

2014.04.11.

微分積分学 (S1-12+13 クラス)

担当: 原 隆 (数理学研究院): 伊都キャンパス数理教育研究棟 219 号室,

phone: 092-802-4441, e-mail: hara@math.kyushu-u.ac.jp

Office hours: 講義終了後に質問を受け付けます。メールでの質問も歓迎。

概要: 高校の頃に習熟しなかった題材を中心に、微分積分学を学びます。半年間で完結すべきなので、内容をかなり厳選します。1 変数の関数の微積については、高校と受験数学でかなり勉強したでしょうから、これらについては「極限」「テイラー展開」「広義積分」のみを主に取り上げ、主力は 2 変数以上の関数の微積分 (偏微分と重積分) に注ぐ事にします。

キーとなる概念: (極限), 微分, テイラー展開, (広義) 積分, 簡単な微分方程式, 偏微分, 重積分

特に講義を通して身につけて欲しいこと: この講義で学んでほしい「能力」は以下の 2 つである。

- (最低限) 微分や積分のいろいろな概念を習得し、実際に 応用して使える ようになること
- (可能ならば) 単にやり方を覚えるのではなく、自分の議論に自信が持てる ようになること。

従来、高校までの数学では主に最初の面に力点が置かれていた。ところが、昨今の中学、高校でのカリキュラムの制約上、その最初の面ですら、練習不足と思われる学生さんが増えている。また、「この問題はどのように解けば良い」ことは知っているけども、「その方法がなぜ正しいのか」が説明できない人（「本当にその方法で良いのか、自信ある？」と問いかけると固まってしまう人）も多いようだ。そこで、この講義ではそのような練習不足を補いつつ、この方法はなぜ正しいのか、が説明できる人を養成することを目指す。(ただし、時間の関係上、どちらを優先するかと言われると、「使える」能力である。)

内容予定: (以下は 4/11 での暫定版。もう少し改良する予定)

ご覧の通り、「偏微分」「重積分」が主です。* 印は、高校でやらなかったはずの、重点的に取り扱う事項です。

また、指定の教科書は簡単すぎる部分もあるので、できるだけ、講義ノートを別途つくって、配布 (または web から download) するようにします。

0. 極限

1. 極限の厳密な定義 (ϵ - δ 論法; お話中心だが、適当なところに入れます)

I. 微分

1. 微分の定義, 意味, 平均値の定理などの復習 (教科書の 3.1, 3.2 節など)
2. テイラー展開 * (教科書の 3.6, 3.7 節)

II. 多変数の微分 * (偏微分)

1. 偏微分とは? (教科書 5.2 節)
2. 合成関数の偏微分 — 連鎖律 (教科書 5.3 節)
3. 陰関数の導関数 (教科書 5.4 節)
4. 高階の偏微分とは? (教科書 5.5 節)
5. テイラー展開 (教科書 5.6 節)
6. 極大極小問題 (教科書 5.7 節)
7. (時間があれば) 条件付き極値問題 — Lagrange の未定定数法 (教科書にはない)

- この辺りで、中間試験の予定 — 正確な日時は後で決める。

III. 積分

1. 積分の定義, 面積との関係などの復習 (教科書の 4.1, 4.2, 4.8 節など)
2. 広義積分 * (教科書の 4.10 節)
3. 簡単な微分方程式 (教科書にはないけど、重要だからやります)

IV. 多変数関数の積分 * (多重積分)

1. 2 重積分とは (教科書 6.1 節)

2. 反復積分による 2 重積分の計算法 — 長方形の場合 (教科書 6.2 節)
3. 反復積分による 2 重積分の計算法 — 縦線領域の場合 (教科書 6.3 節)
4. 変数変換 (教科書 6.4 節)
5. 2 重積分の応用 (教科書 6.5 節)

教科書: 神永正博, 藤田育嗣「計算力をつける微分積分」(内田老鶴圃)

参考書: 上の教科書はちょっと簡単すぎるかもしれないので, もっといろいろと調べたい場合には, 以下の本をお勧めします. また, この講義専用の講義ノートを別途つくって, 配布 (または web から download) するようにします.

- 野村隆昭「微分積分学講義」(共立出版). 九大の数学科の先生が書いた本. 進んだ面白い話題も入っているが, 語り口は柔らかく, 読みやすい.
- 斉藤正彦「微分積分学」(東京図書). 実はこの本の前身であった「微分積分教科書」の方が良いと思うが, 絶版になってしまった. とにかくしっかりした良い本です.
- 高木貞治「解析概論」(岩波). 今の学生さんには難しすぎる, との意見もあるが, 不朽の名著だ. 超お奨め.
- 小平邦彦「解析入門 I, II」(岩波). 上の解析概論を少しとっつきやすくした感じ. 激しくお奨め.
- 杉浦光夫「解析入門 1, 2」(東大出版会). かなり分厚いけど, その分, 記述は丁寧. お奨め.

評価方法:

中間試験 (+レポート) と 期末試験 の成績を総合して評価する. そのルールは以下の通り:

- 最終成績は一旦, 100 点満点に換算してから, この大学の様式に従ってつける.
- その 100 点満点 (最終素点) は, 以下のように計算する.
 - まず, 「中間試験 (+レポート) の点」「期末試験の点」をそれぞれ 100 点満点で出す.
 - 次にこの 2 つを以下の式で「平均」し, 一応の総合点を出す:

$$(\text{総合点 } A) = 0.50 \times (\text{中間 (+レポート) の点}) + 0.50 \times (\text{期末の点})$$

$$(\text{総合点 } B) = 0.10 \times (\text{中間 (+レポート) の点}) + 0.90 \times (\text{期末の点})$$

- ただし, 上の重みを若干変更する可能性はある (総合点 A で, 中間と期末の比を 4:6 にするなど).
- 最終素点は

$$(\text{最終素点}) = \max\{(\text{総合点 } A), (\text{総合点 } B)\}$$

とする. つまり, (総合点 A) と (総合点 B) を比べて, 良い方をとる のだ.

- 上の「最終素点」に, 必要ならば全体に少し修正を加えたものをつくり, 最終成績を出す.
- レポートの点は原則として, 総合点 A, B には加えない. ただし, 上の計算では合格基準に少し足りない人 (百点満点で 10 点不足が限度) を助けるかどうかにかんして使用する. また, レポートがずば抜けて良い場合, この事実は最終成績に反映される事もある.

合格 (最低) 基準:

合格のための条件は, **講義中に出題する例題, レポート問題, 小テスト問題などと同レベルの問題が解けること**である. (ただし「時間がなくてレポートは出せないけど試験には出すぞ」などの指示を講義中に与えることもあり得る.) 具体的には大体, 以下ようになる (進度の都合で内容に若干の変更があるので, 完全なりストを現時点で提示する事はできないが, 講義を追っておれば明らかになるはず).

- 1 変数関数の微分とその応用について, 計算ができること. 特にテイラー展開がわかって計算できること.
- 1 変数関数の微分とその応用について, 計算ができること. 特に, 広義積分の基本的なところがわかって計算できること.
- 簡単な微分方程式が扱えること.

- 多変数関数の微分とその応用について、計算ができること (具体的には、偏微分の計算、多変数関数の増減と極値問題、多変数のテイラー展開など)。
- 多重積分とその応用について、計算ができること (具体的には反復積分、変数変換など)。

レポート、宿題について：

ほぼ毎回、簡単なレポートや「お褒めの宿題問題」を出す予定である。このレポートは次回の講義の少し前に (教務課のポストを用いて) 集めて、その次の週の講義時に返却の予定。これらの出題意図は「この程度できれば講義についていけるし、合格も可能だ」という目安を与えることと家庭学習の引き金にすること、である。成績評価に占めるレポートの比重は低いが、この講義をこなす上では重要な意味があるので、是非やること。

重要：レポートは友達と相談した結果を書いても良い。ただし、誰と相談したかは明記すること。 (「俺は人に教えてやっただけで人からは全く教わってない」と思う人は書かなくても良いが。) 相談した人の名前を書かせるのは、「お世話になった文献、人にはきちんと感謝する」「自分の書いている事がどのような根拠を持っているかを明記し、よって立つところを明らかにする」という、**学問上の最低ルール**を守ってもらうためである。(このルールを守らないのは**剽窃**という事になる。この最低ルールすら守れない人が——本人によると「ルールを知らなかった」らしいが——最近、話題になっているのはご承知の通り。) なお、**お世話になった人の名前を書いてもレポートの成績が不利になることはない。**

この科目に関するルール：

世相の移り変わりは激しく、僕が学生だったときには想像すらできなかったことが大学で行われるようになりました。そのうちのいくつかは良いことですが、悪いこともあります。オヤジだとの反発は覚悟の上で、互いの利益のために、以下のルールを定めます。

- まず初めに、学生生活の最大の目的は勉強 (資格試験のための勉強なども含む) することであると確認する。
- 講義中の 私語、ケータイの使用はつつむ。途中入室もできるだけ避ける (どうしても必要な場合は周囲の邪魔にならないように)。これらはいずれも講義に参加している 他の学生さんへの最低限のエチケットです。
- 僕の方では時間通りに講義をはじめ、時間通りに終わるよう心がける。
- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義を通して行う (補助として僕のホームページも使う —— アドレスは <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html> だが、「九大 原」で検索して出るページから「講義」「(2014 年度の講義の) 微分積分学」とたどって行けば良い。). 「講義に欠席したから知らなかった」などの苦情は一切、受け付けない。
- レポートを課した場合、その期限は厳密に取り扱う。
- E-mail による質問はいつでも受け付ける (hara@math.kyushu-u.ac.jp)。ただ、回答までには数日の余裕を見込んで下さい。なお、学生さんのメールが往々にして spam mail に分類されてしまう事があります (多分、html mail で送られてくると自動的にスパムにされてしまうのだろう)。見分け易いように、題名には「薬学部〇〇です」などと書いて下さい。また僕にメールしたのに、2、3日しても返事がない場合は返事を催促して下さい。たとえどんなに理不尽 (例：人格攻撃) なメールであっても、僕は返事をするにしています。返事がないのはメールが届いていない可能性が高いです。

演習書の奨め：

教科書の例題や節末問題、章末問題はできるだけやること。それでもわかった気がしなかったら、演習書 (いわゆる問題集) をやることを勧めます。問題をやることによって、自分が曖昧にしかわかっていなかった部分がはっきりしてくることが多い。ただし、その際、**解答を鵜呑みにはせず、自分で納得するまで考えること。考えてもわからなかったら、友達や教官 (僕を含む) に訊けばよい。** 同じ理由で 問題の解答を頭から覚える愚だけは避ける事。

4月18日:今日は原がどうしても出席すべき会議が箱崎であるため,同僚の廣島先生に代講をお願いしました.進捗の問題もあるので,今日はレポート出題はありません.来週から,出題の予定です.

前回,黒板で説明した記号のお約束です.

$a < b$ を2つの実数, n を非負(負でない)整数とする.

- 整数の全体は \mathbb{Z} , 自然数(1以上の整数)の全体を \mathbb{N} , 有理数の全体を \mathbb{Q} , 実数の全体を \mathbb{R} , 複素数の全体を \mathbb{C} と書く. 例えば, $x \in \mathbb{R}$ と書けば,「 x は実数」と同じことである.
- 集合 A の要素を大学では「元(げん)」ともいう.(例) 2 は \mathbb{Z} の元である. $\sqrt{2}$ は \mathbb{Q} の元ではない.
- 高校までと異なり,「 $a < b$ または $a = b$ 」を $a \leq b$ と書く(不等号の下が2本線ではなく,1本線). 同様に,「 $a > b$ または $a = b$ 」を $a \geq b$ と書く.
- $a < x < b$ なるすべての実数の集合を (a, b) と書き, 开区間 という.
 $a \leq x \leq b$ なるすべての実数の集合を $[a, b]$ と書き, 閉区間 という.
- 高校と同じく, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ は n の階乗 である. ただし, $0! = 1$ と約束する.

