2013.4.15.

線形代数・同演習 A　(S-1 クラス)

担当：原　隆（数理学研究院）：伊都キャンパス数理研究教育棟 219 号室，phone: 092-802-4441,
e-mail: hara@math.kyushu-u.ac.jp,　http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html
Office hours: 暫定的に月曜の午後 6 時〜6 時半頃．僕のオフィスにて（上の時間内に来てくれれば，その後も相手します）．なお講義終了後にも質問を受け付けますし，これ以外でもお互いの都合の良い時間にお相手します．

概要：理学部物理学科の学生さん向けに,「線形代数」を講義する．通年講義なので，１年が終わった時点で

1. 「行列」「逆行列」,「行列式」などの計算ができるようになり，
2. 「固有値と固有ベクトル」「行列の対角化」も使いこなせて，
3. 「線型とは」「線型空間」「一次独立」などの重要な概念も理解する，

の３点ができるようになることを目標とする．
キーになる概念：行列，逆行列，行列の基本変形，線形空間，線形独立，基底と次元，線形写像,（行列式）,（固有値と固有ベクトル）,（行列の対角化）．括弧の中は主に後期の内容．

内容予定：（以下は大体の目安です．皆さんの理解の程度などにより，変更はあり得ます.）

1. ３次元空間のベクトル，平面や直線の表し方，複素数
2. ベクトル（と線形空間），特に「一次独立」「基底」などの概念
3. 行列の演算
4. 連立一次方程式の解法（解法のみ，逆行列の計算などは秋学期に）
5. 線形写像，核空間と像空間，写像の合成

原の他の業務の都合により，7 月に 2 回，休講が入りそうですが，その分はちゃんと補講します.（来週以降，皆さんと補講の相談をします.）休講予定については，日が迫ってきたらお知らせします.

教科書：

- 内田・高木・剱持・浦川「線形代数入門」裳華房

参考書：

- 斉藤正彦「線形代数入門」（東大出版会）．少し難しいだろうが，今でも定番の教科書．物理学科の（特に理論を目指す）人にはこのくらいは理解して欲しい.
- Feynman Lectures on Physics, vol. 3 （邦訳は「ファインマン物理学第５巻」）これは量子力学に関する本だが，僕は線形代数の本質をこの本から学んだ．量子力学の数学的構造はほとんど線形代数だから，これは不思議なことではない．なお，このシリーズは英語で読むことをお勧めする．理由は大人の事情により略.
- これ以外に，講義ノートのようなものを作成し，皆さんがダウンロードできるようにする（講義で配布することもある）．以下の URL（http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html）から，この科目のページをご覧ください（改訂版はいつも作成中.）
- 更に，僕の友達の田崎晴明さんの書きかけの本「数学：物理を学び楽しむために」がお勧めだ．これは彼の web page (`http://www.gakushuin.ac.jp/~881791/mathbook/`) からダウンロードできるので，興味のある人は自分で取ってみてほしい．田崎さんはおもしろい日記も書いているから，そちらもお奨め.

評価方法：主に中間試験（＋レポート）と期末試験の成績を総合して評価する．そのルールは以下の通りだが，優（A）を狙うには特別の関門があるので，後の但し書きを良く読む事.

- 最終成績は一旦，100 点満点に換算してから，この大学の様式に従ってつける.
- その 100 点満点（最終素点）は，以下のように計算する.

  – まず,「中間試験の点」「期末試験の点」をそれぞれ 100 点満点で出す.
  – 次にこの２つを以下の式で「平均」し，一応の総合点を出す：

$$(\text{総合点 } A) = 0.60 \times (\text{中間の点}) + 0.40 \times (\text{期末の点})$$

  – ただし，上の計算式の重みを若干変更する可能性はあることを承知されたい（例えば，総合点 A で，中間と期末の比を 5 : 5 にするなど）.
  – 最終素点は

$$(\text{最終素点}) = \max\{\ (\text{総合点 } A), (\text{期末の点})\ \}$$

  とする．つまり,（総合点 A）と（期末の点）を比べて，良い方をとる のだ.

- 上の「最終素点」をよく見て，必要ならば全体に少し修正（例：全員に下駄をはかせるとか）を加えたものをつくり，これをこの大学の基準と合わせて最終成績を出す.
- レポートは原則としては総合点 A には加えない．しかし，上の計算では合格基準に少し足りない人（百点満点で 10 点不足が限度）を助けるかどうかに使用する．また，チャレンジ問題などでずば抜けた解答をした人にも特例措置を講ずるかもしれない.

（A をとるための重要な但し書き）期末試験ではあまり冒険をする訳にはいかず,（A と B の区別をつけるような）極端に難しい問題は出題しにくい．そのため，中間試験にも A, B の峻別を行う機能をある程度持たせて，中間・期末ともに成績優秀な人にのみ，A をあたえるようにする可能性がある —— 特に，期末を簡単にしすぎた場合はこうなる．この意味で，A をとるためには期末だけでの一発逆転は無理かも知れない．A を狙って頑張る人はこの点を考慮して，中間・期末とも確実に受験してほしい.

（期末一発逆転を可能にする理由）この講義では（上位 10%の人だけがわかるような）進んだ話題はあまり扱わない．そのため,「できる」人が退屈することも考えられる．そのような人には自主的な学習を奨める意味で,「期末で一発逆転」も可能なようにした．ただし,「期末の一発勝負」がうまくいく人は少ないだろう（期末試験は中間試験やレポートよりは難しい）から，**あくまで自己責任で**やってくれ．期末の一発勝負で成績が悪くても，苦情は一切受け付けないからね！(この形式をとるのは，僕の美学にこだわっているからである.)

「学習到達度再調査」（？）について：

この大学には「学習到達度再調査」なる変な制度があるらしい．これに変に期待する人がいるかもしれないので，ここではっきり宣言しておこう.

> 今回，原の出張の都合等もあり,「再調査」は行うことがほぼ，不可能である．もし百歩譲って行うとしても，その権利を得るのはギリギリで不合格になった人だけである．誰を再調査の対象とするかは，こちらの一存で（もちろん，公平に，しかし厳しく）決めさせていただく．また，再調査をしてもダメな人も出現しうる（過去にもたくさん存在した）.

