で習った sin, cos の定義や性質はいったん忘れ，$\sin x$ と $\cos x$ をそのテイラー級数で定義した場合，我々の知っている sin, cos と同じになるかどうかを考える問題です．何をもって「同じ」というかはなかなか難しいのですが，一見異なる性質のものがどうも同じらしい，と実感してもらえれば良いですね．我こそはと思う者は，是非，チャレンジしてください．

- 前提条件として，高校での $\sin x, \cos x$ の知識はいったんすべて，忘れてください．そのようなものを知らないところから sin, cos を定義するのが目的です．
- まず，関数 $S(x)$ と $C(x)$ を
$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad C(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{(2n)!}$$
と定義する．右辺の意味はもちろん，$S(x)$ なら $a_N := \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ という数列を考え，その $N \to \infty$ の極限を $S(x)$ と定義する，ということ．先走っていうと，$S(x)$ は $\sin x$，$C(x)$ は $\cos x$ になるはずのものである．
- この級数はすべての実数 x で収束していることを確かめよう．
- このように定義したものが $S'(x) = C(x), C'(x) = -S(x)$ をみたすこと（$'$ は x での微分）を示せ．この場合，$S(x), C(x)$ ともに無限級数で定義されているから，級数の無限和と x による微分の順序交換ができるかどうかが問題だ．今までの知識でも（微分の定義から出発して）できるから，頑張れ！
- $\{S(x)\}^2 + \{C(x)\}^2 = 1$ を示せ．
- sin, cos の加法定理に相当するものが成り立つことを示せ．例えば，$S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y)$ などということである．（無限級数の積を考える必要があるから，極限の取り方などに注意して厳密に議論しよう．）
- $S(\alpha) = 0, C(\beta) = 0$ となるようなゼロでない α, β が存在することを何とかして示せ．$S(x), C(x)$ の満たす不等式を作ってみるのが良いかもしれない．
- $S(x), C(x)$ が周期関数であることを導け．つまり，正の数 α があって，$S(x+\alpha) = S(x)$, $C(x+\alpha) = C(x)$ がすべての x について成り立つことを示せ．
- 上の α, β と，円周率 π の関係をつけよう．π の定義としては「半径 1 の円の円周の長さが 2π」とする．これまで考えてきた $S(x), C(x)$ からその円周の長さを計算することで，π との関係をつけよ．
- その他，わかることがあったら何でもやってみて，上の $S(x), C(x)$ と皆さんの知っているはずの $\sin x, \cos x$ が「同じ」である状況証拠を積み重ねてみよう．あと，どのようなことを言えば，本当に「同じ」だといえるだろうか？そもそも，皆さんの知っているはずの $\sin x, \cos x$ の定義は何だったんだろう？

上に書いたものはこの順序でやる必要はない．また，上のはあくまで一つのアプローチであって，これにとらわれる必要もない．ともかく上で定義した級数 $S(x), C(x)$ と皆さんの知っているはずの $\sin x, \cos x$ との関係をいろいろとつけてくれれば良い．

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

レポートには**学生番号と氏名を明記**のうえ，以下のいずれかで提出してください．**（基幹教育事務室のレポートボックスに出す方は，締め切りが早いことに要注意！）**

- 7 月 22 日（月）の 13:00 までに，基幹教育事務室のレポートボックス　3　番に
- 7 月 22 日（月）の 17:00 までに，原の部屋（W1 号館 C 棟 6 階，C-601）のポストに（これまで同様）

どちらも**折らないで**入れて下さい．整理の都合上，用紙は A4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ（ただし，クリップは使用不可）．

―――――――――――――――― 先週のレポートの略解 ――――――――――――――――

問 18： 求めやすい分割について，リーマン和を計算しよう．以下の f はそれぞれ，問題にある被積分函数である．

(A) まあ，区間 $[0, a]$ を n 等分するのが自然だろうからやってみる．

$$x_j = \frac{a}{n}\,j, \qquad \zeta_j = x_j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