「等号」には「両辺が等しい」の他に「片方をもう片方で定義する」の意味もある. この講義では両者を区別して

- $a = b$ は単に a と b が等しいことを表すために
- $a := b$ は左辺の a を右辺の b と定義するために

用いる. 例えば, $f(x) := x \sin x$ とあれば, これは函数 $f(x)$ を $x \sin x$ という函数だと定義する, の意味である.

(用語の注) あるものがたった一通りに決まる(存在する)とき, 業界用語では〇〇が**一意に決まる(存在する)**という. この表現『一意』は頻出するから覚えよう(英語の unique, uniquely の訳).

(漢字の注) 昔は関数を函数と書いた. 僕はこの癖が残っているので, 所々で「函数」と書いてしまうかもしれないが, これは高校までの「関数」と同じ意味である.

4月25日: 今日から「普通の」授業のつもりです. 今日は最初の山場「テイラー展開」をやります.

レポート問題: テイラー展開を自分で計算してみる問題です. 単なる計算ですが, 慣れるためにもやってみてください.

問1: 以下の関数 f, g, h の $x = 0$ の周りのテイラー展開 (マクローリン展開) を 3 次まで求めよ. a は定数である.

$$(a) f(x) = e^{x^2} = \exp(x^2) \quad (b) g(x) = \sqrt{1+x+x^2} \quad (c) h(x) = \cos(ax) \quad (1)$$

番外問題: これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ, わかりにくかったところ, 講義への要望などがあれば自由に書いてください. また, 質問があれば, それもどうぞ. この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから, 次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります.

レポート提出について:

上の問に解答し,

4月30日(水) 17:00 (時刻は24時間制) までに,

全学教育教務係 (センターゾーン1号館2階) のレポートボックス 42 番に

入れてください. 整理の都合上, 用紙はできるだけ A4 を使ってください (B5 だとなくなっても知らんぞ). また, 2 枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてください.

5月2日:「テイラー展開」の続きです。

5/9は「火曜の授業」なので、この講義はありません。次回は5/16の予定です。

レポート問題：先週とほとんど同じですが、もう少し「ズルイ」方法をやってもらつつもりで出しました。(問題番号は学期を通しての番号になっています。)なお、問3は少し取っ付きにくいかもしれません。

問2：以下の関数 f, g, h の $x = 0$ の周りのテイラー展開 (マクローリン展開) を、指定された次数まで求めよ。 a は定数である。

(a) $f(x) = e^{x^3+x^2} = \exp(x^2 + x^3)$ に対して x^9 まで

(b) $g(x) = \sqrt{1+x^2+x^4}$ に対して x^6 まで

(c) $h(x) = \cos(ax^3)$ に対して x^9 まで

問3*： $\sin x$ に対するテイラーの公式 (剰余項入り) を利用して、 $\sin(1)$ の値を、小数点2桁まで正確に求めよ。ただし、計算には加減乗除だけを用いること (言うまでもなく、関数電卓などで $\sin(1)$ を直接求めるのは御法度である — 要するに、関数電卓がどんなことをやってるのか、を少しわかってもらうという問題です)。

ヒント: テイラーの公式を何次までやるべきか、は自分で考えてください。また、剰余項を積分の形で書いた場合、積分をまともに計算するのは無理なので、以下を用いるのが良いでしょう:

$$a < b \text{ かつ } a \leq x \leq b \text{ では } f(x) \leq g(x) \text{ のとき, } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \text{ が成立}$$

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ、わかりにくかったところ、講義への要望などがあれば自由に書いてください。また、質問があれば、それもどうぞ。この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから、次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります。

レポート提出について：

上の問に解答し、

5月14日(水) 16:40 (時刻は24時間制) までに、

全学教育教務係 (センターゾーン1号館2階) のレポートボックス 42 番に

入れてください。整理の都合上、用紙はできるだけA4 を使ってください (B5だとなくなっても知らんぞ)。また、2枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてください。

なお、Golden Week 特集として、さらに進んだ問題を考えた。ただし、これは全てを厳密にやるのは難しいので、正式なレポート問題にはしない。問題内容は講義中に説明し、後から web page に上げる予定である。

先週のレポート問題の略解

問 1: ともかく計算するのみです. R_N は無視して良いと授業中に宣言したので, やる事は (f なら)

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$$

の右辺を計算する事です. つまり, $f(0), f'(0), f''(0), f'''(0)$ を計算すればそれでおしまい. **なお, この問題のもっと簡単に解く事が可能ですが, それについては講義中に解説します.**

実際にやってみると

$$f(x) = e^{x^2} \quad \text{なので} \quad f'(x) = 2x e^{x^2}, \quad f''(x) = (2 + 4x^2) e^{x^2}, \quad f'''(x) = (12x + 8x^3) e^{x^2}$$

であるから,

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2, \quad f'''(0) = 0$$

であるので, 答えは

$$f(x) \approx 1 + 0 + \frac{2}{2}x^2 + 0 = 1 + x^2.$$

たくさん計算した割には, 答えは簡単だった...

g, h も同様にして進む.

$$g(x) = (1 + x + x^2)^{1/2}, \quad g'(x) = \frac{1}{2}(1 + 2x)(1 + x + x^2)^{-1/2}, \quad g''(x) = \frac{3}{4}(1 + x + x^2)^{-3/2}$$

$$g'''(x) = -\frac{9}{8}(1 + 2x)(1 + x + x^2)^{-5/2}$$

なので,

$$g(0) = 1, g'(0) = \frac{1}{2}, g''(0) = \frac{3}{4}, g'''(0) = -\frac{9}{8}$$

で,

$$g(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{16}x^3.$$

h も同様である.

$$h(x) = \cos(ax), \quad h'(x) = -a \sin(ax), \quad h''(x) = -a^2 \cos(ax) \quad h'''(x) = +a^3 \sin(ax)$$

なので

$$h(x) \approx 1 - \frac{a^2}{2}x^2$$

注意:

1. テイラー展開を途中で止めて, 剰余項を無視したものは, 元の函数と同じではない (剰余項を無視した分だけ, 誤差がでている). なので, 上の答えを等式でつなぐのは良くない. つまり

$$f(x) = 1 + x^2$$

は正しくないから

$$f(x) \approx 1 + x^2 \quad \text{とか} \quad f(x) \doteq 1 + x^2 \quad \text{とか} \quad f(x) = 1 + x^2 + \dots$$

などと書くのが良い (今回は減点してませんが).

2. テイラー展開はあくまで, $x - a$ の次数の低い方から やって行くものですから, 答えは $f(x) \approx x^2 + 1$ ではなく, $f(x) \approx 1 + x^2$ と書くのが, より気分が出て望ましい. (もちろん, 数式としては (足し算の順序はどうしても良いから) どちらも同じ事ではあるが.)

チャレンジ問題: 特に期限などは設けません。すべてを厳密にやるのはかなり難しいと思うので、いろいろとごまかす(特に収束について)のはある程度、必要でしょう。ごまかしても、大まかな流れはつかめるのではないかと期待して、出題します。

テーマは、無限和の形で \sin, \cos を定義した場合、それが我々の知ってるはずのものと同じになるか? ということです。何を以て「同じ」というかも問題なので、以下では三角関数に特徴的ないくつかの性質を見る努力をします。

出発点: 高校までに習った三角関数はすべて忘れて, \sin, \cos を以下の無限和で定義する (x は実数):

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

また、指数関数は講義の通り、

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

と定義する (z は任意の複素数)。収束についてはきちんと学習していないので、これらの無限和の n の大きいところはまあ、無視しても良いと考えることにしよう。(いろいろな性質は n が非常に大きいところまで大体、なりたつてれば、無限和でも大丈夫と思うことにする。)

上で定義した「三角関数」は、我々の知ってるものと同じになるだろうか? 特に、周期 2π の周期関数になることがわかるだろうか? 以下にいくつかのポイント (ヒント) を上げてみた (順不同)。興味のある人はこれらにとらわれず、いろいろと考えてみてほしい。

- このように定義したものが $(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x$ をみたすこと ($'$ は x での微分) を示せ。(これが示されれば、少しは \sin, \cos らしく見えるかな?)
(注) この場合、 \sin, \cos ともに無限級数で定義されているが、級数の中身を微分しても良いと思うことにしよう。つまり、

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_n x^n)$$

として良いとする。(このような計算を「項別に微分する」という。)

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ を示せ。 \sin, \cos ともに実数の和で定義されているので、実数である。従って、この等式から $|\sin x|, |\cos x| \leq 1$ が結論できる。
- 加法定理が成り立つことを示せ。
- $\sin \alpha = 0, \cos \beta = 0$ となるような正の数 α, β が存在することを何とかして示せ。(ヒント: 中間値の定理)
- \sin, \cos が周期関数であることを導け (周期の大きさは次の小問で)。
- 上の α, β と、円周率 π の関係をつけよう。 π の定義としては「半径 1 の円の円周の長さが 2π 」とする。これまで考えてきた \sin, \cos からその円周の長さを計算することで、 π との関係をつけよ。
- その他、わかることがあったら何でもやってみよう。

以上、時間不足で思いつくままに書いたから、もしかしたらミスが混じってるかもしれない。その時は申し訳ないけど、自力で修正してください。また、上のはあくまで一つのアプローチであって、これにとらわれる必要はない。

5月16日: 2週間空いてしまったのですが, 今日から偏微分です.

なお, これまで講義メモを配っていましたが, 枚数が多いこと, またそのかなりの部分が「進んだ話題」であること, の理由から, 来週から講義ノートは配らないことにしました. 各自で web からダウンロードして下さい.

レポート問題: 偏微分などの概念をわかってもらう問題です.

問 4: 以下の関数 f, g を定義する:

$$f(x, y) = \sin(\sqrt{|xy|}), \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} & (x^2 + y^2 \neq 0) \\ 0 & (x = y = 0) \end{cases}$$

(1) 関数 f, g が原点 $(0, 0)$ で連続であるか否かを調べよ.

(2) 定義に基づいて, 関数 f, g の $(0, 0)$ での (x, y) に関する偏微分をそれぞれ計算せよ.

(3) 定義に基づいて, 関数 f, g の $(0, 0)$ での, $(\cos \theta, \sin \theta)$ 方向の方向微分をそれぞれ計算せよ (θ は 0 から 2π の間の定数). もちろん, (2), (3) の微分が存在しないときは理由とともに「存在しない」と書けば良い.

番外問題: これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ, わかりにくかったところ, 講義への要望などがあれば自由に書いてください. また, 質問があれば, それもどうぞ. この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから, 次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります.

レポート提出について:

上の問に解答し,

5月21日(水) 16:40 (時刻は24時間制) までに,

全学教育教務係 (センターゾーン1号館2階) のレポートボックス 42 番に

入れてください. 整理の都合上, 用紙はできるだけ A4 を使ってください (B5 だとなくなっても知らんぞ). また, 2枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてください.

————— 先週のレポート問題の略解 —————

問 2: ともかく計算するのみです.

