

- 1 mn 個の複素数 a_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) の総和を $\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij}$ と表すとき、次の等式が成り立つことを示せ (それぞれの総和はどのように和を取っているのか, a_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) を行列の成分と同様に縦横に並べた図を利用して説明せよ).

$$(1) \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij}$$

$$(2) \sum_{k=2}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a_{ij} \right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij}.$$

ただし, $\sum_{i+j=k} a_{ij}$ は $i+j=k$ を満たす全ての a_{ij} の総和を表すものとする.

$$(3) m=n \text{ のとき, } \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=j}^n a_{ij} \right) = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{ij}$$

ただし, $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{ij}$ は $1 \leq j \leq i \leq n$ を満たすすべての a_{ij} の総和を表すものとする.

- 2 (1) 以下を示せ.

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) = \left(\sum_{i=1}^m a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) = \sum_{i=1}^m a_i \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_i \right) b_j = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_i b_j$$

$$(2) \left(\sum_{i=0}^m a_i x^i \right) \left(\sum_{i=0}^n b_i x^i \right) \text{ を展開したときに表れる } x^\ell \text{ (} 0 \leq \ell \leq m+n \text{) の項の係数は, } \sum_{k=0}^{\ell} a_k b_{\ell-k} = \sum_{k=0}^{\ell} a_{\ell-k} b_k \text{ で与えられることを示せ. 但し, } k > m \text{ ならば } a_k = 0, k > n \text{ ならば } b_k = 0 \text{ とする.}$$

- 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき $2(A-3B) + 4(2A+B)$ を求めよ.

また, $3(A-X) = 2(B+X)$ を満たす行列 X を求めよ.

- 4 次の 4 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ を具体的に書け.

$$(1) a_{ij} = (-1)^{i+j}$$

$$(2) a_{ij} = \delta_{i,j+1}$$

- 5 次の行列の積を計算せよ. 積の順番も両方考慮せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 6 A, B を 2 次正方行列とする. $A \neq O$ かつ $B \neq O$ であるが, $AB = O$ となる例を挙げよ.

以上