

2018.10.16.

微分積分学・同演習 II (S1-27 クラス, 工学部機械航空工学科向け)

担当: 原 隆 (数理学研究院): 伊都キャンパス W1 号館 C-601 号室,

phone: 092-802-4441, e-mail: hara@math.kyushu-u.ac.jp

Office hours: 講義終了後に質問を受け付けます (そのうちに, 正式な office hours の時間を決めます). メールでの質問も歓迎.

概要: この講義は後期の「微分積分学 I」, 来学期の「微分積分学 III」とあわせて完成し, 一年半を通して『本格的な大学の微積分』を学ぶことを目的とする. I では「極限」「1 変数関数の微分とその応用」「1 変数関数の積分」などを扱った. それを受けて, II では「多変数関数の微分 (偏微分)」(および時間があれば)「級数論または重積分」を扱う予定.

後期でキーとなる概念: 偏微分, (級数または重積分)

特に講義を通して身につけて欲しいこと: この講義で学んでほしい「能力」は以下の 2 つである.

- (最低限) 微分や積分のいろいろな概念を習得し, 実際に応用して使えるようになること
- (可能ならば) 単にやり方を覚えるのではなく, 自分の議論に自信が持てるようになること.

高校までの数学では主に最初の面に力点が置かれていた. ところが, 昨今の中学, 高校でのカリキュラムの制約上, その最初の面ですら, 練習不足と思われる人が増えている. また, 「この問題はこのような解けば良い」ことは知っているけども, 「その方法がなぜ正しいのか」が説明できない人 (「本当にその方法で良いのか, 自信ある?」と問いただけると固まってしまう人) も多いようだ. 一方, みなさんは将来, 少し高度な数学を要する面があり, その場合には, **自分で自信を持って議論を組み立てる能力**が不可欠となる. そこで, この講義ではこれまでの練習不足を補いつつ, 自信を持って議論を組み立てられる人を養成することを目指す.

内容予定: (以下は大体の目安です. 皆さんの理解度により, かなりの変更や増減あり. 太字は特に高校よりも新しく重要な概念です — 必ずしも試験での比重が高いわけではないが.)

IV. 偏微分

1. 2 変数の関数とは何か?
2. 偏微分の定義とその意味
3. 連鎖律
4. 高階の偏微分
5. 2 変数関数の極値問題
6. 陰関数定理と条件付き極値問題

V. 「級数」または「重積分」など (厳密性は全く要求しない); 10/16 の授業で訂正しましたが, 後半に級数または重積分のどちらをやるかは, 10/16 時点では未定です. 偏微分がある程度進んだ段階で, 決めます.

中間試験は, 偏微分の最後の辺りで行う予定.

期末試験は学期末に行う (詳細は後日)

教科書: 三宅敏恒「入門微分積分」(培風館). I と同じです.

参考書: 上の教科書が合わないという人には, 以下の本をお勧めします.

- 野村隆昭「微分積分学講義」(共立出版). 九大の数学科の先生が書いた本. 進んだ面白い話題も入っているが, 語り口は柔らかく, 読みやすい.
- 高木貞治「解析概論」(岩波). 今の学生さんには難しすぎる, との意見もあるが, 不朽の名著だ. 超お奨め.
- 小平邦彦「解析入門 I, II」(岩波). 上の解析概論を少しとっつきやすくした感じ. 激しくお奨め.
- 杉浦光夫「解析入門 1, 2」(東大出版会). かなり分厚いけど, その分, 記述は丁寧. お奨め.

- 僕の友達田崎晴明さんの書きかけの本「数学：物理を学び楽しむために」、激しく超お奨め!!
彼の web page (<http://www.gakushuin.ac.jp/~881791/mathbook/>) からダウンロードできる。

評価方法 (村川先生と異なるだろうから注意) : 中間試験 (+レポート) と 期末試験 の成績を総合して評価する。そのルールは以下の通り :

- 最終成績は一旦、100点満点に換算してから、この大学の様式に従ってつける。
- その100点満点 (最終素点) は、以下のように計算する。
 - まず、「中間試験 (+レポート) の点」「期末試験の点」をそれぞれ 100 点満点で出す。
 - 次にこの2つを以下の式で「平均」し、一応の総合点を出す :

$$(\text{総合点 } A) = 0.50 \times (\text{中間 (+レポート) の点}) + 0.50 \times (\text{期末の点})$$

$$(\text{総合点 } B) = 0.10 \times (\text{中間 (+レポート) の点}) + 0.90 \times (\text{期末の点})$$