(a) $t = x^2 + x^3$ とおいて, まずは e^t のテイラー展開を求めましょう. ただし, 「 t の何次までやるべきか」をまず考えておくと, 無駄がなくて済みます. 今の場合, $t = x^2 + x^3 = x^2(1+x)$ なので, $t^5 = x^{10}(1+x)^5$ は x^{10} 以上なので, ここまでやる必要はない. 一方, t^4 は x^8 を含んでいますから, **これは必要** (ここを間違った人, 多数). というわけで, 4次まで展開すると (指数関数, 三角関数くらいはテイラー展開が考えずとも思い浮かぶのが望ましいですが):

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \dots$$

です. 後はこれに $t = x^2(1+x)$ を代入して各項を展開し, x^9 以下を残せば良い:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x^2(1+x) + \frac{1}{2}x^4(1+x)^2 + \frac{1}{6}x^6(1+x)^3 + \frac{1}{24}x^8(1+x)^4 + \dots \\ &= 1 + x^2(1+x) + \frac{1}{2}x^4(1+2x+x^2) + \frac{1}{6}x^6(1+3x+3x^2+x^3) + \frac{1}{24}x^8(1+4x+\dots) + \dots \\ &= 1 + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} + x^5 + \frac{2}{3}x^6 + \frac{x^7}{2} + \frac{13}{24}x^8 + \frac{x^9}{3} + \dots \end{aligned}$$

(b) $t = x^2 + x^4$ においてやってみよう. t^3 は x^6 以上なので, これは必要; でも t^4 は x^8 以上なので不要. ということで, t^3 まで展開して

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + \dots$$

ですから

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 + \frac{1}{2}x^2(1+x^2) - \frac{1}{8}x^4(1+x^2)^2 + \frac{1}{16}x^6(1+x^2)^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2(1+x^2) - \frac{1}{8}x^4(1+2x^2+\dots) + \frac{1}{16}x^6(1+\dots) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 - \frac{3}{16}x^6 + \dots \end{aligned}$$

(c) これが一番, 簡単な. $t = ax^3$ において, t^3 まで見ればよいから

$$h(x) = 1 - \frac{t^2}{2} + \dots = 1 - \frac{a^2}{2}x^6 + \dots$$

問 3: 剰余項をどこまで見るべきか, など少し考える必要があります.

$\sin x$ のテイラー展開 ($x=0$ 中心) は x, x^3, x^5, x^7, \dots だけが出てくるのは知っているので, 「 x^5 まで出して, 残りは剰余項」のようなテイラーの公式を書いてみるのが良い. 公式通り書くと

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{6} \int_0^x (x-y)^3 \sin y \, dy$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{1}{120} \int_0^x (x-y)^5 \sin y \, dy$$

となっている.

上の方の式なら剰余項の大きさは $x=1$ で (積分範囲では $0 \leq \sin \leq 1$ なので)

$$0 \leq \frac{1}{6} \int_0^x (x-y)^3 \sin y \, dy \leq \frac{1}{6} \int_0^x (x-y)^3 \, dy = \frac{1}{24}$$

本当はもっと小さいけど, これでは「小数点以下 2 桁」つまり 0.01 の誤差にはなっていない (剰余項が大きすぎる可能性が高い). 仕方ないので, 下の方 (x^5 まで) を使ってみる. この場合, 剰余項は

$$0 \leq \frac{1}{120} \int_0^x (x-y)^5 \sin y \, dy \leq \frac{1}{120} \int_0^x (x-y)^5 \, dy = \frac{1}{720}$$

なので, なんとかかなりそうだ. これから

$$\sin(1) \leq 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = 0.841667$$

および

$$\sin(1) \geq 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{720} = 0.840278$$

が得られた (この右辺の数値は電卓で計算). と言う訳で, 小数点以下 2 桁なら,

$$\sin(1) \approx 0.84$$

となった.

もう少し効率の良いやり方, その 1: もう少し工夫する事ができる. 上では x^5 までをきちんと出して, そのあと \sin の 6 階微分を用いて剰余項を書いた. 剰余項の評価に, $\sin x \leq 1$ を用いた. しかし, 我々は $\sin x \leq x$ ($x \geq 0$) を知っている. これを用いると, 剰余項は

$$0 \leq \frac{1}{120} \int_0^x (x-y)^5 \sin y \, dy \leq \frac{1}{120} \int_0^x (x-y)^5 y \, dy = \frac{1}{5040}$$

となって, $1/7$ も改良できる. 実際にこのようにやった人も何人かいました. 大変に良かったです.

もう少し効率の良いやり方, その 2: 本質的に同じだが, 以下のようにもできる. 上では x^5 までをきちんと出して, そのあと \sin の 6 階微分を用いて剰余項を書いた. しかし, x^6 までをきちんと出して, \sin の 7 階微分を使って剰余項を書く事も可能だ — 書いても, x^6 の項はゼロだけど. こうやると

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{1}{720} \int_0^x (x-y)^6 \cos y \, dy$$

となって, 剰余項は (やはり $0 \leq \cos y \leq 1$ を用いて)

$$0 \leq \frac{1}{720} \int_0^x (x-y)^6 \cos y \, dy \leq \frac{1}{720} \int_0^x (x-y)^6 \, dy = \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040}$$

と評価できる. さっきよりも $1/7$ も改良できた!! なので, ここまでやれば

$$\sin(1) \leq 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = 0.841667$$

および

$$\sin(1) \geq 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} = 0.841468$$

が得られる. 小数点以下 3 桁まで求まってしまう.

なお, 同じ事を x^3 まできちんと出すようにしてやると

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{24} \int_0^x (x-y)^4 \cos y \, dy$$

となるので, 剰余項は

$$0 \leq \frac{1}{24} \int_0^x (x-y)^4 \cos y \, dy \leq \frac{1}{24} \int_0^x (x-y)^4 \, dy = \frac{1}{120}$$

よって

$$\sin(1) \geq 1 - \frac{1}{6} = 0.833333$$

および

$$\sin(1) \leq 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = 0.841667$$

が得られる. この場合, 誤差は $1/100$ 以下になっているが, 「小数点以下 2 桁」を正確に出そうと思うと残念ながら少し足りない.

ついでに: 上でキーになっているのは以下のような一連の不等式だ:

$$\sin x \leq x$$

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!}$$

$$\sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

これらの不等式はテイラーの公式から導くこともできる (少なくとも $0 \leq x \leq \pi$ では簡単). 実際, そのようにして不等式を出して解答した人もいた. 大変に良かったです.

しかし, これらの不等式は高校の知識でも地道に証明できるし, やったことのある人もあるかもしれない. その意味で, この問題はテイラーの公式を知らなくても解答することは可能であった.

5月23日：今日は方向微分などについてまとめた後、「連鎖律」と「高階の偏微分」をやります。

大きなお詫びと訂正：先週の講義での方向微分の定義が間違っていました（講義メモの方はあっています）。講義では方向微分の定義を

$$D_t f(\mathbf{a}) := \lim_{r \rightarrow +0} \frac{f(\mathbf{a} + r\mathbf{t}) - f(\mathbf{a})}{r}$$

としました（ r は正の方から0に近づける）。これには十分正当な意味がある—— \mathbf{a} から \mathbf{t} の方にずれた方向からの誤差を考える——のですが、数学の大勢では r が正負両方から近づく場合を考えて、方向微分を

$$D_t f(\mathbf{a}) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + r\mathbf{t}) - f(\mathbf{a})}{r}$$

とするようです。（実際、物理的応用などを考えると、こっちの定義の方が良いのは事実です。）やはり大勢に合わせた方が良く考えて、これからは下の方の定義を採用する事にします。

レポート問題：

問5：単なる偏微分の計算練習です。 $g(x, y) = y^2 \sin(xy^2)$ に対して以下の偏微分を計算せよ（単なる計算練習）。この計算は定義まで戻らなくても「普通に微分」のノリでやれば良い。

$$(a) \frac{\partial g}{\partial x} \quad (b) \frac{\partial g}{\partial y} \quad (c) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \quad (d) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)$$

配ったプリントには、この後に「問6」がありましたが、そこまで進めなかったため、今週のレポートは「問5」のみとします。

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ、わかりにくかったところ、講義への要望などがあれば自由に書いてください。また、質問があれば、それもどうぞ。この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから、次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります。

レポート提出について：

上の問に解答し、

5月28日（水）16:40（時刻は24時間制）までに、

全学教育教務係（センターゾーン1号館2階）のレポートボックス42番に

入れてください。整理の都合上、用紙はできるだけA4を使ってください（B5だとなくなっても知らんぞ）。また、2枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてください。

なお、レポートボックスに入れる際には、ボックスの奥が上になるように（入れるときに普通に読める向きで）入れて頂けるとありがたいです。また、学生番号は必ず書いて下さい！！

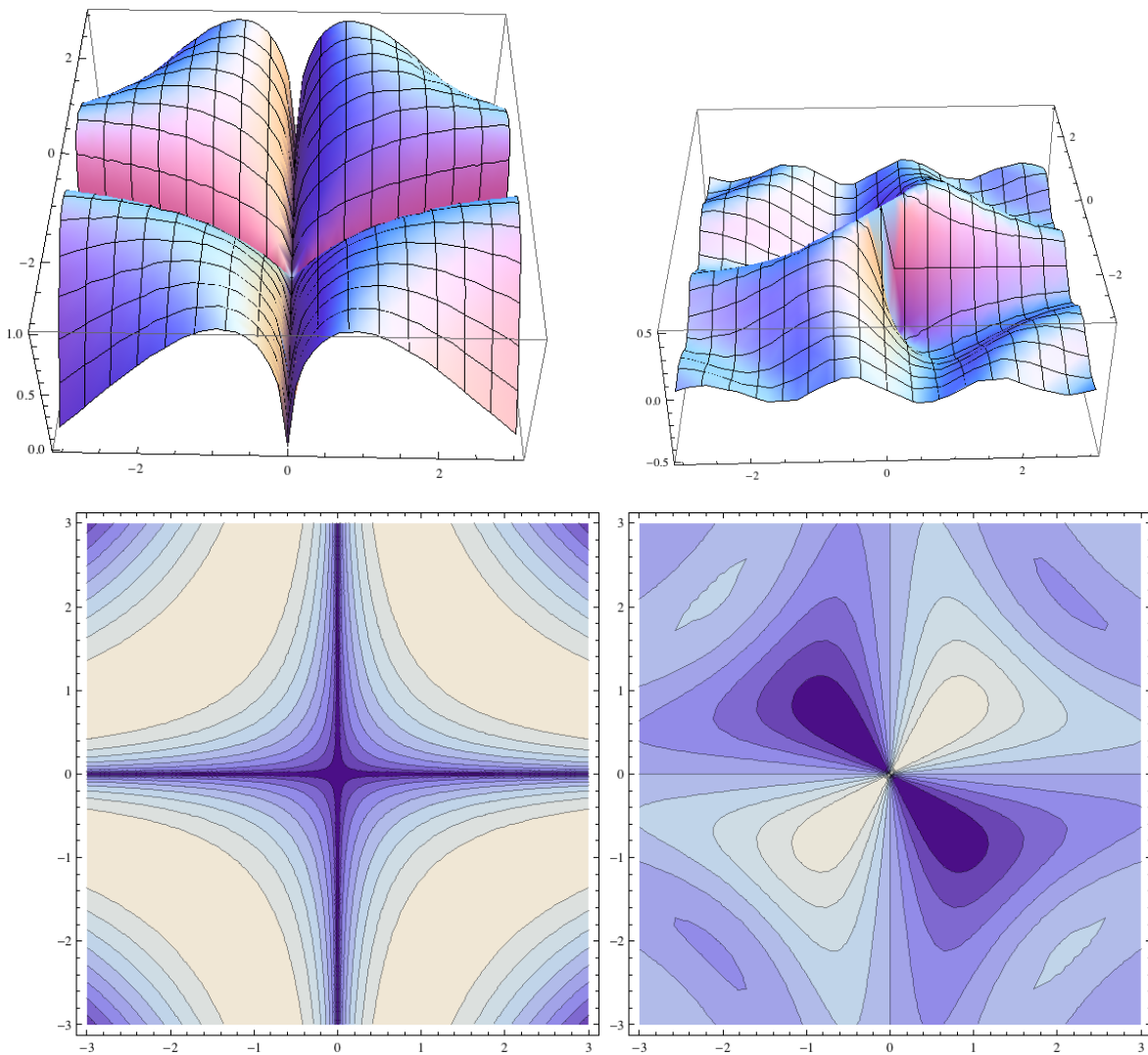
先週のレポート問題の略解

問題解説の前に、極限についての注意：極限を形式的に捉えている人が何人か、見られました。特に

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h}$$

のような極限を「不定形」と思い込んで「極限は存在しない」とした人が、案外、多かった。特に、右辺の形まで持ち込んでもまだ「不定形」とした人が目立ちました。いうまでもなく、 $0/h = 0$ ですから、上の極限は不定形でも何でもありません。このところ、もう少ししっかり考えて欲しかったです。