としてみると，

$$R(f; P, \vec{\zeta}) = \sum_{j=1}^{n} (\zeta_j)\,\frac{a}{n} = \Big(\frac{a}{n}\Big)^2 \sum_{j=1}^{n} j = \Big(\frac{a}{n}\Big)^2 \times \frac{n(n+1)}{2}$$

となる．$n \to \infty$ では，上の右辺は $a^2/2$ に行くので，積分の値は $a^2/2$．もちろん，みんなの知ってる値になった．

(B) 上と同じく等分割でやると

$$R(f; P, \vec{\zeta}) = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\zeta_j}\,\frac{a}{n} = \Big(\frac{a}{n}\Big)^{3/2} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{j}$$

となる．ただ，この和はなかなか求めにくいのではないか？なので以下のように仕切り直す．

仕切り直し：上で死んだのは，和の中に $\sqrt{j}$ が出てきて，これが扱いにくかったからだ．じゃあ，ここが j になるように，切り方を変えれば良い — x 座標を等分割せず，y の方を等分割すれば，和の中には j/n のようなのが出るだろう．つまり，$f(x) = \sqrt{x}$ として

$$f(x_j) = \frac{\sqrt{a}}{n}\,j \qquad \text{となるように，つまり} \qquad x_j = \Big(\frac{j}{n}\sqrt{a}\Big)^2 = \frac{a}{n^2}\,j^2 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

とすれば良いのだ．(それで簡単のため，$\zeta_j = x_j$ にする．) すると，リーマン和は

$$\begin{aligned} R(f; P, \vec{\zeta}) &= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})\,\sqrt{\zeta_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a}{n^2}\{j^2 - (j-1)^2\}\,\frac{\sqrt{a}}{n}\,j = \frac{a\sqrt{a}}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j(2j-1) \\ &= \frac{a\sqrt{a}}{n^3} \times \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2a\sqrt{a}}{3} \end{aligned}$$

となって，みんなの知ってる答えになる．

別解： まともにやると上のように大変だが，逆函数を考えて,「放物線の下の面積」を $a\sqrt{a}$ から引いてやると，等分割でもできる.（でもこれは実質的に，y 方向を等分割していることなので，上と本質的には同じことである.）

問 19： 被積分函数が単調増加なので，かなり考えやすいはず.

ともかく，一般の分割を $P = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ とする（$x_0 = 0, x_n = a$）．また，ζ_j は $[x_{j-1}, x_j]$ の中（端も含む）に取る．リーマン和は

$$R(f; P, \vec{\zeta}) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})\, f(\zeta_j) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})\, \zeta_j$$

であるけども，被積分函数の単調増加性から，上のリーマン和はいつでも，以下のように（ζ_j を区間の端にとったもので）挟まれる：

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})\, x_{j-1} \le R(f; P, \vec{\zeta}) \le \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})\, x_j$$

左側の和を $s(f; P)$，右の和を $S(f; P)$ と書く．これらが同じ極限に行けば十分なのだが，それを簡単に示すため，以下の和を考える：

$$T(f; P) := \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})\, \frac{x_j + x_{j-1}}{2}$$

この定義をうまく変形すると，$T(f; P)$ は以下のように計算できる（P が一般の分割でも大丈夫なことに注意）：

$$T(f; P) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})\,(x_j + x_{j-1}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \{(x_j)^2 - (x_{j-1})^2\} = \frac{1}{2} \{(x_n)^2 - (x_0)^2\} = \frac{a^2}{2} \qquad (*)$$

これは大変に良い量だ.

さて，この T を reference として，s と S を考える．差を取ると，

$$S(f; P) - T(f; P) = T(f; P) - s(f; P) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})^2$$

となるが，この右辺の量は

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})^2 \le \max_j |x_j - x_{j-1}| \times \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = \max_j |x_j - x_{j-1}| \times a$$

であって，分割を細かくすれば，これは必ずゼロに行く．従って，

$$\lim_{|P| \to 0} S(f; P) = \lim_{|P| \to 0} s(f; P) = \lim_{|P| \to 0} T(f; P) = \frac{a^2}{2}$$

が結論できる.