（再調査とは独立に，**正規の理由があれば追試験は行う**のでご安心を — ただし，追試験の資格がある場合は，**規定の時間内に**教務課などに申告すること.）

更に付言するならば，再調査をする方が，こちらとしては厳しく点を付けやすい（厳しく採点して，誰を助けるかは再調査できちんと確かめれば良いから）．だから，このようなものには頼らず，**期末試験でちゃんと合格できるよう，しっかり学習して下さい**．期末試験までなら皆さんの学習を助ける努力は惜しまないつもりで，質問などにも忍耐強く相手することを保証する.

なお，言うまでもないことであるが，いくら進級や卒業がかかっていても，単位の出せないものは出せないことは理解されたい.（**いわゆる「泣き落とし」は通用しないばかりか，逆効果**であるからそのつもりで.）下の合格基準に述べるように，普通に勉強してれば十分に単位が取れる仕組みにはしてあるから姑息 —— 言葉の誤用的な意味で —— なことは考えないように.

合格（最低）基準:合格のための条件は，講義中に出題する例題（やレポート問題）と同レベルの問題が解けることである．具体的には今学期は大体，以下のようになるだろう（進度の都合で若干の変更があることをご了承願いたい）.

- 一次方程式が解ける．解が不定や不能の場合ももちろん，含む.
- 逆行列が求められる.（ただし，進度によっては，逆行列は来学期に廻すかも）
- 一次従属，一次従属，基底などの意味がわかり，与えられたベクトルの組が独立か従属か判定できる.
- 線形写像の意味が理解できる；具体的には与えられた写像が線形かどうか判定できる，またその像空間や核空間が計算できる.

- （以上は最低基準である．最低でなければ）抽象的な線形空間の概念が理解できている．

レポート，宿題，教科書の問題，演習の問題について：

講義中に何回か，簡単なレポートや「お奨めの宿題問題」を出すだろう．これらの出題の意図は「この程度できれば講義についていけるし，合格も可能だ」という目安を与えることと家庭学習の引き金にすること，である．成績評価に占めるレポートの比重は低いが，この講義をこなす上では重要な意味があるので，やってみること．「レポート」の作成はみんなで協力してやっても構わないし，むしろ協力することを奨励する．ただし、（友達と協力してレポート問題を解いた場合でも）各人のレポートは自分の言葉で記述し、かつ、「○○君と一緒に考えました」とぐらいは書くべきだ．また，教えてもらった事はそのままにせず，自分でもう一回考えて納得しておく事．（これらは高校まででで身に付いているべきだが，どうも怪しい人が多いようだから書いておく．）

また，当然のことではあるが，講義で進んだ部分に該当する教科書の問題くらいは全問，やっておくこと．

プリントの使いかた：

教科書に加えて，僕自身の書いたプリントも用いる．**ただし，印刷したものを配布する代わりに，各自で僕の web page からダウンロードしてもらうことにする可能性も高い．** これらのプリントは板書にアップアップしないでも講義が聴けるように，また，教科書の足りないところを補うために，作ったものである．なお，急いで作っているためにタイプミスなどがかなりあると思うので，気づいたらできるだけ指摘してくれるとありがたい．

勉強法などについて：

大学での数学では高校での数学にもまして，論理的思考力が要求されます．特にこの科目（線形代数）では**線型空間の概念**にとまどうことも多いと思います．そのような場合に困らないためには，

１．**最低限の計算力**を身につける．僕の出すレポート問題，教科書の問題，自分で選んだ演習書などをともかく自分でやってみる．

２．**論理的に考える癖**も身につける．何となくウザイと思っても嫌がらずに，教科書や講義での論理展開を自分で追って（再現して）みる

ことがかなり役に立つはずです．

ついでに大学での理想の勉強法について書いておきます．

- 第一原則として，**自分の納得するまで考えて，理解する**ことを目指す．
- でも行き詰まったら，気分転換も兼ねて演習書などをやる．具体的に手を動かすことで，「わかったつもりで全然わかってない」ことが見つかるかもしれない．
- 新しい概念などがわからない時は，その「定義」がそもそもわかってないことが非常に多い（特に線型代数ではそうである）．**重要な概念の定義が言えるか**，自答しよう．定義が言えない時は定義を覚えられるまで，**具体例を考えよう．**（意味もわからずに定義を丸暗記するのは，たいていの場合は無駄だが，やらないよりはましかも．）具体例さえ思い浮かばない時はかなりの重症です．友達や教官に質問しましょう．
- 定義，定理などでは**反例を常に思い浮かべる**ようにする．「定理のこの条件がなくなったらどこが困るのか」などを考えると，より身近に感じられて理解が深まる．
- 「高校の数学では問題演習中心だったので，大学でも問題演習中心にやって下さい」という意見を聞くことがあります．問題演習も，**その前提となる話の筋道（定義，定理，証明など）を理解した上でなら**，非常に有効です．しかし，**話の筋道も理解せず，問題演習だけをやるのは愚の骨頂**といわざるを得ません．大学の数学（に限らずほとんどの科目）では，**「話の筋道」の理解に重点がおかれ**，問題演習は各自にまかせることが多いと思われます．実際，講義で聴いた話の筋道をもとにして，どのように問題を解くかを考えるステップが最重要なのであって，ここのところを「この問題はこのように解きます」と聞いてしまえば，効果は半減します．ですからこの部分は各自で補うようにして下さい（少しの問題はレポートなどとして出題します）．そして何より，**意味もわからずに問題演習をやって良しとする間違った勉強法**をやってる人は，それから早く脱出しましょう．

- （最後に）ここは大学で，これまでのように手取り足取りはしてくれない（少なくとも僕はしない）．皆さんが自分から動けば道は開けるけども，**助けてくれるのを待っているだけでは何も解決しない**よ．

特に一言：この講義に出てくるいろいろな概念は，ゆっくり考えればそれほど難しいものではありません．しかし，**高校までの数学に対して抽象度が高く**，とくに「線型空間」「線型写像」の概念をつかむのにかなり苦しむことも考えられます．決して甘く見ずに，着実に学習することをお奨めします．なお，参考書として掲げた「ファインマン物理学」は案外，役に立つかもしれません．**しつこいけども，答えの丸暗記はお奨めしない．遠回りに見えても，どんなに苦しくても，納得するまで考えることが最短の道である．**

この科目に関するルール：世相の移り変わりは激しく，僕が学生だったときには想像すらできなかったことが大学で行われるようになりました．そのうちのいくつかは良いことですが，悪いこともあります．オヤジだとの批判は覚悟の上で，互いの利益のために，以下のルールを定めます．