問 4：ともかく定義通りにやってみます。その前に、函数のグラフは以下の通り（左が f , 右が g ）です。上の図は 3 時限的な鳥瞰図、下の図は等高線を描いたものです。



(1) f が原点で連続、の定義は

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

ということで、 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ とは (x,y) と $(0,0)$ の距離がゼロに行く事、つまり $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ という事だった。なので、実際にこうなってるかを調べる。ただし、ゼロに行く行き方は何通りもあるから大変だ、というのは先週に強調した通りで、「どんな風に近づいても極限がある」などというのはちょっと大変ではある。(実は小問 (3) のような、「いろんな方向からの極限」を考えたらそれで十分なのではあるが、以下ではその知識は使わない。)

実は f の方は簡単である. $x \geq 0$ では $\sin x \leq x$ である (ことはたぶん, 受験数学でみなさん知ってるはず). もうちょっと頑張ると, 絶対値をとってもこれは正しい (つまり, $|\sin x| \leq |x|$ が全ての実数で成立) こともわかる. なので,

$$0 \leq |\sin(\sqrt{|xy|})| \leq \sqrt{|xy|}$$

が成り立っているのだが, この右辺は $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ ではゼロに行く. ので, 挟み撃ちによって, $f(x, y)$ の極限もゼロ. これは $f(0, 0)$ に等しいので, f は原点で連続である.

g の方も同様に考える. $g(0, 0) = 0$ だから, やはり $g(x, y)$ がゼロに行くか否か, が問題. これは成り立っていない. 例えば, $(x, y) = (t, t)$ を考えると,

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t^2)}{2t^2} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t^2)}{t^2} = \frac{1}{2}.$$

ということで, g は原点では連続でないのだ (この事情はグラフを描いてみるとよくわかる).

注意: この g については, x 軸上や y 軸上のみから近づくのを見ては全く, 不十分である. 実際, x 軸上や y 軸上では $g(x, 0) = g(0, y) = 0$ なので, 極限もゼロなのだ. 問題はこれ以外の方向 (特に斜め 45° でどうなってるか, なのだ.

(2) 定義通りに計算しよう

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

ということで, f の偏微分は共にゼロやね. 実は g も同じなのだ.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h, 0) - g(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0, h) - g(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

注意: 小問 (1) で g は連続でないことを見たが, それにもかかわらず, ここで計算したように原点での偏微分はちゃんと定義できてるのである. このところ, 「原点で連続ではないから偏微分できない」とやった人が多数, いた.

(3) 大きなお詫び: 先週の講義では, 方向微分を $\lim_{r \rightarrow +0}$ によって定義しましたが, 講義ノートは $\lim_{r \rightarrow 0}$ のママでした. 更に困った事に, 数学の大勢では, 方向微分は $\lim_{r \rightarrow 0}$ (つまり, r は正負の両方からゼロに近づく) で定義します (今日のプリントの最初に書いた通り). レポートの解答にあたって, 二通りが見られたので, このどちらも正解としました.

方向微分の定義によって計算する. $t = (\cos \theta, \sin \theta)$ として, 方向微分を D_t で表すと

$$D_t f(0, 0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r \cos \theta, r \sin \theta) - f(0, 0)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin(|r| \sqrt{|\cos \theta \sin \theta|})}{r}$$

となる.

もしここで方向微分の定義を $\lim_{r \rightarrow +0}$ とするなら, 上の極限は $\sqrt{|\cos \theta \sin \theta|}$ となって, これが答え.

ただし, 上に書いたように, 数学の大勢では $\lim_{r \rightarrow 0}$ で定義する. この (正しい) 定義を採用するなら, 上の極限は, $\sin \theta \cos \theta = 0$ の時以外には存在しない. また, $\sin \theta \cos \theta = 0$ の時 (つまり, $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ の時) には, 方向微分の値はゼロである.

g の方も同様に計算してみると

$$D_t g(0, 0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{g(r \cos \theta, r \sin \theta) - g(0, 0)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(r^2 \cos \theta \sin \theta)}{r^2}}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin(r^2 \cos \theta \sin \theta)}{r^3}$$

であるが、この極限は $\cos \theta \sin \theta \neq 0$ の場合には存在しない。

$\cos \theta \sin \theta = 0$ の場合にはこの方向微分はちゃんと定義できていてゼロである。これは $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ などで、要するに、 x や y 方向の偏微分を見る事になる。ので小問 (2) の結果とも矛盾していない。

連続性, 偏微分, 方向微分での極限の取り方について: かなり混乱している人がいるようなので、まとめておきます。(これは混乱しやすい概念なので、後で独学してもたぶん、大変だと思う。なので、わざわざ今、やっているのです。)

- 函数 f の $x = a$ での連続性を問題にするときは、極限は $\|x - a\| \rightarrow 0$ でとります (こうなるような、すべての x の a への行き方)。つまり、あらゆる方向から a に近づく全ての場合を考えて、その結果がすべて等しい場合にのみ、「極限が存在する」といいます。更にこの極限が $f(a)$ に等しいときに、 f は a で連続といえます。
- f の x に関する偏微分の場合、極限は x -軸に沿ってのみとります。連続性のときと比べて、格段に少ない場合だけを考慮する事に注意。
- 方向微分も同様です。先週の授業と異なる多数派の定義を使えば、 t -方向の方向微分の場合、 x は a に、ベクトル t の (正負の) 方向から近づきます。この意味で、方向微分は偏微分の一般化です —— 方向ベクトル t が x -軸に平衡の場合、方向微分は x による偏微分と一致。

5月30日: 今日^は連鎖律の続きとテイラー展開 (+極値問題) です.

レポート問題:

問6: (典型的な連鎖律の問題; 先週, 時間切れで削除したもの) 2次元極座標を考える. つまり, 普通の x, y 座標を, 動径の長さ r と角度 θ を用いて

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

と書くのである (たぶん, 高校でも見た事があるよね). 今, x, y の2変数の関数 $f(x, y)$ が与えられているとする. ここで x, y を上のように極座標で表して新しい関数

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

を定義する. このとき, 以下の2階偏微分で書かれた量を, 「 r, θ に関する g の適当な偏微分」を用いて表せ.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

このような書き換えは, 皆さんが「量子力学」または「量子化学」を学ぶ際に必ず出会うであろう.

注意: 2階も偏微分するところが大変, かつ非常に間違いやすいので注意.

問7: 関数 $f(x, y) = (1 + 2x + y)^{1/3}$ の, $x = y = 0$ の周りの2次までのテイラー展開を, 以下の二通りの方法で求めよ. («2次までの展開」とは, x, y の合計次数が2次以下の項を全て求める, という事である. つまり, $0, x, y, x^2, xy, y^2$ までを求める.)

(1) 「2変数関数のテイラー展開」の公式を用いて求めてみる.

(2) 適当な変数に置き直して, 1変数関数のテイラー展開として求める.

もちろん, (2)の方が簡単なのだが, ここは2変数関数の練習問題として, (1)もやって欲しい.

番外問題: これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ, わかりにくかったところ, 講義への要望などがあれば自由に書いてください. また, 質問があれば, それもどうぞ. この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから, 次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります.

レポート提出について:

上の問に解答し,

6月4日(水) 16:40 (時刻は24時間制) までに,

全学教育教務係 (センターゾーン1号館2階) のレポートボックス42番に

入れてください. 整理の都合上, 用紙はできるだけA4 を使ってください (B5だとなくなっても知らんぞ). また, 2枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてください.

なお, レポートボックスに入れる際には, ボックスの奥が上になるように (入れるときに普通に読める向きで) 入れて頂けるとありがたいです. また, 学生番号は必ず書いて下さい!!

先週のレポート問題の略解

問 5: ともかく注意深く計算するのみです.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y^2 \times \cos(xy^2) \times y^2 = y^4 \cos(xy^2)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y \sin(xy^2) + y^2 \cos(xy^2) 2xy = 2y \sin(xy^2) + 2xy^3 \cos(xy^2)$$

となるので, これらを x で微分すると

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(y^4 \cos(xy^2) \right) = y^4 \times (-\sin(xy^2) \times y^2) = -y^6 \sin(xy^2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(2y \sin(xy^2) + 2xy^3 \cos(xy^2) \right) = 2y \cos(xy^2) y^2 + 2y^3 \cos(xy^2) - 2xy^3 \sin(xy^2) y^2 \\ &= 4y^3 \cos(xy^2) - 2xy^5 \sin(xy^2) \end{aligned}$$

何人か, うっかりミスをした人がいました. 特に (d) は間違った人が多かった — $xy^3 \cos(xy^2)$ の中には 2 カ所に x があることを見落としたようですね.

6月6日:今日は極値問題です.

再来週, 6月20日に中間試験を行う可能性が高いです.

範囲はやったところ全部, ですが, もちろん, 「時間内に出来そうな問題」にするように配慮します. 主なテーマをまとめると:

- 1 変数関数のテイラー展開
- 偏微分, 定義と計算, (方向微分)
- 高階の偏微分
- 連鎖律
- 2 変数関数の極値問題

などです.

この教室は狭いので, **別の部屋 (2306 号室を予約) で試験をします.** 掲示やアナウンスに注意して下さい.

レポート問題:

問 8: (典型的な極値問題) 以下の 2 変数関数 f, g の極大点と極小点, およびそれぞれでの関数の値を求めよ. x, y はすべての実数値を動くものとする.

$$f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1), \quad g(x, y) = xy e^{-x^2 - y^2}$$

番外問題: これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ, わかりにくかったところ, 講義への要望などがあれば自由に書いてください. また, 質問があれば, それもどうぞ. この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから, 次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります.

レポート提出について:

上の問に解答し,

6月11日(水) 16:40 (時刻は 24 時間制) までに,

全学教育教務係 (センターゾーン 1 号館 2 階) のレポートボックス 42 番に

入れてください. 整理の都合上, 用紙はできるだけ A4 を使ってください (B5 だとなくなっても知らんぞ). また, 2 枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてください.

なお, レポートボックスに入れる際には, ボックスの奥が上になるように (入れるときに普通に読める向きで) 入れて頂けるとありがたいです. また, 学生番号は必ず書いて下さい!!

先週のレポート問題の略解

問 6: まあ, 間違いやすいし, 計算が大変です. とてもこのままでは試験に出せるものではありません. (試験の際にはもっと時間の要らない問題にしますので, ご安心を.) ただ, これは将来, 「量子化学」で出てくるはずですから, そのときのために, 一生に一回くらいは計算してもらいたいと思って出しました.

正攻法: とにかく, 一回微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (*)$$

である. もう一回微分しないといけないけど, 上に出ているいろんな偏微分を先に計算しよう. x, y と r, θ の関係から, 我々は

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta$$

はすぐに計算できる. しかし我々が欲しいのは $\frac{\partial r}{\partial x}$ であり, 先週の講義中に注意したように, $\frac{\partial r}{\partial x}$ は $\frac{\partial x}{\partial r}$ の逆数ではないので注意が必要だ. 上から出すなら, 逆行列の関係を用いて

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix}$$

を得る (別の出し方は後述).