なお，上では被積分函数の特殊性によって $T(f; P)$ が簡単になった．一般の f の場合でも，f が単調増加なら，似たような議論は可能．f が単調でない場合は，結局のところ，教科書や僕の講義ノートにある一般論を使う形になる. □

7 月 23 日：今日も主に広義積分です．
期末試験についての**現時点での暫定的な**情報は，前回と変わっていないので，今日は再録しません．来週，再録の予定です．

―――――――――先週のレポートの略解―――――――――

重要な注意：$\displaystyle\lim_{L\to\infty} L^2\,e^{-L}$ などの極限は，すぐにわかるようになっておくことが望ましい．この極限が分からずに解けなかった人がある程度，いました．

問 20：

(a) $x=0$ がヤバいことに気をつけて，広義積分の定義により

$$\int_0^{-1}\frac{1}{\sqrt{|x|}}dx=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\epsilon}^{-1}\frac{1}{\sqrt{|x|}}dx=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{1}\frac{-1}{\sqrt{y}}dy=\lim_{\epsilon\to 0}\Bigl[-2\sqrt{y}\Bigr]_{\epsilon}^{1}=-2$$

(b) 積分区間が無限大だから，広義積分の定義により

$$\int_0^{\infty}x^2\,e^{-ax}\,dx=\lim_{L\to\infty}\int_0^{L}x^2\,e^{-ax}\,dx=\lim_{L\to\infty}\Bigl[-\frac{(2+2ax+a^2x^2)e^{-ax}}{a^3}\Bigr]_0^{L}=\frac{2}{a^3}$$

問 21：

(a) $x=0$ がヤバいので，広義積分の定義により

$$\int_{-1}^{3}\frac{1}{x}dx=\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \delta\to 0}}\Bigl[\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{1}{x}dx+\int_{\delta}^{3}\frac{1}{x}dx\Bigr]=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{1}{x}dx+\lim_{\delta\to 0}\int_{\delta}^{3}\frac{1}{x}dx$$

である．しかし，右辺の二つの極限はどちらも存在しない．結果として，この広義積分は存在しない．

(b) 積分区間が無限大の場合の広義積分の定義から

$$\int_0^{\infty}\frac{2}{e^{ax}+e^{-ax}}dx=\lim_{L\to\infty}\int_0^{L}\frac{2}{e^{ax}+e^{-ax}}dx$$

である．さて，この積分であるが，$y=e^{ax}$ の置換積分を行って以下のように進む：

$$\int_0^{L}\frac{2}{e^{ax}+e^{-ax}}dx=\int_0^{L}\frac{2\,e^{ax}}{e^{2ax}+1}dx=\frac{2}{a}\int_1^{e^{aL}}\frac{1}{y^2+1}dy$$

さらに，$y=\tan\theta$ と置くと，θ^* を，$\tan\theta^*=e^{aL}$ となるような，0 と $\pi/2$ の間の数として，

$$\int_1^{e^{aL}}\frac{1}{y^2+1}dy=\int_{\pi/4}^{\theta^*}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\,\sec^2\theta\,d\theta=\theta^*$$

となる．結果として

$$\int_0^{\infty}\frac{2}{e^{ax}+e^{-ax}}dx=\frac{2}{a}\lim_{L\to\infty}\Bigl(\theta^*-\frac{\pi}{4}\Bigr)=\frac{2}{a}\times\Bigl(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\Bigr)=\frac{\pi}{2a}$$

となった．

（積分の別のやり方）双曲線函数の性質を使った以下のような方法もある．cosh と sinh は

$$(\cosh x)^2-(\sinh x)^2=1$$

を満たすので

$$\int\frac{1}{\cosh x}\,dx=\int\frac{\cosh x}{(\cosh x)^2}\,dx=\int\frac{\cosh x}{1+(\sinh x)^2}\,dx=\int\frac{1}{1+t^2}dt$$

となる（$t=\sinh x$ とおいた）．この後は上のやり方と同じ．

(c) まず，ともかく，広義積分の定義から，ヤバイ $x=0$ と $x\to\infty$ をわけて

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{2\pi}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{\epsilon\to+0}\int_{\epsilon}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\lim_{L\to\infty}\int_{2\pi}^{L}\frac{\sin x}{x}dx$$