- まず初めに，学生生活の最大の目的は勉強すること であると確認する．
- 講義中の私語，ケータイの使用はつつしむ．途中入室もできるだけ避ける（どうしても必要な場合は周囲の邪魔にならないように）．これらはいずれも講義に参加している 他の学生さんへの 最低限のエチケットです．
- 僕の方では時間通りに講義をはじめ、時間通りに終わるよう心がける．
- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義を通して行う（補助として僕のホームページも使う —— アドレスは最初に載せた）．「講義に欠席したから知らなかった」などの苦情は一切，受け付けない．
- レポートを課した場合，その期限は厳密に取り扱う．
- E-mail による質問はいつでも受け付ける（hara@math.kyushu-u.ac.jp）ので積極的に利用するように．ただ，回答までには数日の余裕を見込んで下さい．又，着信拒否にしないでね．

本論に入る前に記号のお約束．

$a < b$ を 2 つの実数，n を非負（負でない）整数とする．

- 整数の全体は $\mathbb{Z}$，自然数（1 以上の整数）の全体を $\mathbb{N}$，有理数の全体を $\mathbb{Q}$，実数の全体を $\mathbb{R}$，複素数の全体を $\mathbb{C}$ と書く．例えば，$x \in \mathbb{R}$ と書けば，「x は実数」と同じことである．
- 集合 A の要素を大学では「元（げん）」ともいう．(例) 2 は $\mathbb{Z}$ の元である．$\sqrt{2}$ は $\mathbb{Q}$ の元ではない．
- 高校までと異なり，「$a < b$ または $a = b$」を $a \le b$ と書く（不等号の下が 2 本線ではなく，1 本線）．同様に，「$a > b$ または $a = b$」を $a \ge b$ と書く．
- $a < x < b$ なるすべての実数の集合を (a, b) と書き，開区間 という．$a \le x \le b$ なるすべての実数の集合を $[a, b]$ と書き，閉区間 という．
- 高校と同じく，$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ は n の階乗 である．ただし，$0! = 1$ と約束する．

(用語の注）あるものがたった一通りに決まる（存在する）とき，業界用語では○○**が一意に決まる（存在する）**という．この表現『一意』は頻出するから覚えよう（英語の unique, uniquely の訳）．

(用語の注）本来，この科目名は「線**型**代数」とするのが正しい（形と型は違う）．しかし，いつ頃からか「形」を使うのが主流になってしまった．仕方ないので，この科目でも「形」を使うことがあるが，かなりの部分，「型」と書いてしまうこともあるだろう．そのような場合は「線型＝線形」と読み替えて下さい．

わからない記号が出てきたら，また，僕がおかしなことを言ってると思ったら，質問（または指摘）して下さい．僕の言ってることがわからないままに 90 分も座っているのは時間の無駄です．あなたがわからない時は，隣の友達も多分，わかってないでしょう．だから，勇気をだして発言して下さいね．僕は変な人格攻撃以外で激高したことはありません．(かなりの人格攻撃でも表面上は受け流せると思っているのだが，試さないでね.)

4 月 15 日の講義について：今日は第一回なので簡単なところから．大半は高校の復習です．

4 月 22 日：今日は平面の方程式，およびベクトルの一次結合くらいまで．
今日は他の所用のため，office hour はありません．メイルなどで質問して下さい．
残念な事に，連休のため，線型代数の次の授業は 5/8（水）です．
レポートも，変則的な回収日になっています．ご注意ください．

4/22 夜追記：今日の授業で，誤解を招きやすいところがありました．今日の授業で「$x \in \mathbb{R}$」と書いたのは，初日に説明した通り,「x は実数」と同じ意味です．ここの $\mathbb{R}$ はベクトルとは関係なく，単に「実数の全体」を表す記号ですが,「大学ではベクトルは太字」と言ったので，ややこしかったですね —— 厳密に言えば,「ベクトルは太字」とは言ったけど,「太字はベクトル」とは言ってないのですが．この点，何かのベクトルだと勘違いした人がかなりいたようですし，それも無理からぬ面もあるので，お詫びして，注意を喚起しておきます．

第 1 回レポート問題： 〆切までに 10 日ほどあるので．二週間分の問題を出しました．正直，問 4 と問 5 はよくわからないかもしれません．わからなくても，今学期の終わりにはわかるようになるので，心配はいりませんが，ともかく努力しよう.（わからないときには「わからない」と書いてくれれば良いです.）

なお，講義でも注意したように，黒板ではベクトルは縦ベクトルの形で書きます．でも，プリントではスペースの節約のため横ベクトルの形で書くことも多いので，ご了承ください．

問 1： 以下の条件を満たす平面の方程式を求めよ．
(i) 点 $(1, -1, 1)$ を通り，ベクトル $(1, 2, -1)$ に垂直な平面
(ii) 3 点 $A(2, -1, -1), B(1, 2, -2), C(2, 1, -2)$ を通る平面

問 2： 上の問 1 の (i), (ii) の平面のそれぞれを「パラメーター表示」で表せ.（表し方は一通りとは限らないから，ひとつだけ書けば良い.）

問 3： 以下では，3 つの数を縦に並べたものを $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ のように書き，この全体を A とする．見かけ上，A は 3 次列ベクトルの全体のように見える．

これから A に以下のように制限を加えて新しい集合 V, W, X を定義し,「和」や「スカラー倍」も以下のように導入する（ことを試みる ⟵ わざわざ「試みる」と書いてるのには理由がある）．

このとき，V, W, X のそれぞれが線型空間になっているか否かを判定せよ．特に線型空間になっていない場合には，なぜなっていないのか，を説明せよ．

（この問題は大学の数学として,「定義がきちんと理解できているか」を試す問題です．簡単かもしれないけど，やってみて下さい.）

(i) 集合 V は,

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0 \qquad (x_1, x_2, x_3 \text{ は実数})$$

をみたすような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体として定義する．また，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ の「和」を $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ として定義する．また，実数 k による $\boldsymbol{x}$ の「スカラー倍」を $k\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ kx_3 \end{pmatrix}$ として定義する.（高校の通り）

(ii) 集合 W は,

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1 \qquad (x_1, x_2, x_3 \text{ は実数})$$

をみたすような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体として定義する．また，(i) と同じく $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ の「和」を $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ として定義する．また，実数 k による $\boldsymbol{x}$ の「スカラー倍」を $k\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ kx_3 \end{pmatrix}$ として定義する．

見て分かるように，V, W の違いは，x_1, x_2, x_3 についている条件の違いだけである．

(iii) 集合 X は，

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0 \qquad (x_1, x_2, x_3 \text{ は}\textbf{整数})$$

をみたすような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体として定義する．また，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ の「和」を $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ として定義する．また，実数 k による $\boldsymbol{x}$ の「スカラー倍」を $k\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ kx_3 \end{pmatrix}$ として定義する．

問 4*： x の 2 次以下の多項式は，一般に $ax^2 + bx + c$ の形で書ける（a, b, c は適当な実数）．この 2 次以下の多項式の全体を X とし，ここに「和」と「スカラー倍」を以下のように定義する（ことを試みる）．

$\boldsymbol{p} = ax^2 + bx + c$ と $\boldsymbol{q} = dx^2 + ex + f$ の「和」は $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} = (a + d)x^2 + (b + e)x + (c + f)$.