これを用いて上の (*) を見ると

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}, \quad (**)$$

を得る. これをまた x, y で微分したい. 直接微分しても良いし, または形式的に (*) を x で微分して (ここで, $\frac{\partial r}{\partial x}$ などすべてが x, y に依存するので連鎖律を使うべきであること, および「積の微分」になっていることに注意; (偏微分はその直後の項だけにかかる; これを少しでも表現するために, \times を入れた)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial g}{\partial r} \right) \times \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial g}{\partial r} \right) \times \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) \times \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) \times \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right) \times \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right) \times \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \times \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \times \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \quad (***) \end{aligned}$$

を用いてもよい (また, y で 2 階偏微分したものは, 上で x を y に変えれば良い). 正直, この (***) を使うのはそれほど効率が良くないけども, 「これだけたくさんの微分をする必要がある」ことを示すには適していると思ったので書いてみた.

計算が大変で死にそうだが, ともかく頑張つて (**) や (***) に具体的な偏微分を放り込んでいくと (偏微分はその直後の項だけにかかる)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left[\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \cos \theta + \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta} \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) \right] \cos \theta + \frac{\partial g}{\partial r} \left[\frac{\partial \cos \theta}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) \right] \\ &+ \left[\frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta} \cos \theta + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) \right] \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) + \frac{\partial g}{\partial \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) \times \cos \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) \times \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) \right] \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{\sin 2\theta}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\sin 2\theta}{r^2} \frac{\partial g}{\partial \theta} \end{aligned}$$

を得る.

同様に (似たようで似てない計算なのでいよいよ嫌になってくるのだが) y で微分したものを同様にやると,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin^2 \theta \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{\sin 2\theta}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin 2\theta}{r^2} \frac{\partial g}{\partial \theta}$$

となる.

この二つを足すと, いくつかの項は奇跡的に消えて, 最終結果が

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}$$

と求められる.

答えをある程度知ってやるズルい方法

上で何が大変だったかという点, まず, $\frac{\partial r}{\partial x}$ などが求めにくいこと, 更に一階微分の表式のなかに $\cos \theta$ と $\frac{\partial g}{\partial r}$ の積などがでてきて, この両方をまた x で微分しないとイケない (積の微分で項数が増える) こと, などがあつた. どうせ答えには g の 2 階微分が出てくるはずだから, $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ などを x, y の微分で表して, その結果をうまく足し引きして結果を出してみることも可能かもしれない. ともかくやってみると

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

が得られる。これを r でもう一回微分したいのだが、幸いなことに、 θ は r と独立なので微分してもゼロ、つまり (ここでも積の微分があるのだが、実質的にはうしろの $\frac{\partial f}{\partial x}$ などだけを微分すれば良い)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \cos \theta \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right] + \sin \theta \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial r} \right] = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \sin 2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

となる。同様に

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

より (今度は積の微分をやらんといかんけど)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} &= -r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} - r \sin \theta \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right] + r \cos \theta \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \theta} \right] \\ &= -r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} + r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - r^2 \sin 2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

を得る。これを r^2 で割ったものを先に得たものと足して、

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{r} \left[\cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \right]$$

となる。ところが、この最後の項は上で既に求めた $\frac{\partial g}{\partial r}$ を r で割ったものである。よって、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \left[\cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \right] = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}$$

となるのである。まあ、こちらも計算は大変だけど、「正攻法」よりは少し楽である。とはいえ、これはある程度答えを知っていないとできない。あまりこのような効率的な解法にこだわる必要はない。

[$\frac{\partial r}{\partial x}$ などの別の求め方: 「正攻法」では逆行列の関係を用いて $\frac{\partial r}{\partial x}$ などを求めた。以下のようなやり方もある:
(1) 上の「ズルイ方法」で

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

を得た。ので、これを $\frac{\partial f}{\partial x}$ と $\frac{\partial f}{\partial y}$ についての連立方程式だと思って解くと、 $\frac{\partial f}{\partial x}$ と $\frac{\partial f}{\partial y}$ が一気に求まる。

(2) $\frac{\partial r}{\partial x}$ を求めたいのなら、もう直接、 r を x, y の関数として表せば良い: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。これを x で微分して $\frac{\partial r}{\partial x} = x/\sqrt{x^2 + y^2} = x/r = \cos \theta$ がわかる。 θ の方も、 $\theta = \arctan(y/x)$ と表して微分すれば良い。

更に補足: 半分、答えを知ってから書いている部分もあるのだが、以下のような「かつこいい」議論の仕方もない訳ではない (が、もちろん、今の講義のレベルを超えているので気にしないで良い)。

(1) 最終結果は g の (微分の) 一次式のはずである (定数項はない)。なぜなら、 f を 2 倍にすると、最終結果も 2 倍になるはずだから、 g は丁度 1 次でないといけない。

(2) しかし、最終結果に g そのものは出ないはず; なぜなら、もし f が定数の場合、 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ であるが、 g そのものが残っていると結果がゼロにならない。

(3) 表したい量 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ は 2 階微分で書かれているので、これを g の微分で表しても、最終結果には 2 階微分以下しか出ないはずである。

(4) 以上から、最終結果は g の一階または二階微分で書けるはずで

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = A \frac{\partial g}{\partial r} + B \frac{\partial g}{\partial \theta} + C \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + D \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta} + E \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

の形のはずだ (係数 $A \sim E$ は r, θ の関数かもしれないが)。

(5) でも、「 x, y 平面での回転対称性」に着目すると、上の B と D はゼロであるべきである (詳細は略)。

(6) 残った係数 A, C, E を決めないといけないけども、これは例えば、 $f = x^2 + y^2 = r^2$, $f = r^4$, $f = x^2 = r^2 \cos^2 \theta$ などの具体例を 3 個以上、上の式にぶち込んで計算すれば決まる。(こうすればややこしい計算はほとんど無しでもできる.)

問 7: こちらは計算だけですな.

(1) テイラー展開の公式を用いる. そのためには 2 階微分までを計算する必要があるのだから、やってみる.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3}(1+2x+y)^{-2/3} \times 2 = \frac{2}{3}(1+2x+y)^{-2/3}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3}(1+2x+y)^{-2/3}$$

かつ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\frac{4}{9}(1+2x+y)^{-5/3} \times 2 = -\frac{8}{9}(1+2x+y)^{-5/3}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -\frac{4}{9}(1+2x+y)^{-5/3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2}{9}(1+2x+y)^{-5/3} \end{aligned}$$

ということで、これらの原点での値は

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{8}{9}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{4}{9}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2}{9}$$

従って、テイラー展開の結果は

$$f(x, y) \approx 1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{9}xy - \frac{1}{9}y^2 = 1 + \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y\right) - \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y\right)^2$$

(2) $t = 2x + y$ とおいて、一変数関数 $(1+t)^{1/3}$ のテイラー展開を用いると

$$f \approx 1 + \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}t^2 = 1 + \frac{2x+y}{3} - \frac{(2x+y)^2}{9}$$

となって、もちろん、(1) と一致する.

授業で言い忘れました: 今回のレポートは 50 点満点 (問 6 が 30 点, 問 7 が 20 点) で採点しました.

6月13日：今日は極値問題の続きなどです。

来週、6月20日に中間試験を行います。別の部屋(2306号室)で試験をします。要注意!

範囲はやったところ全部、ですが、もちろん、「時間内に出来そうな問題」にするように配慮します。例えば、連鎖律のレポート問題は大変すぎますし、今回の極値問題も候補点が多すぎてちょっと大変ですから、もう少し楽なのになります。

主なテーマをまとめると：

- 1変数関数のテイラー展開
- 偏微分, 定義と計算, (方向微分 — 定義は与える)
- 高階の偏微分
- 連鎖律
- 2変数関数の極値問題

などです。

先週のレポート問題の略解

問8：手順通り、やりましょう。

f の場合、まず極値点の候補は

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = y(3x^2 + y^2 - 1) \quad 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = x(x^2 + 3y^2 - 1)$$

の解である。これは両方とも (A と B の積がゼロ) の形だから $A = 0$ または $B = 0$ が連立されることになる。4通りに分けて (最適ではないが) 地道にやってみると、

Case 1. $y = 0$ かつ $x = 0$ の時は、 $(x, y) = (0, 0)$.

Case 2. $y = 0$ かつ $x^2 + 3y^2 - 1 = 0$ の場合は、 $(x, y) = \pm(1, 0)$.

Case 3. $x = 0$ かつ $3x^2 + y^2 - 1 = 0$ の場合は、 $(x, y) = \pm(0, 1)$.

Case 4. $x^2 + 3y^2 - 1 = 0$ かつ $3x^2 + y^2 - 1 = 0$ の場合はちょっと厄介だが、まず辺々引いて $x^2 - y^2 = 0$ から $x = \pm y$ を得て、これを元の式に代入すると $(x, y) = \pm(1/2, 1/2)$ と $(x, y) = \pm(1/2, -1/2)$ が出る。

それで次に、これらの点のそれぞれでヘシアンを計算する。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3(x^2 + y^2) - 1$$

なので

$$H(x, y) = 36x^2y^2 - \{3(x^2 + y^2) - 1\}^2$$

である。これに上の4つの場合を順次代入すると

Case 1. $H(0, 0) = -1 < 0$

Case 2. $H(\pm 1, 0) = -4 < 0$.

Case 3. $H(0, \pm 1) = -4 < 0$.

Case 4. 複合は任意で $H(\pm 1/2, \pm 1/2) = 9/4 - 1/4 = 2 > 0$

となるので、Case 4 のみが極値点、それ以外は極値点ではない(鞍点)とわかる。

最後に、Case 4 のそれぞれが極大か極小かについては、 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ の符号を見て判定すると (ここでは複合は同順)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pm 1/2, \pm 1/2) = 3/2 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pm 1/2, \mp 1/2) = -3/2 < 0$$

であるから、(以下も複合同順で)

$$(\pm 1/2, \pm 1/2) \text{ では極小で, } f \text{ の値は } -\frac{1}{8}$$

$(\pm 1/2, \mp 1/2)$ では極大で, f の値は $\frac{1}{8}$

とわかる.

g も同様にやります. 極値点の候補は

$$0 = \frac{\partial g}{\partial x} = (1 - 2x^2) y e^{-x^2 - y^2} \quad 0 = \frac{\partial g}{\partial y} = (1 - 2y^2) x e^{-x^2 - y^2}$$

の解であり, またもや「積がゼロ」の形なので, 場合分けする (指数関数はゼロでないので).

Case 1. $y = 0$ かつ $x = 0$ の時は, $(x, y) = (0, 0)$.

Case 2. $y = 0$ かつ $1 - 2y^2 = 0$ は無理.

Case 3. $x = 0$ かつ $1 - 2x^2 = 0$ は無理.

Case 4. $1 - 2x^2 = 0$ かつ $1 - 2y^2 = 0$ の場合は複合任意で $(x, y) = (\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$.

それで次に, これらの点のそれぞれでヘシアンを計算する.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2xy(-3 + 2x^2) e^{-x^2 - y^2}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2xy(-3 + 2y^2) e^{-x^2 - y^2},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = (-1 + 2x^2)(-1 + 2y^2) e^{-x^2 - y^2}$$

であるが, このままでヘシアンを計算すると式が無茶苦茶ややこしくなるので, 具体的な値を入れてから計算するのが良いだろう.

これに上の 2 つの場合を順次代入すると極値点の候補では

Case 1. $(0, 0)$ では

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 1$$

なので $H(0, 0) = -1 < 0$. つまり, ここは鞍点で極値点ではない.