としておく．

右辺の極限のうち，$\epsilon \to +0$ の方は問題なく存在する．

（理由）被積分函数が $x \to +0$ まで連続で有界だから，積分 $\displaystyle\int_{\epsilon}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ は必ず存在し，かつ，ϵ の単調減少函数である．さらに，$\dfrac{\sin x}{x} \leq 1$ のため，積分の値は

$$\int_{\epsilon}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx \leq \int_{\epsilon}^{2\pi} 1\, dx \leq 2\pi$$

で押さえられている．結果として「有界な単調増加数列の極限」と同じ理由で，$\epsilon \to +0$ の極限は存在する．

問題は $G(L) := \lim\limits_{L\to\infty} \displaystyle\int_{2\pi}^{L} \frac{\sin x}{x} dx$ のほうで，この $G(L)$ の $L \to \infty$ の極限が存在するかどうかを知りたい．

コーシーの条件と部分積分を使うのが簡単だが，前回の授業ではコーシーの条件をやっていなかったので，それを使わない方法から紹介する．

（方法１：部分積分もコーシーの条件も使わない） 以下のやり方が最も素朴だろう．（１）収束する部分列をうまくみつけること（２）それ以外の場合の L の値も同じ極限に収束すること，の２段階で行う．

（１）単調増加な収束部分列を見つけ，その収束を証明すること．非積分関数は $L = n\pi$（n は正の整数）を境に増加と減少を行き来する．さらに，その増加や減少の大きさは，x が大きくなると小さくなる（分母が大きくなるので）．と言う訳で，$L = n\pi$ での値に注目して，数列（$n \geq 2$）

$$a_n := G(n\pi) = \int_{2\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

および（$n \geq 3$ くらい）

$$b_n := G((n+1)\pi) - G(n\pi) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

を考える．定義からもちろん，

$$a_n - a_2 = \sum_{k=2}^{n-1} b_k$$

である．

さて，積分変数を $[0, \pi]$ に揃えてやると，

$$b_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{n\pi + \theta}\, d\theta$$

となっていて，後ろの積分は正である．さらにこの積分は，n を増やすと被積分函数が小さくなるため，n の単調減少数列になっている．すなわち，

$$c_k := (-1)^k\, b_k$$

を定義すると，

$$b_n = (-1)^n\, c_n \qquad \text{かつ} \qquad c_n \ \text{は 正で，}n\ \text{について単調減少}$$

と言えた．

さて定義から，

$$a_n - a_2 = \sum_{k=2}^{n-1} (-1)^k\, c_k = c_2 - c_3 + c_4 - c_5 + \cdots$$

となっていることがわかる．これを

$$a_{2n} - a_2 = (c_2 - c_3) + (c_4 - c_5) + \cdots + (c_{2n-2} - c_{2n-1})$$

と書くと，各項が正なので，a_{2n} が n について単調増加であることがわかる．一方，

$$a_{2n+1} - a_2 = c_2 - (c_3 - c_4) - (c_5 - c_6) - \cdots - (c_{2n-1} - c_{2n})$$

と書くと，a_{2n+1} が n について単調減少であることがわかる．

さらに，

$$a_{2n+1} - a_{2n} = c_{2n} > 0$$

もわかる．つまり状況は以前の問題と同じで

$$a_2 < a_4 < a_6 < \cdots a_{2n} < a_{2n+1} < a_{2n-1} < \cdots < a_3$$

となっている．$a_2, a_4, a_6, \ldots$ は上に有界で単調増加なので収束．$a_3, a_5, a_7, \ldots$ は下に有界で単調減少なので収束．さらに $a_{2n+1} - a_{2n} = c_{2n}$ は $n \to \infty$ でゼロに行くから，これらはすべて共通の極限に収束するはずだ．