スカラー（実数）$k \in \mathbb{R}$ による $\boldsymbol{p} = ax^2 + bx + c$ の「スカラー倍」は $k\boldsymbol{p} = (ka)x^2 + (kb)x + (kc)$.

このような定義の下で，X が確かに線型空間になっていることを確かめよ．

問 5：** まだ力が余ってる人は，以下の問を考えてみると良い．
上の問 4 の X において，「$x = 2$ でこの多項式の値がゼロ」とした集合 Y を考える，つまり，Y とは「2 次以下の x の多項式で，$x = 2$ でゼロになるものの全体」である．この Y の元に対して，問 4 と同じく「和」と「スカラー倍」を定義すると，これは線型空間になっているか？(もちろん,「なっている」「いない」だけでなく，その理由がきちんと言える事が望ましい.)

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

上の問に解答し，

5 月 2 日（木）12:55 （時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙は A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

5 月 8 日：今日は数ベクトルの定義，線型結合を中心にやります．
（注意）初日に注意したように，「$a \in \mathbb{R}$」は「a は実数」と同じ事です（$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}$ などはベクトルではありません）．

第２回レポート問題：

1 次結合についての問題です．レポート問題は学期を通して番号をつけるので，今日は問 6 からになります．レポート問題は「その題材に関して典型的な問題を 1 個だけ」に限定して出しています．言うまでもないことですが，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問 6： ベクトル $\boldsymbol{a}, ..., \boldsymbol{d}, \boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{d} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とする．$\boldsymbol{x}$ を，以下に指定するベクトルの線型結合として表せ．ただし，線型結合として表せない場合もあるとあると思われるので，その際は（理由と一緒に）「表すことはできない」と答えれば良い．

1. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の 2 つのベクトル
2. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の 2 つのベクトル
3. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の 3 つのベクトル

問 7*： （この問題は少し「抽象的」なので，出来なくても悲観するには及ばない）2 次以下の x の多項式の作るベクトル空間を V とし，そのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{p}$ を

$$\boldsymbol{a} = 1, \qquad \boldsymbol{b} = x + 1, \qquad \boldsymbol{c} = (x+1)^2, \qquad \boldsymbol{p} = x^2 - x + 1$$

とする．$\boldsymbol{p}$ を，以下に指定するベクトルの線型結合として表せ．ただし，線型結合として表せない場合もあるとあると思われるので，その際は「表せない」と答えれば良い．

1. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の 2 つのベクトル
2. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の 2 つのベクトル
3. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の 3 つのベクトル

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

上の問に解答し，

5 月 13 日（月）　10:30 （時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．**ただし，ゼムクリップは不可 !!**

先週のレポートの略解

問 1： ともかくやるだけ．

(i) 法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = (1, 2, -1)$ で点 $\boldsymbol{x}_0 = (1, -1, 1)$ を通るから，平面の方程式は $\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$ となるはずだ．これを成分で書き下すと

$$(x - x_0) + 2(y - y_0) - 1(z - z_0) = 0 \qquad \text{つまり} \qquad x + 2y - z = x_0 + 2y_0 - z_0 = -2$$

となる．

(ii) 地道には平面の方程式を $ax + by + cz = d$ の形に仮定して，この平面上に 3 点が存在する条件，つまり

$$\begin{cases} 2a - b - c = d \\ a + 2b - 2c = d \\ 2a + b - 2c = d \end{cases}$$

を解けば良い．答えは一意には決まらないが，(d を任意の数として)

$$a = -d, \qquad b = -d, \qquad c = -2d$$

と求まる．$d = 0$ ならすべてゼロになって意味のない結果になるから，$d \neq 0$ を考えると，平面の方程式は

$$-d\,x + (-d)\,y + (-2d)\,z = d \qquad \text{つまり} \qquad x + y + 2z = -1$$

となる．

（別解）ベクトルの外積 $\vec{AB} \times \vec{AC}$ を計算すれば，この平面の法線ベクトルが一発で求まるから，後は (i) のように解けば良い．

問 2： (i) ともかく，法線ベクトルに直交する（平行でない）ベクトルを 2 つ，求めよう．そのために，平面上の 3 点を適当に求める．題意から $A(1, -1, 1)$ が平面上にあることはわかっている．これ以外に（例えば $y = 1, z = 0$ や $y = 0, z = 1$ の時の x 座標を，問 [1] の (i) の平面の方程式に代入して求めるつもりになって）$B(-4, 1, 0)$ と $C(-1, 0, 1)$ も平面上にある．更にこの時，$\vec{AB} = (-5, 2, -1)$ と $\vec{AC} = (-2, 1, 0)$ は平行ではない．よって，$\boldsymbol{x}_0 = (1, -1, 1)$ として

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 = s\vec{AB} + t\vec{AC}, \qquad \text{つまり} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s, t \text{ は任意の実数}$$

がパラメータ表示（の一例）である．もちろん，他にもいろいろな表し方はある．これらはすべて，点 A, B, C のいろいろな取り方に対応している．$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q}$ と書いたときの $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ の取り方の例は以下の通り（ミスタイプはないと思いたい)：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

実はこれらはすべて，皆さんのレポートにあったものばかりである（これだけ色々出て来たということは，自力でやった人が一杯いたということですね．大変よろしい.）これらはすべて互いに平行でないから，好きなもの 2 つを選べば良い．

(ii) の場合，平面上の 3 点 A, B, C が与えられているから，

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_A = s\vec{AB} + t\vec{AC} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

がパラメーター表示の式である（$\boldsymbol{x}_A$ は点 A の位置ベクトル）—— もちろん，この場合，$\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ が平行であってはいけないが，これは大丈夫．具体的に成分で書くと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad s, t \text{ は任意の実数}$$