Case 4. 複合同順で $(x, y) = (\pm 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ の場合には

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -2e^{-1}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 0$$

なので $H(0, 0) = 4e^{-2} > 0$. さらに, 二階微分が負なので, ここで極大である.

一方, $(x, y) = (\pm 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ の場合には

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2e^{-1}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 0$$

なので $H(0, 0) = 4e^{-2} > 0$. さらに, 二階微分が正なので, ここで極小である.

まとめると, $(x, y) = (\pm 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ の場合に極大で, g の値は $1/(2e)$.

$(x, y) = (\pm 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ の場合に極小で, g の値は $-1/(2e)$.

7月4日：今日は「重積分を累次積分（逐次積分）で行う方法」について（および、時間があれば「変数変換」について）、です。

- 来週の7/11はまたもや、原がどうしても出席すべき会議があるので、廣島先生（4月と同じ）に代講をお願いしました。
- 先週、中間試験を返却しましたが、その素点がそのまま、成績に反映される訳ではありません。今回、採点が少し厳しめになった部分もあるので、ある程度のかさ上げは行います。（詳細は学期はじめにいった通り。）
- 学期の始めに宣言した通り、期末試験の範囲は原則、今学期やったところ全部（特に偏微分なども十分に範囲）です。

レポート問題： 重積分の計算練習です。

問9： 重積分 $\iint_D f(x,y)dx dy$ を、次のような函数 $f(x,y)$ と長方形領域 D に対して求めよ。その際、領域 D も図示する事。

(1) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $D = [2, 4] \times [1, 2]$

(2) $f(x,y) = xy^2$, $D = [1, 2] \times [0, 1]$

(3) $f(x,y) = \frac{y}{1+xy}$, $D = [0, 2] \times [0, 1]$

問10： 重積分 $\iint_D f(x,y)dx dy$ を、次のような函数 $f(x,y)$ と縦線（横線）領域 D に対して求めよ。その際、領域 D も図示する事。

(1) $f(x,y) = xy^2$. D は、 $x + 2y \leq 2$ かつ $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ なる領域

(2) $f(x,y) = x^2y$. D は、 $x^2 \leq y \leq 2x + 3$ なる領域

(3) $f(x,y) = x^2 + y^2$. D は、 $|x| + |y| \leq 3$ なる領域

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ、わかりにくかったところ、講義への要望などがあれば自由に書いてください。また、質問があれば、それもどうぞ。この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから、次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります。

レポート提出について：

上の問に解答し、

7月9日（水）16:40（時刻は24時間制）までに、
全学教育教務係（センターゾーン1号館2階）のレポートボックス42番に

入れてください。整理の都合上、用紙はできるだけA4を使ってください（B5だとなくなっても知らんぞ）。また、2枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてください。

なお、レポートボックスに入れる際には、ボックスの奥が上になるように（入れるときに普通に読める向きで）入れて頂けるとありがたいです。また、**学生番号は必ず書いて下さい！！**

7月11日：今日は「重積分を累次積分で行う方法」の復習と、「積分の順序交換」「変数変換」について、原が会議のために講義できないので、以前にも御願ひした廣島先生に代講を御願ひしました。

レポート問題：

問 11： 前回のレポート、皆さん大変健闘していましたが、念のため、類題をもう少し出しておきます。

重積分 $\iint_D f(x,y) dx dy$ を、次のような函数 $f(x,y)$ と縦線（横線）領域 D に対して求めよ。その際、領域 D も図示する事。

なお、問題 (2) では f は y のみの函数になっている。

(1) $f(x,y) = x^2 y$. D は、 $0 \leq y \leq 2 - |x|$ なる領域 ($2 - |x|$ の部分、講義で配ったプリントでは訂正済みでしたが、web では訂正していませんでした。7/18 に訂正しました。)

(2) $f(x,y) = y$. D は、 $y^2 + 2y \leq x \leq -2y - 3$ なる領域

問 12： 次の重積分において、 x, y で積分する領域を図示せよ。また、積分の順序を変更せよ。(たとえば「 x で先に積分してから後で y で積分」となっていたら、これを「 y で先に積分してから後で x で積分」の形になおすのが後半部分で要求されていることである。)

函数 f が与えられていないので、もちろん、積分そのものを計算する事はできない。

$$(1) \int_0^3 dx \int_0^{6-2x} dy f(x,y)$$

$$(2) \int_{-3}^{-1} dy \int_{y^2+2y}^{-2y-3} dx f(x,y)$$

$$(3) \int_{-3}^{-1} dy \int_{-y}^{\sqrt{-4y-3}} dx f(x,y)$$

なお、上の問の答えは一つの重積分にまとめられない可能性もあるのでご注意。

問 13： (これは教科書の p.129, 問 5)

D を以下の 2 条件で与えられた領域とする：

$$0 \leq x + y \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{かつ} \quad 0 \leq x - y \leq 1$$

このとき、 D を図示し、さらに以下の重積分を $u = x + y, w = x - y$ と変数変換して求めよ：

$$\iint_D e^{x-y} \sin(x+y) dx dy$$

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ、わかりにくかったところ、講義への要望などがあれば自由に書いてください。また、質問があれば、それもどうぞ。この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから、次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります。

レポート提出について：

上の問に解答し、

7月16日(水) 16:40 (時刻は 24 時間制) までに、

全学教育教務係 (センターゾーン 1 号館 2 階) のレポートボックス 42 番に

入れてください。整理の都合上、用紙はできるだけ A4 を使ってください (B5 だとなくなっても知らんぞ)。また、2 枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてください。

なお、レポートボックスに入れる際には、ボックスの奥が上になるように (入れるときに普通に読める向きで) 入れて頂けるとありがたいです。また、**学生番号は必ず書いて下さい !!**

先週のレポート問題の略解

全体的な講評:

- みなさん, (先週, わざと説明を少なくして「考えてください」と行ったことを受けて) 健闘していました.
- ただ, 中には考えたけどわからなかった人もいたようです. 類題をもう一回, 出しておいたので, リベンジしてください.
- 少数ではありますが, 積分領域が間違っている (類似積分に正しく直ってない) 人がいました. (特に三角形で積分すべきなのに, 長方形になってしまってる, など). これは致命的ですから注意してくださいね.
- 積分を間違った人は割合多かった. 受験を思い出して, 頑張ろう.

問 9: 長方形領域の図は流石に略しても良いでしょうから (図を描くのも面倒くさいし) 略.

(1)

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_2^4 dx \int_1^2 dy (x^2 + y^2) = \int_2^4 dx (x^2 + \frac{7}{3}) = \frac{64-8}{3} + \frac{7}{3} \times 2 = \frac{70}{3}$$

(2)

$$\int_1^2 dx \int_0^1 dy xy^2 = \int_1^2 dx \frac{1}{3} x = \frac{1}{3} \times \frac{4-1}{2} = \frac{1}{2}$$

(3) この問題は先に x で積分した方が少し楽.

$$\int_0^1 dy \int_0^2 dx \frac{y}{1+xy} = \int_0^1 dy \{ \log(1+2y) - \log(1) \} = \int_0^1 dy \log(1+2y) = \frac{1}{2} \int_1^3 ds \log(s) = \frac{3 \log 3 - 2}{2}$$

敢えて y から積分すると以下ようになる (講義でやってない「広義積分」の知識が必要なので, わからなくても良い; あくまで参考である). まず, 積分を虚心坦懐に書き下すと

$$\int_0^2 dx \int_0^1 dy \frac{y}{1+xy} = \int_0^2 dx \left(\frac{1}{x} - \frac{\log x}{x^2} \right) = \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right) \log(1+x) \right]_0^2$$

となる. ここで積分の下限のゼロについては (この講義ではちゃんとやってないのだが) ゼロに上から近づける極限として考える必要がある. つまりうえの積分は

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right) \log(1+2) - \lim_{x \rightarrow +0} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right) \log(1+x) \right] = \frac{3}{2} \log 3 - \lim_{x \rightarrow +0} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right) \log(1+x) \right]$$

ということ. 更にこの極限が不定形で困るのだが, これは既に習った「テイラー展開」を用いればできる. つまり $|x|$ が小さいとき

$$\log(1+x) = x + O(x^2)$$

だったので,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right) \log(1+x) \right] = \lim_{x \rightarrow +0} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right) \{x + O(x^2)\} \right] = \lim_{x \rightarrow +0} \left[1 + O(x) \right] = 1.$$

なので最終的な積分の値は

$$\frac{3}{2} \log 3 - 1$$

でももちろん, これはさっきの答えと同じ.

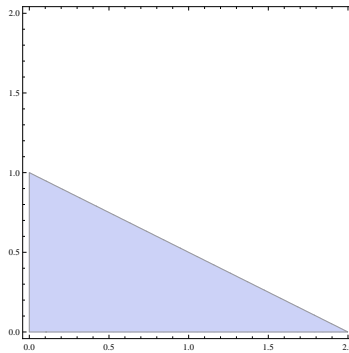
問 10: (1) これを縦線図形と見るなら, x の範囲は $0 \leq x \leq 2$ であり, y の範囲は $0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}$ である. 従って求める積分は

$$\begin{aligned} \int_0^2 dx \int_0^{1-x/2} dy (xy^2) &= \int_0^2 \left(x \frac{(1-x/2)^3}{3} \right) = \frac{1}{24} \int_0^2 dx x(2-x)^3 = \frac{1}{24} \int_0^2 ds (2-s)s^3 \\ &= \frac{1}{24} \left(\frac{2 \times 16}{4} - \frac{32}{5} \right) = \frac{1}{24} \left(8 - \frac{32}{5} \right) = \frac{1}{24} \times \frac{8}{5} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

横線図形として見てみると, y の範囲は $0 \leq y \leq 1$, x の範囲は $0 \leq x \leq 2 - 2y$ なので, 求める積分は

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_0^{2-2y} dx (xy^2) &= \int_0^1 \left(y^2 \frac{(2-2y)^2}{2} \right) = 2 \int_0^1 dy y^2 (1-y)^2 \\ &= 2 \int_0^1 dy (y^2 - 2y^3 + y^4) = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} \right) = 2 \times \frac{10 - 15 + 6}{30} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

もちろん, この二つは等しい.



(2) 図は下左の 2 曲線で囲まれた部分で, そこだけ取り出すと右のようになる. これは縦線図形と見るのが自然だろう. その場合, x の範囲は $-1 \leq x \leq 3$, y の範囲は $x^2 \leq y \leq 2x + 3$ となっている. 従って, 求める積分は

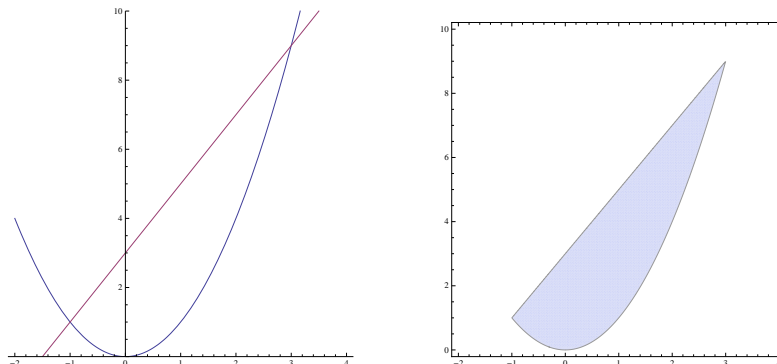
$$\int_{-1}^3 dx \int_{x^2}^{2x+3} dy x^2 y = \int_{-1}^3 dx x^2 \frac{(2x+3)^2 - x^4}{2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^3 dx (9x^2 + 12x^3 + 4x^4 - x^6) = \frac{3616}{35}$$

すいません, ちょっと数値計算が大変でしたね. (試験はこうならないようにします.)