これで $(a_n)_n$ の収束が言えたので，（１）が完了．

（２）$L = n\pi$ 以外の $G(L)$ について考える．比較対象は上で調べた $a_n = G(n\pi)$ しかないから，ともかく比較する．L の大きいところだけ考えればよいから，$L > 2\pi$ を一つ決めよう．このような L に対しては $n\pi \leq L < n\pi + \pi$ となるような正の整数 n がひとつ定まるので，$G(L)$ と a_n を比べることにする．定義から，

$$G(L) - a_n = G(L) - G(n\pi) = \int_{n\pi}^{L} \frac{\sin x}{x} dx$$

であるが，$n\pi \le x \le L$ なので，

$$\Bigl|\frac{\sin x}{x}\Bigr| \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{n\pi}$$

がなりたっている．また，積分区間は最大でも π しかない．そこで積分の単調性から

$$\bigl|\, G(L) - a_n \,\bigr| = \Bigl|\int_{n\pi}^{L} \frac{\sin x}{x} dx\Bigr| \le \int_{n\pi}^{L} \Bigl|\frac{\sin x}{x}\Bigr| dx \le \int_{n\pi}^{L} \frac{1}{n\pi}\, dx \le \frac{L - n\pi}{n\pi} \le \frac{\pi}{n\pi} = \frac{1}{n}$$

と簡単に評価できた．つまり，L を大きくすると（既に収束を示した）a_n と $G(L)$ の差はいくらでも小さくなるのだ．従って，$G(L)$ も a_n と同じ極限に収束する．

（注）上の最後の部分をきちんとやると以下のようになる．任意の $\epsilon > 0$ をひとつ固定する．a_n が a_∞ に収束するので，十分大きな $N_1(\epsilon)$ が存在して，$n \ge N_1(\epsilon)$ では $|a_n - a_\infty| < \epsilon/2$ となっているはずである．そこで，

$$N_2(\epsilon) := \max\Bigl\{ N_1(\epsilon), \frac{2}{\epsilon} \Bigr\}$$

ととってやる．すると，$\dfrac{L}{\pi} > N_2(\epsilon)$ では，$n\pi \le L < n\pi + 2\pi$ となる n が $n > N_2(\epsilon)$ を満たすので，

$$\bigl|\, G(L) - a_\infty \,\bigr| \le \bigl|\, G(L) - a_n \,\bigr| + \bigl|\, a_n - a_\infty \,\bigr| \le \frac{1}{n} + \frac{\epsilon}{2} \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

が結論できる．これは $\displaystyle\lim_{L\to\infty} G(L) = a_\infty$ を ϵ-N で書いたものに他ならない．これで（2）も終わり． □

（方法 2：コーシーの条件，および部分積分を使う）部分積分により

$$G(L) = \int_{2\pi}^{L} \frac{\sin x}{x} dx = \Bigl[\frac{-\cos x}{x}\Bigr]_{2\pi}^{L} - \int_{2\pi}^{L} \frac{\cos x}{x^2} dx = \frac{\cos(2\pi)}{2\pi} - \frac{\cos L}{L} - \int_{2\pi}^{L} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

となるから，$M > L > 2\pi$ に対して

$$\bigl|\, G(M) - G(L) \,\bigr| = \Bigl| \frac{\cos L}{L} - \frac{\cos M}{M} - \int_{L}^{M} \frac{\cos x}{x^2} dx \Bigr| \le \frac{1}{L} + \frac{1}{M} + \Bigl| \int_{L}^{M} \frac{\cos x}{x^2} dx \Bigr|$$

ところが，最後の積分は

$$\Bigl| \int_{L}^{M} \frac{\cos x}{x^2} dx \Bigr| \le \int_{L}^{M} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{L} - \frac{1}{M}$$

と押さえられるので，結果として $M > L > 2\pi$ で

$$\bigl|\, G(M) - G(L) \,\bigr| \le \frac{1}{L} + \frac{1}{M} + \frac{1}{L} - \frac{1}{M} = \frac{2}{L}$$

が得られた．これは $G(L)$ がまさにコーシーの条件

任意の $\epsilon > 0$ に対して，十分に大きな N を取ると，$M > L > N$ ならば $\bigl|\, G(M) - G(L) \,\bigr| < \epsilon$