が一例である．もちろん，他にもいろいろな表し方はある．これらはすべて，点 A, B, C のいろいろな取り方に対応している．$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q}$ と書いたときの $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ の取り方の例は以下の通り：

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

（別解）実は (i), (ii) ともに，既に平面の方程式を求めているのだから，適当に $x = s, y = t$ などとおいて，z を s, t で表せばパラメーター表示になる．この方法が一番簡単だろう．例えば (ii) なら $x + y + 2z = -1$ が平面の方程式だから，$x = s, y = t, z = -\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$ （s, t は任意の実数）というのが一つの解である．

問 3： この問題がきちんとできれば，大学での数学の第一歩がわかったということですが，できなくても悲観するには及びません．今学期全部を使って，できるようになれば良いのです．

さて，線型空間の定義は講義でやった通り．なので，実際にその定義を満たしているかどうかを，チェックしよう．V の方は，すべての条件が満たされているのがわかる．(より詳しくは問 4 で書くから，そこを見て下さい.)

ところが，W の方は,「和」と「スカラー倍」が一般には W の中に入っていない（各自，どんなときに入らないか，納得せよ）．つまり，W では一般に「和」「スカラー倍」が定義できていないのだ．これでは線型空間の定義を満たすとは言えないので，W は線型空間ではない．

X もダメなのだ．この場合,「和」はちゃんと X の中に入ってる．しかしスカラー倍が...

と言う訳で,「和」や「スカラー倍」が定義されているか（考えている集合の中に入っているか）が重要だったのです．

問 4： 線型空間の定義を一つずつ確かめて行くしかありません．基本なので，丁寧に説明します．
以下，$\boldsymbol{p} = ax^2 + bx + c, \boldsymbol{q} = dx^2 + ex + f$ として断り無く用います．

まず,「和」が定義されているか？定義は既に問題に書いてありますが，$\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} = (a + d)x^2 + (b + e)x + (c + f)$ が X の元であるかどうか，が問題です．でもこの右辺は x の 2 次以下の多項式なので，確かに X の元ですね．つまり,「和」は定義できてます．

次に「スカラー倍」ですが，$k\boldsymbol{p} = (ka)x^2 + (kb)x + (kc)$ はまたもや，x の 2 次以下の多項式なので，X の元，つまり「スカラー倍」も定義できてます．

最後に，8 つの性質を一つ一つ確かめる必要があります．

加法の交換法則については，$\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} = (a + d)x^2 + (b + e)x + (c + f)$ と $\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p} = (d + a)x^2 + (e + b)x + (f + c)$ が等しいか否かが問題です．ですが，係数が等しいので（係数が等しいのは，普通の数の足し算として $a + d = d + a$ などが成り立つから）両者は等しい．よって加法の交換法則は O.K.

加法の結合則も同様です．$\boldsymbol{r} = gx^2 + hx + i$ として

$$(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{r} = \{(a + d)x^2 + (b + e)x + (c + f)\} + \{gx^2 + hx + i\} = \{(a + d) + g\}x^2 + \{(b + e) + h\}x + \{(c + f) + i\}$$

と

$$\boldsymbol{p} + (\boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}) = \{ax^2 + bx + c\} + \{(d + g)x^2 + (e + h)x + (f + i)\} = \{a + (d + g)\}x^2 + \{b + (e + h)\}x + \{c + (f + i)\}$$

が等しいか否かが問題．しかしこれも，各係数が等しいので（等しい理由は，各係数に関して，普通の数の結合則が成り立つから），両者は等しい．よって結合則は O.K.

零ベクトル（加法の単位元）$\mathbf{0}$ としては，単に係数が全てゼロの多項式（＝数字のゼロ）を取れば良い（ここで，このゼロ多項式が V の元であることは明らかだが重要なチェックポイント）．実際，$\boldsymbol{p} + 0 = 0 + \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}$ なので O.K.

加法の逆元については，$-\boldsymbol{p} = (-a)x^2 + (-b)x + c$ というのを考えれば良い．実際，

$$-\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p} = \{(-a) + a\}x^2 + \{(-b) + b\}x + \{(-c) + c\} = \mathbf{0}$$

となるので，$-\boldsymbol{p}$ が $\boldsymbol{p}$ の逆元になっていることが確かめられる．
後 4 つも確かめる必要があるが，そろそろ疲れて来たし，同じような事の繰り返しだから略．

問 5： 結論からいうと，なっている，です．やり方は 2 つくらいあります．

（方法 1）$\boldsymbol{p} = ax^2 + bx + c$ とすると，$x = 2$ でゼロという条件から $4a + 2b + c = 0$ が必要になる．逆に，$4a+2b+c=0$ であるならば，$\boldsymbol{p}$ は問の条件を満たす．つまり，Y とは

$$Y = \left\{ ax^2 + bx + c \,\middle|\, a,b,c \text{ は実数で}, 4a+2b+c=0 \text{ を満たす} \right\}$$

という事になっている．これからこの Y において「和」「スカラー倍」が定義できていて，かつ 8 つの性質が成り立つ事を確かめる．

「和」については，$\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q} = (a+d)x^2 + (b+e)x + (c+f)$ はもちろん 2 次以下の多項式で，更に，$x=2$ での値が $4(a+d) + 2(b+e) + c + f = (4a+2b+c) + (4d+2e+f) = 0+0=0$ なので，これは確かに Y の元になっている．つまり,「和」は Y の中で定義できている．

「スカラー倍」も同様で，$k\boldsymbol{p}$ は 2 次以下の多項式で，かつ，その $x=2$ での値は $k(4a+2b+c)=0$ なので，これも Y の元．よってスカラー倍も Y の中で定義できている．

最後に 8 つの性質だが，これらは多項式としての「和」「スカラー倍」に関するものであるから，問 4 と全く同じに証明できる．よって，以上から，Y も線型空間とわかる．

（方法 2）少しかっこ良いやり方ですが，いつもこのような方法が使えるとは限りません．この意味で,（方法 1）の方が万能とも言えます．

$x=2$ でゼロになるということは，問題の多項式を因数分解すれば，かならず $(x-2)$ が出てくるということ．2 次以下なので，問題の多項式は一般に $(x-2)(ax+b)$ の形に書けるはずである（必要条件，ここで a,b は何かの係数）．逆に，$(x-2)(ax+b)$ の形の多項式は問題の条件「2 次以下で $x=2$ ではゼロ」を満たす．なので，問題の集合 Y は，$(x-2)(ax+b)$ の形の多項式全体と同じ事である（a,b は任意の実数）．つまり

$$Y = \left\{ (x-2)(ax+b) \,\middle|\, a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