- ただし、上の重みを若干変更する可能性はある (総合点 A で、中間と期末の比を 4 : 6 にするなど)。
- 最終素点は

$$(\text{最終素点}) = \max\{(\text{総合点 } A), (\text{総合点 } B)\}$$

とする。つまり、(総合点 A) と (総合点 B) を比べて、良い方をとるのだ。

- 上の「最終素点」に、必要ならば全体に少し修正を加えたものをつくり、最終成績を出す。(例外 : 以下の但し書きを参照)
- レポートの点は原則として、総合点 A, B には加えない。ただし、上の計算では合格基準に少し足りない人 (百点満点で 10 点不足が限度) を助けるかどうかにかんして使用する。また、レポートがずば抜けて良い場合、この事実は最終成績に反映される事もある。
- なお、上の評価方法から推察できるように、**期末試験の試験範囲は、今学期にやったところすべて**である。特に、中間試験までに扱った題材も、期末試験で普通に出題される。この点、他の先生方と異なる可能性があるから注意されたし。

(A をとるための重要な但し書き) 期末試験ではあまり冒険をする訳にはいかず、(A と B の区別をつけるような) 極端に難しい問題は出題しにくい。そのため、中間試験にも A, B の峻別を行う機能のある程度持たせて、**中間・期末ともに成績優秀な人**にのみ、A をあたえるようにする可能性がある —— 特に、期末を簡単にしすぎた場合はこうなる。この意味で、上の (最終素点) の式は完全には正しくなく、A をとるためには期末だけでの一発逆転は無理かも知れない。A を狙って頑張る人はこの点を考慮して、中間・期末とも確実に受験してほしい。

「学習到達度再調査」について :

この大学には「学習到達度再調査」とかいう、変な制度がある。この科目は必修科目でもあり、これに更に期待する人がいるかもしれないので、ここではっきり、宣言しておこう。

「再調査」は行わない可能性もある。再調査を行うか、誰を対象とするかは、**こちらの一存で** (もちろん公平に、しかし厳しく) 決めさせていただく。

本音を言うと、再調査をする方が、こちらとしては厳しく点を付けやすい (厳しくつけておいて、誰を助けるかは再調査できちんと確かめれば良いから)。その分、皆さんには過酷なものになるでしょう。

だから、再調査には頼らず、期末試験まででちゃんと合格できるよう、しっかり学習して下さい。**期末試験までなら**皆さんの学習を助ける努力は惜しまないつもりで、質問などにも忍耐強く相手することを保証する。

合格 (最低) 基準 :

合格のための条件 (A, B がとれる条件ではない!) は、**講義中に出題する例題、レポート問題と同レベルの問題が解けること**である。(ただし「時間がなくてレポートは出せないけど試験には出さず」などの指示を講義中に与えることもあり得る。) 具体的には**大体**、以下のようなになる (進度の都合で内容に若干の変更があるので、完全なリストを現時点で呈示する事はできないが、講義を追っておれば明らかになるはず)。

- 多変数関数の微分とその応用について、厳密性を少し犠牲にしても良いから、計算ができること（具体的には、偏微分の計算、連鎖律、極値問題、テイラー展開など）。
- （講義でカバーする）級数論または重積分とその応用について、厳密性を少し犠牲にしても良いから、計算ができること。

レポート、宿題について：

2回に一回程度の割合で、簡単なレポートや「お奨めの宿題問題」を出す予定である。このレポートはレポートボックスに提出してもらい、採点ののち返却の予定（詳細は来週）。これらの出題意図は「この程度できれば講義についていけるし、合格も可能だ」という目安を与えることと家庭学習の引き金にすること、である。成績評価に占めるレポートの比重は低いが、この講義をこなす上では重要な意味があるので、是非やること。

重要：レポートは友達と相談した結果を書いて良い。ただし、誰と相談したかは明記すること。（「俺は人に教えてやっただけで人からは全く教わってない」と思う人は書かなくても良いが。）相談した人の名前を書かせるのは、「お世話になった文献、人にはきちんと感謝する」という、学問上の最低ルールを守ってもらうためである。なお、お世話になった人の名前を書いてレポートの成績が不利になることはない。

特に注意を要する題材：

1. 偏微分については、最初は簡単に見えるはずですが、ただし、「偏微分を行う際に、何を独立変数とみなすのか？」は、案外、落とし穴で、ぼんやりしていると、わからなくなってしまう。これが原因で、**連鎖律と座標変換**については、例年かなりの人が大変に苦戦します。
2. 「級数」または「重積分」も計算は簡単そうですが、収束の判定などをちゃんとやると案外、大変です。
3. この講義の大きな目的は「使える微積分を学ぶ」ことで、**実際に手を動かす**（計算する）ことが大事です。