を満たすことを意味する（$N = 1/\epsilon$ と取れば良い）．よって，この極限は存在し，広義積分も存在する．

（方法 3：コーシーの条件を使うが，部分積分は使わない）

$$G(M) - G(L) = \int_{L}^{M} \frac{\sin x}{x} dx$$

を押さえ込みたい．困ったことに，被積分函数の絶対値を取ってしまうと大きくなりすぎてダメ．

仕方ないので，$\sin x$ の周期性をちゃんと取り込んで評価する．どうせ M, L を無限大にするところを見たいので，以下，$M > L$ はそこそこ大きいとする．そして，$L/(2\pi)$ 以上の最小の整数を l，$M/(2\pi)$ 以下の最大の整数を m と書く（もちろん，$m \ge l$ である）．

さらに，$G(M) - G(L)$ の積分領域を 3 つにわけて

$$G(M) - G(L) = \int_{L}^{M} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{L}^{2\pi l} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{2\pi l}^{2\pi m} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{2\pi m}^{M} \frac{\sin x}{x} dx = I_1 + I_2 + I3$$

と分解しよう．

I_1 については，l の定義により，積分範囲の長さは最大でも 2π を超えないから

$$\bigl|I_1\bigr| \le (2\pi l - L) \times \max_{L \le x \le 2\pi l} \Bigl|\frac{\sin x}{x}\Bigr| \le (2\pi l - L) \times \frac{1}{L} \le 2\pi \times \frac{1}{L} = \frac{2\pi}{L}$$

とできる．同様に，I_3 についても

$$\bigl|I_3\bigr| \le (M - 2\pi m) \times \frac{1}{2\pi m} \le \frac{2\pi}{2\pi m} \le \frac{2\pi}{L}$$

とできる（最後のところは $2\pi m \geq L$ を使った）.

I_2 は面倒だが，まず積分区間を幅 2π の小区間に分割した上で $\sin x$ の周期性を生かして

$$I_2 = \sum_{k=l}^{m-1} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{k=l}^{l-1} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{2\pi k + \theta} d\theta$$

とする．さらにそれぞれの積分は $\theta = \pi$ で積分区間を分けて

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{2\pi k + \theta} d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{2\pi k + \theta} d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin\theta}{2\pi k + \theta} d\theta = \int_0^{\pi} \Bigl(\frac{1}{2\pi k + \theta} - \frac{1}{2\pi(k+1) - \theta} \Bigr) \sin\theta \, d\theta$$

と書き直せるが，$\sin\theta \leq 1$ なども使って

$$= \int_0^{\pi} \frac{2(\pi - \theta) \sin\theta}{(2\pi k + \theta)\,(2\pi(k+1) - \theta)} \, d\theta \leq \int_0^{\pi} \frac{2(\pi - \theta)}{(2\pi k + \theta)\,(2\pi(k+1) - \theta)} \, d\theta \leq \frac{\pi \times 2\pi}{(2\pi k)^2} = \frac{1}{2\,k^2}$$

とできる．

結果として I_2 を

$$\bigl| I_2 \bigr| \leq \sum_{k=l}^{m-1} \frac{1}{2\,k^2} \leq \frac{1}{l} \leq \frac{2\pi}{L}$$

とできる（最後の $1/k^2$ の和のところは今まで何回もやった）.

以上から，$M > L > 10$ くらいでは，

$$\bigl| \, G(M) - G(L) \, \bigr| = \bigl| I_1 + I_2 + I_3 \bigr| \leq \frac{2\pi}{L} \times 3 = \frac{6\pi}{L}$$

が成り立つ．よってコーシーの条件から収束がわかる．

（おまけ）なお，この積分の値は $\pi/2$ であることが知られている．今の知識でこれを導くことも不可能ではないが，流石にオタクの領域に入りつつあるので自重する.（オタクでない方法は「複素関数論」で出てくるだろう.）

番外問題より： 「広義積分の極限の議論に ϵ-δ などは必要ですか？」という問いがありました.「必要」というのはおそらく,「試験答案として要求されているのか」という意味だと思います．この答えは「場合による」です．例えば，積分を計算した結果が,「高校のノリ」で極限のわかるもの（例えば Le^{-L} の $L \to \infty$ とか）なら，もう「高校のノリ」で十分です．ただし,「コーシーの条件」などはそもそも ϵ-δ 型の書き方がされているため， ϵ-δ 的に書くことは必要になります．