というわけである．後はこれに対して，問 4 と同じ事を考えてやればよい．

$\boldsymbol{p} = (x-2)(ax+b)$ のとき，$\boldsymbol{p} = ax^2 + (b-2a)x - 2b$ である．従って，$\boldsymbol{q} = (x-2)(cx+d) = cx^2 + (d-2c)x - 2d$ との和は[1]

$$\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q} = (a+c)x^2 + (b-2a+d-2c)x - 2b - 2d = (x-2)\{(a+c)x + (b+d)\}$$

であり，これは Y の元になっている．従って,「和」は Y の中で定義できている．

「スカラー倍」も同様で

$$k\boldsymbol{p} = (ka)x^2 + \{k(b-2a)\}x + k(-2b) = (x-2)(kax+kb)$$

はやはり Y の元の形をしている．従って,「スカラー倍」も Y の中で定義できている．

以下 8 つの性質をまたもやチェックして行くが $(x-2)$ をくくりだせば，後は $(ax+b)$ の部分の多項式の「和」や「スカラー倍」の話になるので，問 4 と同様に（次数が低いだけ，より簡単）全てチェックできる．よって Y は線型空間になっているとわかる．

---

[1] こんな回りくどい事をしなくても，高校までの知識で，$\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ を因数分解した形に書くのは簡単だ．だけど，ここでは多項式の「和」はあくまで ax^2+bx+c の形に展開してから係数同士を足す，ことで定義しているので，その定義通りに回りくどくやっているのです．もちろん，高校での数学でも，このように回りくどくやった後で,「共通因数でくくって計算する」ことを正当化したはずなんですが

5 月 13 日：今日は線形独立（一次独立）と基底を中心にやります．
5 月 29 日（水）の 3 限に補講をします．(5/13, 15:24 に補講のお知らせを追加，日付を訂正しました．)

第 3 回レポート問題： 1 次独立などについての問題です．レポート問題は「その題材に関して典型的な問題を 1 個だけ」に限定して出しています．言うまでもないことですが，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問 8： ベクトル $\boldsymbol{a}, ..., \boldsymbol{e}$ を

$$\boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{d} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e} := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とする．(問 6 と同じ；問 6 の $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{e}$ とした)．以下のベクトルの組が 1 次独立か 1 次従属かを判定せよ．また，以下のベクトルの組の中で，$\mathbb{R}^3$ の基底になっているものをすべて挙げよ．(基底になってないのは，その理由も．)

1. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の 3 つのベクトル
2. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の 3 つのベクトル
3. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の 3 つのベクトル
4. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ の 4 つのベクトル

問 9*： 2 次以下の多項式の作るベクトル空間を V とし，そのベクトル $\boldsymbol{a}, \ldots, \boldsymbol{e}$ を

$$\boldsymbol{a} = 1, \qquad \boldsymbol{b} = 2x + 1, \qquad \boldsymbol{c} = (x+1)^2, \qquad \boldsymbol{d} = x^2$$

とする．以下のベクトルの組が 1 次独立か 1 次従属かを判定せよ．また，以下のベクトルの組の中で，V の基底になっているものをすべて挙げよ．

1. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の 3 つのベクトル
2. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の 3 つのベクトル
3. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の 3 つのベクトル

問 10*： 実数値関数 1（恒等的に 1 である関数），$\cos x$, $\cos(2x)$, $(\cos x)^2$ の線型結合の全体を V とし：

$$V := \{\alpha + \beta \cos x + \gamma \cos(2x) + \delta(\cos x)^2 \,\big|\, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$$

この V の元に対して，多項式の場合と同様，普通の関数としての「和」と「スカラー倍」を導入する．また，この V の特別な元として

$$\boldsymbol{a} = 1, \quad \boldsymbol{b} = \cos x, \quad \boldsymbol{c} = \cos(2x), \quad \boldsymbol{d} = (\cos x)^2$$

を定義しておく（V は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の線型結合の全体である）．以下の問いに答えよ．

1. V が線型空間になっていることを示せ．
2. $\boldsymbol{d}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で表すことは可能か？可能なら，具体的な表し方を答えよ．
3. V の基底をひとつ，求めよ．(基底は何通りもあるから，通常は一つ，答えれば良い．)

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

上の問に解答し，

5 月 17 日（金）14:00（時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙は A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．
今週からのお願い：レポートを出す時は，**レポートボックスの奥が上になるような向きで**入れて下さい．

— 先週のレポートの略解 —

問 6： ともかくやるだけ．

1. 線型結合として表す，事の定義をそのまま書いてみると，c_1, c_2 を適当なスカラーとして
$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b}$$
ということである．これを成分毎に書くと
$$c_1 + 2c_2 + 0 = 4, \qquad c_1 + c_2 = 3, \qquad c_1 - 3c_2 = -1$$
の連立方程式になる．これを解くと，$c_1 = 2, c_2 = 1$ と求まる．ので，$\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ の形に線型結合で書ける．

2. うえと同様にして解くと，今度は
$$\boldsymbol{x} = c_2\boldsymbol{b} + c_3\boldsymbol{c} \qquad \Longrightarrow \qquad 2c_2 + 0 = 4, \quad c_2 + c_3 = 3, \quad -3c_2 + c_3 = -1$$
が必要十分だが，この 3 つを満たす c_i は存在しない．つまり，$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合として表す事はできない．

3. うえと同様にして解くと，今度は
$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a} + c_3\boldsymbol{c} + c_4\boldsymbol{d} \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 + c_4 = 4, \quad c_1 + c_3 - c_4 = 3, \quad c_1 + c_3 + c_4 = -1$$
を満たす c_j が欲しい訳だが，これは $c_1 = 6, c_3 = -5, c_4 = -2$ で満たされる．ので，
$$\boldsymbol{x} = 6\boldsymbol{a} + (-5)\boldsymbol{c} + (-2)\boldsymbol{d} = 6\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{d}$$
が答え．実際に，上の右辺を計算すると $\boldsymbol{x}$ になってる．

問 7： 解き方は問 6 と全く同じです.「線型結合」などの言葉を使ってはいますが，**高校（中学？）から皆さんがやって来たことの言い換え**に過ぎません．この言い換えが自然に思えるようになれば，線型代数の一つの目的は達成されたことになります．