なお, 横線図形と見るなら, 積分を $y = 1$ を境にして分けてやる必要はある:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 y + \int_1^9 dy \int_{(y-3)/2}^{\sqrt{y}} x^2 y = \int_0^1 dy \frac{2y^{5/2}}{3} + \int_1^9 dy \left(-\frac{1}{24} y(y-3)^3 + \frac{y^{3/2}}{3} \right) = \frac{4}{21} + \frac{10828}{105} = \frac{3616}{35}$$

いよいよ計算は大変だった. しつこいけど, こんな大変な (数値) 計算は期末では出さないよ.



(3) 図は下のとおり. まず, D は x, y それぞれ軸対称なので, $x, y \geq 0$ のところを考えると, 4 倍すればよい (そうすると, 積分範囲の下限が 0 になったりして, 少し楽になる). 4 倍されるべきものは

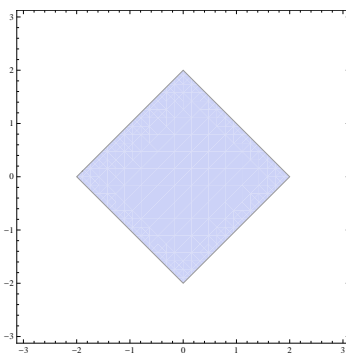
$$\begin{aligned} \int_0^3 dx \int_0^{3-x} dy (x^2 + y^2) &= \int_0^3 dx \left(x^2(3-x) + \frac{(3-x)^3}{3} \right) = \int_0^3 dx (9 - 9x + 6x^2 - 4x^3/3) \\ &= 27 - \frac{81}{2} + \frac{6 \times 27}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{81}{4} = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

よって求める積分は 54.

実はこの問題, x, y について対称なので, 上の積分の x^2 のやつだけ考えて 8 倍してもよい (こっちの方が簡単やね). その場合の積分は

$$\int_0^3 dx \int_0^{3-x} dy x^2 = \int_0^3 dx x^2(3-x) = \int_0^3 dx (3x^2 - x^3) = \frac{3 \times 27}{3} - \frac{81}{4} = \frac{81}{12} = \frac{27}{4}$$

と簡単に求まるので, この 8 倍 (= 54) が答え.



7月18日：今日は重積分のまとめ？

期末試験について：

- 日時、場所は教務課の掲示通りにやります。
- 範囲は今学期やったところ全部（ただし、これからやるかもしれない「微分方程式」は除外）です。主なものは
 - － 1変数関数と多変数のテイラー展開
 - － 偏微分（定義と計算，高階の偏微分，連鎖律）
 - － 2変数関数の極値問題
 - － 重積分の計算（類似積分，順序交換，変数変換）
- 「再調査」をやる可能性があるので，教務課の掲示や僕の web page の掲示に注意しててください。ただし，どうもネットの調子が悪くて，web にうまく情報を載せられない場合がありますので，僕の web page に再調査について何も書いてない場合は，教務課の掲示を確認してください。なお，再調査では持ち込みを認めない可能性があります。掲示に注意してください。
- なお，先々週（？）に宣言した通り，期末試験の問題がたまたま易しくなりすぎた場合には，「中間が良くないけど期末が非常に良い人」には A を上げられない可能性があります。この点，最初の方針の「期末で一発逆転」とは異なりますが，A だけの問題なのでご理解ください（先々週には特に反対はなかったもので，よろしいですね？）

期末試験では「A4の紙一枚（片面だけに書いたもの；原則として手書き）」の持ち込みを認めます。学生番号と氏名を書いて，試験当日，答案とともに提出して下さい。「自分は持ち込み無しで受ける」という人は，学生番号と名前を書いた「A4の紙」を提出して下さい。

(補足説明)

- 原則として，持ち込み用紙は採点しません。ただし，(以下の方針から判断して) 非常に良いものを作った場合には，ホンの少しだけ良いことがあるかもしれません。
- 持ち込みを認める理由：ある程度の分量の概念（半年にしては多い）が出て来たため，持ち込み用紙を自分で書いて，全体を整理する手助けとしてもらいたい，というのが最大の狙いです。
- 「持ち込み用紙を自分で準備することを通して勉強する」ことが最大の狙いですから，皆さんには，自分で持ち込み用紙を準備する事を奨めます。友達と協力して持ち込み用紙を作成した場合は，「〇〇さんと一緒に作りました」と明記して下さい。このような明記がないのに，非常によく似たものが複数現れた場合には，それなりの措置を講じるかもしれません。
- まちがっても，試験対策委員の作成したものを多数の人間が持ち込む，などはやらないでくださいね。しつこいけども，自分で勉強してまとめる，のが最大の目的です。試験対策委員の作ったものを持ち込んでも何の役にも立ちません。(自分でまとめが作れない人は，その程度の実力だということです。その時点で諦めるか，死にものぐるいで勉強するかはわかりません。)
- 例題とその解答を延々と書く事はルール違反ではないけども，勉強にならないので，お勧めしません。(書くなら，要点だけを書くのが良い。) あまりに酷い場合には減点する可能性があります。
- なお，このように持ち込み用紙は提出してもらうので，提出前にコピーを取っておく方が無難です — 持ち込み用紙も答案と一緒に返却の予定ですが，返却までのタイムラグがありますから（特に再調査までに勉強し直したい人）。

言わずもがなの注意：持ち込みを認めるのは，半年にしてはそこそこの分量をやったからです。決して「持ち込みだから楽勝」などと思わないでください。

レポート問題：変数変換の練習 (その 2) です。

問 14：与えられた領域 D と $f(x, y)$ に対して, 重積分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ を計算せよ. それぞれ, 括弧の中に掲げたような変数変換を行うのが良いだろう. なお, (2) では, a は正の定数である.

- (1) $f(x, y) = x^2 + y^2$. D は $2 \leq x^2 + y^2 \leq 5$ を満たす (x, y) の全体. (極座標に変換)
 (2) $f(x, y) = y$. D は $x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq a$ をみたす (x, y) の全体. ($x = u^2, y = w^2$ と変換)
 (3) 上の (2) と同じ問題を, 今度は $x = r(\cos \theta)^4, y = r(\sin \theta)^4$ と変換して解いてみよう.

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ, わかりにくかったところ, 講義への要望などがあれば自由に書いてください. また, 質問があれば, それもどうぞ. この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから, 次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります.

レポート提出について：

上の問に解答し,

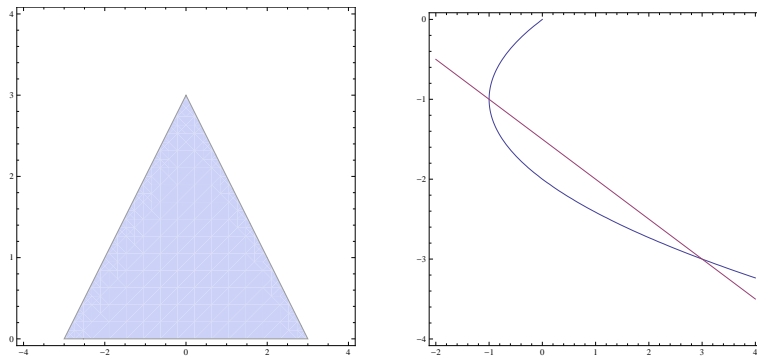
7月23日(水) 16:40 (時刻は24時間制) までに,
 全学教育教務係 (センターゾーン1号館2階) のレポートボックス 42 番に

入れてください. 整理の都合上, 用紙はできるだけ A4 を使ってください (B5 だとなくなっても知らんぞ). また, 2 枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてください.

なお, レポートボックスに入れる際には, ボックスの奥が上になるように (入れるときに普通に読める向きで) 入れて頂けるとありがたいです. また, **学生番号は必ず書いて下さい!!**

-----先週のレポート問題の略解-----

問 11：図は下, 左から (1), (2) の順で, (2) については曲線で囲まれた部分をさす (塗りつぶすのがしんどい).



(1) $x \geq 0$ の部分を 2 倍しよう. $x \geq 0$ のところは

$$\begin{aligned} \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy x^2 y &= \frac{1}{2} \int_0^2 dx x^2 (2-x)^2 = \frac{1}{2} \int_0^2 dx (4x^2 - 4x^3 + x^4) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \times 2^3 - \frac{4}{4} \times 2^4 + \frac{2^5}{5} \right) \\ &= \frac{2^5}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = 16 \times \frac{10 - 15 + 6}{30} = \frac{16}{30} \end{aligned}$$

なので, 積分の値はこの 2 倍で $\frac{16}{15}$.

(2)

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{-1} dy \int_{y^2+2y}^{-2y-3} dx y &= \int_{-3}^{-1} dy y \{ (-2y-3) - (y^2+2y) \} = \int_{-3}^{-1} dy (-y^3 - 4y^2 - 3y) \\ &= -\frac{1-81}{4} - \frac{4}{3}(-1+27) - \frac{3}{2}(1-9) = \left(-(1-16) - 4 \times \frac{1+8}{3} + 8 \times \frac{1-4}{2} \right) = -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

大きな注意：非常に多くの方が、正しくマイナスを出しながら、答えをプラスに直していました。被積分関数が負なら、重積分の値も負です。これは重積分の説明のときにはちゃんと言ったつもりですが、「体積」と言い過ぎたので混乱したのかもしれない。だけど、1次元の積分 $\int_a^b f(x)dx$ でも ($a < b$)、 $f(x)$ が負なら、積分の値は負ですよ。重積分も同じです。

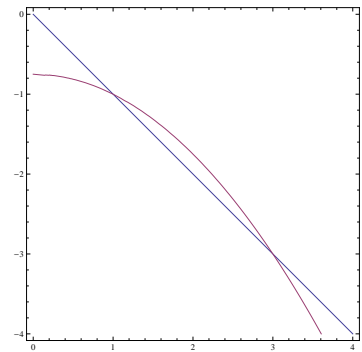
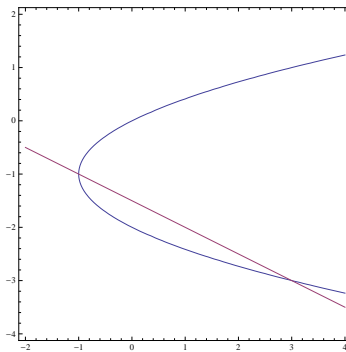
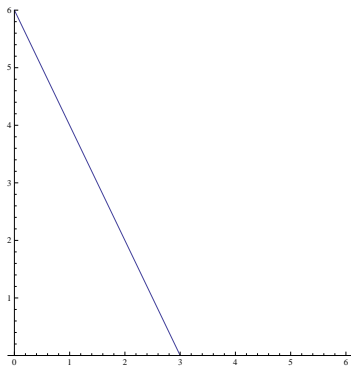
もう一つ、補足

授業ではあまり強調しませんでした。その定義から、重積分では積分の「向き」はありません。何のことかという、一次元の積分では $a < b$ のとき、まず、区分求積のような形で $\int_a^b f(x)dx$ を定義し、その後で

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

と定義しました。しかし、2次元以上の積分領域では「右から左」とか「左から右」は定義できません。なので、重積分においては、「積分領域の向きをかえて積分の符号を変える」ことは行いません。つまり、一次元との対比でいえば、 $a < b$ の場合の $\int_a^b f(x)dx$ に相当するもののみを考えます。