この科目に関するルール：

世相の移り変わりは激しく、僕が学生だったときには想像すらできなかったことが大学で行われるようになりました。そのうちのいくつかは良いことですが、悪いこともあります。皆さんの反発は覚悟の上で、互いの利益のために、以下のルールを定めます。

- まず初めに、学生生活の最大の目的は勉強することであると確認する。
- 講義中の私語、ケータイの使用はつつしむ。途中入室もできるだけ避ける（どうしても必要な場合は周囲の邪魔にならないように）。これらはいずれも講義に参加している他の学生さんへの最低限のエチケットです。
- 僕の方では時間通りに講義をはじめ、時間通りに終わるよう心がける。
- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義を通して行う（補助として僕の web page も使う —— アドレスは <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html>）。「講義に欠席したから知らなかった」などの苦情は一切、受け付けない。
- レポートを課した場合、その期限は厳密に取り扱う。
- E-mail による質問はいつでも受け付ける (hara@math.kyushu-u.ac.jp)。ただ、回答までには数日の余裕を見込んで下さい。なお、学生さんのメールが往々にして spam mail に分類されてしまう事があります。見分け易いように、題名には「物理学科の〇〇です」などと書いて下さい。また僕にメールしたのに、2、3日しても返事がない場合は返事を催促して下さい。たとえどんなに理不尽（例：人格攻撃）なメールであっても、僕は返事はすることにしています。返事がないのはメールが届いていない可能性が高いです。

演習書の奨め：

教科書の例題や節末問題、章末問題はできるだけやること。それでもわかった気がしなかったら、演習書（いわゆる問題集）をやることを勧めます。問題をやることによって、自分が曖昧にしかわかっていなかった部分がはっきりしてくることが多い。ただし、その際、**解答を鵜呑みにはせず、自分で納得するまで考えること。考えてもわからなかったら、友達や教官（僕を含む）に訊けばよい。**同じ理由で問題の解答を頭から覚える愚だけは避ける事。演習書はどれでも良いが、一応、目についたものを列挙すると：

- 三村征雄編「大学演習 微分積分学」(裳華房) — 僕はこれを使った。ちょっとムズイかもね。
- 蟹江, 桑垣, 笠原「演習詳説 微分積分学」(培風館) — なかなか良いが, はじめは難しく感じるかも。
- 杉浦ほか「解析演習」(東大出版会) — これもまあ, 大変ではありますが, 良い本。
- 鶴丸ほか「微分積分 — 解説と演習」(内田老鶴圃) — 一番「普通」かも。
- 飯高茂監修「微積分と集合 そのまま使える答えの書き方」(講談社サイエンティフィック) — 題名は変だけど, 馬鹿にはできない, なかなかの本。流石は飯高さん監修だけあるな。案外, おすすめ。

これ以外にもいくらかでも出版されてるから, 図書館や本屋さんで自分にあった(読みやすい, やる気になる)ものを選べば良い。ただしその際, 解答や解説の詳しいものがよい。また, 無理をして難しすぎるものを選ぶ必要はない。自分が簡単だと思うことでも, (人間はアホやから) わかってないことが一杯あり, むしろ簡単ところが盲点になって先に進めないのだ。簡単な演習書でもやれば, 大きな効果があるはず。

本論に入る前に記号のお約束.

$a < b$ を 2 つの実数, n を非負 (負でない) 整数とする.

- 整数の全体は \mathbb{Z} , 自然数 (1 以上の整数) の全体を \mathbb{N} , 有理数の全体を \mathbb{Q} , 実数の全体は \mathbb{R} と書く。
- 集合 A の要素を大学では「元 (げん)」ともいう。(例) 2 は \mathbb{Z} の元である。 $\sqrt{2}$ は \mathbb{Q} の元ではない。
- 高校までと異なり, 「 $a < b$ または $a = b$ 」を $a \leq b$ と書く。同様に, 「 $a > b$ または $a = b$ 」を $a \geq b$ と書く。
- $a < x < b$ なるすべての実数の集合を (a, b) と書き, 開区間 という。教科書ではこの開区間に変な記号 (括弧のうえに \circ がついてる) を使ってるが, 打ち込むのが大変だし, 標準的ではないので使わない。
- $a \leq x \leq b$ なるすべての実数の集合を $[a, b]$ と書き, 閉区間 という。
- 高校と同じく, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ は n の階乗である。ただし, $0! = 1$ と約束する。

(用語の注) あるものがたった一通りに決まる (存在する) とき, 業界用語では $\circ\circ$ が一意に決まる (存在する) という。この表現『一意』は頻出するから覚えよう (英語の unique, uniquely の訳)。