1. 線型結合として表せ，なので
$$\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$$
という形に書けばよろしい．これは
$$x^2 - x + 1 = \alpha + \beta(x+1)$$
という事であるが，右辺には x^2 がないから，これは絶対に無理．つまり，$\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の線型結合として表す事は不可能．

2. 同じようにして解くと，今度は
$$\boldsymbol{p} = \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} \qquad \text{つまり} \qquad x^2 - x + 1 = \beta(x+1) + \gamma(x+1)^2 = \gamma x^2 + (\beta + 2\gamma)x + (\beta + \gamma)$$
ということである．係数を比較して
$$\gamma = 1, \quad \beta + 2\gamma = -1, \quad \beta + \gamma = 1$$
なら必要充分だが，これは無理！つまり，$\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}$ の線型結合として表す事は不可能．

3. 同様に解くと，
$$\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} \qquad \text{つまり} \qquad x^2 - x + 1 = \alpha + \beta(x+1) + \gamma(x+1)^2 = \gamma x^2 + (\beta + 2\gamma)x + (\beta + \gamma + \alpha)$$
ということで，今回は $\gamma = 1, \beta = -3, \alpha = 3$ という解がある．つまり
$$\boldsymbol{p} = 3\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$$
の形に，線型結合として表せる．

(注意とお願い)

- $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で表す，という場合，どれかのベクトルの係数が 0 でも構いません．例えば，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ の場合，$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の係数が 0 と思えば良いので，$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合になっています．
- 問 7 では，係数に x が入ってはいけませんよ．あくまで線型結合の定義は「定数」の係数で書ける事，です．また $\boldsymbol{b}^2 = (x+1)^2$ なども使ってはいけません —— $\boldsymbol{b}^2$ がダメなことは，線型結合の定義を読めば明らかなはず．
- **検算できる場合には検算**して下さい．今回の問題では，問 6 と問 7 のそれぞれ 3 は線型結合で書いたものを実際に足してみて，求める左辺のベクトルになるかどうか，検算が可能です．検算できるところでは確実に検算する癖を身につけておかないと，将来の卒業研究や社会に出てから，非常に困るはずです．そのような理由から，この講義の試験では,「検算できるのに間違った答えを堂々と書いている」場合には厳しく対応 — 部分点なしもあり — しますので，そのつもりでね．
- レポートを提出する際には，A4 の紙を使って下さい．また，名前と学生番号は忘れずに書いて下さい．

5 月 20 日：今日は基底，次元，部分空間です．
5/29（水）の 3 限に，2209 教室にて，補講をします．
6/3 または 6/10 に中間試験の予定です（多分，6/10）．

第 4 回レポート問題：

部分空間や次元などについての問題です．レポート問題は「その題材に関して典型的な問題を 1 個だけ」に限定しています．言うまでもないことですが，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問 11： ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の成分に対して，以下のように制限を付けて，$\mathbb{R}^3$ の部分集合 W を作る．この W が $\mathbb{R}^3$ の部分空間になっているかどうかを考えて，部分空間になっていないものについては「なぜ部分空間でないのか」の理由を答えよ．また，部分空間になっているものについては，その基底を一つ，答えよ．

(1) W は $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ を満たすような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体．

(2) W は $x_1 + x_2 - x_3 = 3$ を満たすような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体．

(3) W は $x_1 - (x_3)^3 = 0$ を満たすような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体．

(4) W は x_1 が整数であるような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体．

(5) W は $x_1 = 0$ または $x_2 = 0$ であるような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体．

問 12*： 実数上で定義された関数の全体を V とし，この V に通常の関数としての「和」と「スカラー倍」を定義する（前回の問 10 と同じように）．念のために書けば，f, g 二つの関数の和は

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{つまり，和 } f+g \text{ の } x \text{ での値は } f(x)+g(x)$$

スカラー倍は

$$(kf)(x) = kf(x) \qquad \text{つまり，スカラー倍 } kf \text{ の } x \text{ での値は } f(x) \text{ の } k \text{ 倍}$$

と定義するのである．この V が線型空間になることは認めて（できれば，各自で確かめるのが望ましい），以下のように定義した集合 W が，V の部分空間になっているか否かをそれぞれ考察せよ．更に，(3),(4),(5) が部分空間になっている場合には，その次元を答え，更にその基底を一組，与えよ．

(1) W は $f(4) = 0$ を満たすような $f \in V$ の全体．(この問題では基底は与えなくて良い)
(2) W は $f(0) = -1$ を満たすような $f \in V$ の全体．(この問題では基底は与えなくて良い)
(3) W は 4 次以下の x の多項式の全体．
(4) W は $f(4) = 0$ となる，4 次以下の x の多項式の全体．
(5) W は $\cos x, \cos(2x), \cos(3x), (\cos x)^2, (\cos x)^3$ の線形結合の全体．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

上の問に解答し，

　5 月 24 日（金）14:00（時刻は 24 時間制）までに，
　全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ（クリップは不可）．
レポートを出す時は，**レポートボックスの奥が上になるような向きで**入れて下さい

―――― 先週のレポートの略解 ――――

問 8： ともかくやるだけ．

1. 一次独立の判定条件，一番簡単なのは，

$$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} = 0$$

を x, y, z について解いてみて，ゼロ以外の解があるかどうかを調べる事だ．成分毎に書くと

$$x + 2y = 0, \qquad x + y + z = 0, \qquad x - 3y + z = 0$$

の連立方程式になるが，この 3 つを満たすのは $x = y = z = 0$ のみである．よって，この 3 つは**一次独立**である．
　次に，これが基底になっているか，を調べる．これは $\mathbb{R}$ の任意のベクトルを線型結合で表せるか否か，で判定する．具体的には任意の X, Y, Z に対して，

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$$

となるような x, y, z （大文字と小文字を区別）があるか否か，である．これを成分で書くと

$$x + 2y = X, \qquad x + y + z = Y, \qquad x - 3y + z = Z$$

であり，この解は

$$x = X - \frac{Y - Z}{2}, \quad y = \frac{Y - Z}{4}, \quad z = -X + \frac{5Y - Z}{4}$$

のように，ちゃんと存在する．つまり，$\mathbb{R}^3$ の任意の元を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で書けることがわかった．
　以上より，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ は，(1) 一次独立で，(2) $\mathbb{R}^3$ の任意の元を線型結合で書ける．よってために $\mathbb{R}^3$ の基底になっている．