7 月 30 日：今日は偏微分の最初とこれまでのまとめです．

期末試験についての情報は以下の通りです．(7/9 と本質的に変わっていません．)

- **試験日時と場所は，大学指定の** 通り．日時はおそらく，来週のこの時間のはずだが，これも各自チェック．
- 試験範囲は，これまでにやった「極限」「微分」「積分」および「偏微分の計算」です．「微分」には当然，「テイラー展開」なども含みます．また，「偏微分の計算」は最初の回に説明したことを，今日，もう一度復習します．
- 何度も強調したように，「極限の厳密な理論」ができなくても十分に単位が出せる問題にします．
- 具体的には，「函数を偏微分する」「極限を計算する」「テイラー展開する」「（広義）積分を計算する」**など**の計算問題が大半（2/3？）になります（以上はあまり厳密性は要求しない）．なので，高校での範囲も含めて，「計算がしっかりできる」ようにはなってください．
- （上への補足）ただし，「見かけは極限の問題だけど，テイラー展開をしないと解き難い問題」なども出る可能性があるのは中間試験と同じです．習ったことを十分に習得しておれば解ける問題ばかりであるのも中間試験と同じです．
- 「極限の厳密な理論」に関する問題もちょっと（1/3 くらい？）出します．広義積分などと絡む可能性もあります．
- なお，最終成績をどのように出すか，などは最初に宣言した通りです．
- 緊急の予定変更の場合，この科目の web page を使う可能性がありますので，注意して下さい．
- 「再調査」をする場合は，お盆の関係で，8/20 になってしまいます．こんな時に再調査はお互いに嫌ですよね．再調査に引っかからないよう，期末試験を大いに頑張ってください．

期末試験では「A4 の紙一枚（片面だけに書いたもの；原則として手書きだが，自分の「オリジナルまとめ」をコンピューターなどで打ち込んだものも可）」の持ち込みを認めます．学生番号と氏名を書いて，試験当日，答案とともに提出して下さい．「自分は持ち込み無しで受ける」という人は，学生番号と名前を書いた「A4 の紙」を提出して下さい．

（補足説明）

- 原則として，持ち込み用紙は採点しません．ただし，(以下の方針から判断して）非常に良いものを作った場合には，ホンの少しだけ良いことがあるかもしれません．
- 持ち込みを認める理由：ある程度の分量の概念を学習したため，**持ち込み用紙を自分で書いて，全体を整理して勉強する手助けとしてもらいたい**，というのが最大の狙いです．
- 「持ち込み用紙を自分で準備することを通して勉強する」ことが最大の狙いですから，皆さんには，自分で持ち込み用紙を準備する事を奨めます．友達と協力して持ち込み用紙を作成した場合は，**「○○さんと一緒に作りました」と明記**して下さい．このような明記がないのに非常によく似たものが複数現れた場合，また，酷似したものがネットにあった場合，には，それなりの措置を講じるかもしれません．
- まちがっても，「試験対策委員の作成したものを多数の人間が持ち込む」などはやらないでくださいね．しつこいけども，「自分で勉強してまとめる」のが最大の目的です．試験対策委員の作ったものを持ち込んでも何の役にも立ちません．(自分でまとめが作れない人は，その程度の実力だということです．その時点で諦めるか，死にものぐるいで勉強するかしかないでしょう.)
- 例題とその解答を延々と書く事はルール違反ではないけども，勉強にならないので，お勧めしません．(書くなら，要点だけを書くのが良い.）あまりに酷い場合には減点する可能性があります．
- なお，このように持ち込み用紙は提出してもらうので，提出前にコピーを取っておく方が無難です — 持ち込み用紙も答案と一緒に返却の予定ですが，返却までのタイムラグがありますから（特に再調査をやる場合，再調査までに勉強し直したい人は注意してください）．

言わずもがなの注意：持ち込みを認めるのは，半年にしてはそこそこの分量をやったからです．決して「持ち込みだから楽勝」などと思わないでください．