問 12： 図は下の通り (囲まれた部分) — (1) は三角形ね。



図がちゃんと書ければ、答えはすぐに出るでしょう？

(1)

$$\int_0^6 dy \int_0^{3-y/2} dx f(x, y)$$

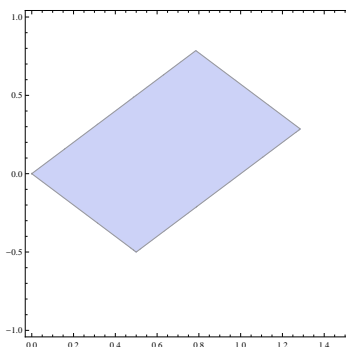
(2)

$$\int_{-1}^3 dx \int_{-1-\sqrt{1+x}}^{-(x+3)/2} dy f(x, y)$$

(3)

$$\int_1^3 dx \int_{-x}^{-(x^2+3)/4} dy f(x, y)$$

問 13： 教科書の問題だが、とにかくやってみよう。x, y での積分範囲はしたのような感じ。



u, w の定義から, その範囲はモロに

$$0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq w \leq 1$$

である (長方形; 簡単やね). また, x, y を u, w で表して

$$x = \frac{u+w}{2}, \quad y = \frac{u-w}{2}$$

であることから, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, w)} = \det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

である. 従って求める積分は

$$\int_0^1 dw \int_0^{\pi/2} du \frac{1}{2} e^w \sin(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 dw e^w \times \int_0^{\pi/2} du \sin(u) = \frac{1}{2} (e-1) 1 = \frac{e-1}{2}.$$

7月25日：今日は主に常微分方程式についてです。常微分方程式は期末試験の範囲には入りません。期末試験について（前回の宣言と同じ）：

- 日時、場所は教務課の掲示通りにやります。
- 範囲は今学期やったところ全部（ただし、これからやる「微分方程式」は除外）です。主なものは
 - － 1変数関数と多変数関数のテイラー展開
 - － 偏微分（定義と計算、高階の偏微分、連鎖律）
 - － 2変数関数の極値問題
 - － 重積分の計算（類似積分、順序交換、変数変換）
- 「再調査」をやる可能性があるのですが、教務課の掲示や僕の web page の掲示に注意してください。ただし、どうもネットの調子が悪くて、web にうまく情報を載せられない場合がありますので、僕の web page に再調査について何も書いてない場合は、教務課の掲示を確認してください。なお、再調査では持ち込みを認めない可能性があります。掲示に注意してください。
- なお、これまでに宣言した通り、**期末試験の問題がたまたま易しくなりすぎた場合**には、「中間が良くないけど期末が非常に良い人」には A を上げられない可能性があります。この点、最初の方針の「期末で一発逆転」とは異なりますが、A だけの問題なのでご理解ください。

期末試験では「A4の紙一枚（片面だけに書いたもの；原則として手書き）」の持ち込みを認めます。学生番号と氏名を書いて、試験当日、答案とともに提出して下さい。「自分は持ち込み無しで受ける」という人は、学生番号と名前を書いた「A4の紙」を提出して下さい。

（補足説明）

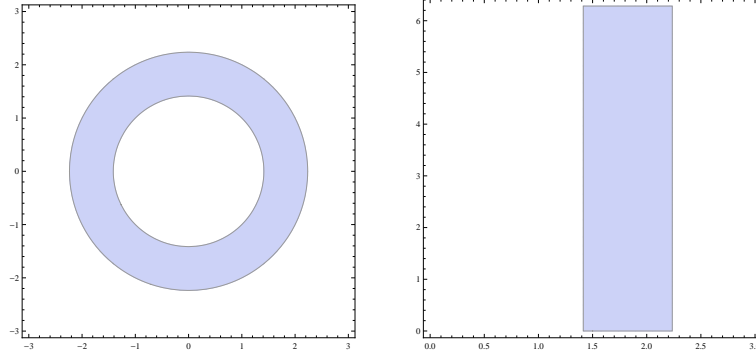
- 原則として、持ち込み用紙は採点しません。ただし、（以下の方針から判断して）非常に良いものを作った場合には、ホンの少しだけ良いことがあるかもしれません。
- 持ち込みを認める理由：ある程度の分量の概念（半年にしては多い）が出て来たため、**持ち込み用紙を自分で書いて、全体を整理する手助けとしてもらいたい**、というのが最大の狙いです。
- 「持ち込み用紙を自分で準備することを通して勉強する」ことが最大の狙いですから、皆さんには、自分で持ち込み用紙を準備する事を奨めます。友達と協力して持ち込み用紙を作成した場合は、「**〇〇さんと一緒に作りました**」と明記して下さい。このような明記がないのに、非常によく似たものが複数現れた場合には、それなりの措置を講じるかもしれません。
- まちがっても、試験対策委員の作成したものを多数の人間が持ち込む、などはやらないでくださいね。しつこいけども、自分で勉強してまとめる、のが最大の目的です。試験対策委員の作ったものを持ち込んでも何の役にも立ちません。（自分でまとめが作れない人は、その程度の実力だということです。その時点で諦めるか、死にものぐるいで勉強するかしかないでしょう。）
- 例題とその解答を延々と書く事はルール違反ではないけども、勉強にならないので、お勧めしません。（書くなら、要点だけを書くのが良い。）あまりに酷い場合には減点する可能性があります。
- なお、このように持ち込み用紙は提出してもらうので、提出前にコピーを取っておく方が無難です — 持ち込み用紙も答案と一緒に返却の予定ですが、返却までのタイムラグがありますから（特に再調査までに勉強し直したい人）。

言わずもがなの注意：持ち込みを認めるのは、半年にしてはそこそこの分量をやったからです。決して「持ち込みだから楽勝」などと思わないでください。

先週のレポート問題の略解

問 14 :

(1)



積分領域は円環状になっている (上図の左; 内円の半径は $\sqrt{2}$, 外円の半径は $\sqrt{5}$). 極座標

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

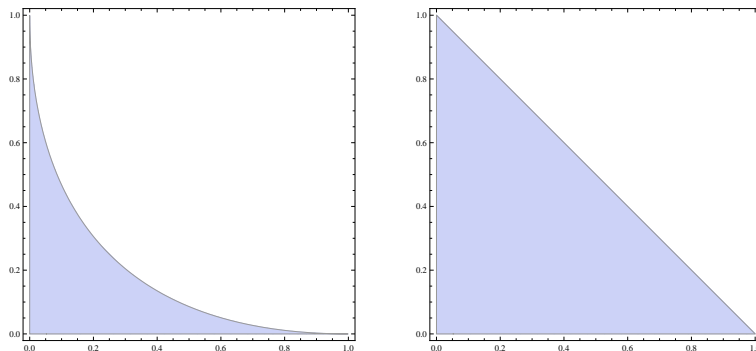
を用いると, (領域は円環を一周するので)

$$\sqrt{2} \leq r \leq \sqrt{5}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

が積分領域になる (上図の右). また, ヤコビアンは r である. さらに極座標では $x^2 + y^2 = r^2$ と, 簡単である. 従って求める積分は

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} dr \int_0^{2\pi} d\theta r r^2 = 2\pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} dr r^3 = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = 2\pi \times \frac{25 - 4}{4} = \frac{21}{2}\pi$$

(2)



積分領域は上図の左 (ただし $a = 1$ の場合を描いた). 問題はこいつを u, w で表した時の, u, w の範囲である. ここはそれほど強調しなかったが, この場合, **もとの x, y と u, w が一対一対応になっている必要がある** — なぜなら, もしそういうことを要求していなかったら, もとの x, y での積分領域を何回でも sweep する殊になってしまうから. なので, ここは $x = u^2$ と言ったけども, これを解く際には $u = \sqrt{x}$ または $u = -\sqrt{x}$ のどちらか一方だけを使う必要がある (両方入れてしまうと, 一つの x に二つの u が対応するから). $y = w^2$ も同様である. なので, $x = u^2, y = w^2$ というのは,

$$u = \sqrt{x}, \quad w = \sqrt{y}$$

と読まなければならない (もちろん, $u = \sqrt{x}, w = -\sqrt{y}$ などとしてもよいが, 式がややこしくなるだけで結果は同じだ). この取り方を採用すれば, 積分領域は直ちに

$$0 \leq u, \quad 0 \leq w, \quad u + w \leq a$$

とわかる (上図の右, 三角形). また, ヤコビアンは

$$\det \begin{bmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 2w \end{bmatrix} = 4uw$$

である. 従って, 問題の積分は

$$\begin{aligned} \iint_D y \, dx dy &= \int_0^a du \int_0^{a-u} dw 4uw w^2 = 4 \int_0^a du u \int_0^{a-u} dw w^3 = 4 \int_0^a du u \frac{(a-u)^4}{4} \\ &= \int_0^a du u (a-u)^4 = \int_0^a du u^4 (a-u) = a \int_0^a du u^4 - \int_0^a du u^5 = a \times \frac{a^5}{5} - \frac{a^6}{6} = \frac{a^6}{30}. \end{aligned}$$

(実のところ, この積分は u から先にやった方が少しは楽である.)

(3) さて今度は $x = r \cos^4 \theta$, $y = r \sin^4 \theta$ である. 今回も x, y と r, θ の**一対一対応**に注意して, 積分領域を決めるべきである. 通常の極座標と異なり, \cos も \sin も 4 乗されてるから, これらの周期は $\pi/2$ である (つまり, $\theta \in [0, \pi/2]$ と $\theta \in [\pi/2, \pi]$ は同じところを表してしまう). 従って, θ の範囲は $\theta \in [0, \pi/2]$ などと制限して考える必要がある. (もちろん, r の正負も余分だから, $r \geq 0$ のみを考える.)

これに注意すると, 元の積分領域の条件のうち, $x \geq 0, y \geq 0$ は自動的に満たされ, 残るのは

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq a \iff \sqrt{r} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \leq a \iff r \leq a^2$$

の条件である. つまり, 積分領域は

$$0 \leq r \leq a^2, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

となる (今回は積分領域は四角形で簡単).

さらにヤコビアンは

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial r, \theta} = \det \begin{bmatrix} \cos^4 \theta & -4r \cos^3 \theta \sin \theta \\ \sin^4 \theta & 4r \sin^3 \theta \cos \theta \end{bmatrix} = 4r \cos^3 \theta \sin^3 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 4r \cos^3 \theta \sin^3 \theta$$

なので, 求める積分は

$$\iint_D y \, dx dy = \int_0^{a^2} dr \int_0^{\pi/2} d\theta 4r \cos^3 \theta \sin^3 \theta r \sin^4 \theta = 4 \int_0^{a^2} dr r^2 \int_0^{\pi/2} d\theta (\cos \theta)^3 (\sin \theta)^7$$

r の積分は簡単にできて $a^6/3$ を出す. 問題は θ の積分だが, 例えば単純に $t = \sin \theta$ とおいて

$$\int_0^{\pi/2} d\theta (\cos \theta)^3 (\sin \theta)^7 = \int_0^{\pi/2} d\theta \cos \theta (1 - \sin^2 \theta) (\sin \theta)^7 = \int_0^1 dt (1 - t^2) t^7 = \frac{1}{8} - \frac{1}{10} = \frac{1}{40}$$

と計算できるので最終結果は

$$\iint_D y \, dx dy = 4 \times \frac{a^6}{3} \times \frac{1}{40} = \frac{a^6}{30}.$$

もちろん, これは (2) と一致する.

注意: 上でも書きましたが, 変数変換をする場合には, **もとの積分領域と変換後の積分領域が一対一になっているようにする必要があります.** 逆に, ここが 1 対 n のようになってるなら, 結果を $1/n$ にしなければなりません. これは変数変換の際に積分領域がどのように変わるかを考えれば納得できるはずのことですが, これまで強調してこなかったので, この機会に強調しておきます.

なお, 1次元の積分では, これは通常, 気にする必要はありません. というのは, 1次元では ($x = x(t)$ と変換した場合) ヤコビアンに相当する $x'(t)$ には絶対値をつけないので, 対応が一対一になっていなくても自動的に余分な部分がキャンセルするからです. 多重積分にはこのような「向き」によるキャンセル効果がないので, 対応が一対一でない場合には, 余分な注意が必要になるのです.