10月30日：今日までで、教科書の4.2節が大体、終わりました。これまでのところで引っかけやすい「変数変換」についてのレポートを出題しました。

第1回レポート問題：連鎖律の問題です。

問1：以下のそれぞれの変数変換について、 $\frac{\partial f}{\partial x}$ を、変数変換後の偏微分 $\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial w}$ と (必要なら) u, w を用いて表せ。

- (1) $f(x, y)$ に対して、変数変換 $x = u + w, y = w$ を行い、 $g(u, w) := f(u + w, w)$ と定義
- (2) $f(x, y)$ に対して、変数変換 $x = u^3 + w, y = u + w^3$ を行い、 $g(u, w) := f(u^3 + w, u + w^3)$ と定義

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ、わかりにくかったところ、講義への要望などがあれば自由に書いてください。また、質問があれば、それもどうぞ。この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから、次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります。

レポート提出について：レポートには学生番号と氏名を明記のうえ、

11月05日(月)の13:00までに、基幹教育事務室のレポートボックス 10 番に

入れて下さい。整理の都合上、用紙はA4(この用紙と同じ大きさ)を使って欲しいのですが、授業中に言い忘れたので、今回はA4以外でも受け付けます。また、2枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてください。

1月29日:今日は級数のまとめなど, です.

期末試験についての情報は, 以下の通りです.

- **試験日時と場所は, 大学指定の通り.**
- 試験範囲は, これまでにやった「多変数関数の微分」が主ですが, 「級数」も少し訊きます.
- 微分に関しては(多変数の)微分の計算, 連鎖律, テイラー展開, 陰函数定理, 極値問題**など**が範囲です.
- 級数に関しては, 級数の収束条件, 冪級数(整級数)**など**が範囲です.
- 教科書でいえば, 4章と6章です.
- もちろん, 問題数の関係で, 上の全てを問うかどうかはわかりません.
- **ともかくしっかり計算できることを第一目標にして下さい.**
- なお, 最終成績をどのように出すか, などは最初に宣言した通りです.
- 緊急の予定変更の場合, この科目の web page を使う可能性がありますので, 注意して下さい.

期末試験では「A4の紙一枚(片面だけに書いたもの;原則として手書きだが,自分の「オリジナルまとめ」をコンピューターなどで打ち込んだものも可)」の持ち込みを認めます. 学生番号と氏名を書いて, 試験当日, 答案とともに提出して下さい. 「自分は持ち込み無しで受ける」という人は, 学生番号と名前を書いた「A4の紙」を提出して下さい.

(補足説明;前期と同じ)

- 原則として, 持ち込み用紙は採点しません. ただし, (以下の方針から判断して)非常に良いものを作った場合には, ホンの少しだけ良いことがあるかもしれません.
- 持ち込みを認める理由:ある程度の分量の概念を学習したため, **持ち込み用紙を自分で書いて, 全体を整理して勉強する手助けとしてもらいたい**, というのが最大の狙いです.
- 「持ち込み用紙を自分で準備することを通して勉強する」ことが最大の狙いですから, 皆さんには, 自分で持ち込み用紙を準備する事を奨めます. 友達と協力して持ち込み用紙を作成した場合は, 「**〇〇さんと一緒に作りました**」と明記して下さい. このような明記がないのに非常によく似たものが複数現れた場合, また, 酷似したものがネットにあった場合, には, それなりの措置を講じるかもしれません.
- まちがっても, 「試験対策委員の作成したものを多数の人間が持ち込む」などはやらないでくださいね. しつこいけども, 自分で勉強してまとめる, のが最大の目的です. 試験対策委員の作ったものを持ち込んでも何の役にも立ちません. (自分でまとめが作れない人は, その程度の実力だということです. その時点で諦めるか, 死にものぐるいで勉強するかしかないでしょう.)
- 例題とその解答を延々と書く事はルール違反ではないけども, 勉強にならないので, お勧めしません. (書くなら, 要点だけを書くのが良い.) あまりに酷い場合には減点する可能性があります.
- なお, このように持ち込み用紙は提出してもらうので, 提出前にコピーを取っておく方が無難です — 持ち込み用紙も答案と一緒に返却の予定ですが, 返却までのタイムラグがありますから (特に再調査をやる場合, 再調査までに勉強し直したい人は注意してください).

言わずもがなの注意:持ち込みを認めるのは, 半年にしてはそこそこの分量をやったから, そして皆さんに勉強して欲しいからです. 決して「持ち込みだから楽勝」などと思わないでください.