　2. うえと同様にして解くと，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ は一次独立で，かつ，$\mathbb{R}^3$ の任意の元をそれらの線型結合で書けることがわかる．具体的には $x = (2X + Y - Z)/2, y = Z - X, z = (Z - Y)/2$. よって基底である．

　3. うえと同様にして解くと，$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ は一次独立で，かつ，$\mathbb{R}^3$ の任意の元をそれらの線型結合で書けることがわかる．具体的には $x = (2X + Y - Z)/8, y = (2X + 5Y + 3Z)/8, z = (2X - Y + Z)/4$. よって基底である．

　4. うえと同様にして解くと，$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{c} + z\boldsymbol{d} + u\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$ には，今度は

$$x = -6u, \quad y = 5u, \quad z = 2u \qquad (u \text{ は任意})$$

と云う解がある．従って，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ は一次独立ではない．一次独立ではないと決まった時点で，これが $\mathbb{R}^3$ の基底でないことはわかる．(この場合，すべての $\mathbb{R}^3$ の元を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ の線型結合で表すことはできる.)

> 解答例に示したように，あるベクトルの組が基底であるというには，(1) そのベクトルの組が一次独立である事，(2) すべてのベクトルをそのベクトルの組の線形結合で書ける事，の両方が必要だ．次の問 9 でもそうだったが，上の (2) の理由がちゃんと書けていた人は全体の 1/3 もいなかったと思う．

　（更に補足）今日の講義でやるように，$\mathbb{R}^3$ の基底は必ず 3 つのベクトルからなる．更に，この 3 つのベクトルが一次独立なら，自動的に基底になってる事もわかる（ただし，証明は今学期の最後の辺りで）．これらの事実を使えば，一次独立性の判定をした時点で，1〜3 の場合は基底になっていて，4 の場合は基底になってないことがわかる．ただし，今の時点ではこのような事実はまだやっていないのだから，それは前提にしないで解答してほしい．(もし，このような事実を使うのなら，その旨をはっきり述べるべきである.)

問 9： 解き方は問 8 と同じである．

　1. 一次独立か，だから

$$\boldsymbol{0} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$$

を解けば良い（未知数は α, β, γ）．これは

$$\alpha + \beta(2x + 1) + \gamma(x + 1)^2 \equiv 0$$

が恒等的に成り立つか？ということ．これは x の係数比較をして

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad 2\beta + 2\gamma = 0, \quad \gamma = 0$$

ということで，この解は明らかに $\alpha = \beta = \gamma = 0$ しかない．よって，一次独立である．(そもそも，3 つの次数が違うので，上のように解かなくてもダメとわかる.)
　次に基底になってるか否かは任意の係数 p, q, r に対して

$$px^2 + qx + r = \alpha + \beta(2x + 1) + \gamma(x + 1)^2$$

と書けるような α, β, γ が求まるか，ということ．これを解いてみると，

$$\gamma = p, \qquad \beta = -p + q/2, \qquad \alpha = -q/2 + r$$

となって，確かに α, β, γ が求まる．よって，基底になっている．
　2. 同じようにして解く．今度は

$$0 = \beta(2x + 1) + \gamma(x + 1)^2 + \delta x^2$$

を満たさせたい．この場合は

$$\beta = -\gamma, \quad \delta = -\gamma \qquad (\gamma\text{は任意})$$

と云う解があるので，一次従属である．また，一次従属だから，基底ではない．(実際，任意の 2 次以下の多項式をこれらの線型結合では書けない．)

3. 同様に解くと，今度は一次独立，かつ基底である事がわかる．

前問と同様に，この場合も，元の空間の次元が 3 なので，3 つの独立なベクトルをもってくれば，これは基底になっている．ただし,「次元が 3」であることは全く自明ではなく，これを前提にした解答は厳密にいえば無効である．

問 10： 以下，関数の引数としての x（太くない）と，ベクトルとしての $\boldsymbol{x}$（太い）を区別すること．

1. 定義に従って，やるしかないです．

まず,「和」と「スカラー倍」が定義できてる事を確かめる．そのために，V の任意の 2 元として

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 + \beta_1 \cos x + \gamma_1 \cos(2x) + \delta_1 (\cos x)^2, \qquad \boldsymbol{y} = \alpha_2 + \beta_2 \cos x + \gamma_2 \cos(2x) + \delta_2 (\cos x)^2$$

をとると，その和は（問題に普通に関数としての和を考えるとあるから）

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= \alpha_1 + \beta_1 \cos x + \gamma_1 \cos(2x) + \delta_1 (\cos x)^2 + \alpha_2 + \beta_2 \cos x + \gamma_2 \cos(2x) + \delta_2 (\cos x)^2 \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) \cos x + (\gamma_1 + \gamma_2) \cos(2x) + (\delta_1 + \delta_2)(\cos x)^2\end{aligned}$$

となり，これは各係数が実数であるから，定義にある V の元の形になってる．つまり,「和」は定義できている．

同様に，スカラー倍も，実数 k に対して

$$k\boldsymbol{x} = k\Bigl\{\alpha_1 + \beta_1 \cos x + \gamma_1 \cos(2x) + \delta_1 (\cos x)^2\Bigr\} = (k\alpha_1) + (k\beta_1) \cos x + (k\gamma_1) \cos(2x) + (k\delta_1)(\cos x)^2$$

となるが，これも V の元の形になってて,「スカラー倍」も定義できている．(**「和」や「スカラー倍」が定義できてると言ってるが，以前から強調しているように,「和」や「スカラー倍が」V の元として 定義できてる，ということである．つまり,「和」や「スカラー倍が」V の元である事がもちろん，要求されていて，それが満たされている**．)

さて，これから更に，このように定義した「和」や「スカラー倍が」線型空間の定義の 8 つの性質を満たす事を示さなければならない．ほとんどアタリマエに見えるかもしれないが，本当はこれはやるべきこと．

簡単に見て行くと

- 加法の交換則，結合則，加法とスカラー倍の分配則，スカラー倍の結合則，および $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$，はすべて，普通の実数の交換則，結合則，分配則から導かれる（なぜなら，関数としての和などは，要するに「各 x における値」同士を足したり，スカラー倍したりするものなので，x を止めて考えれば普通の数の演算をやってるにすぎないなら)．
- 問題は $\mathbf{0}$ などの存在である．まず，$\mathbf{0}$ に相当するのは,「恒等的にゼロである関数」である．これはもちろん，V の元である．
- 加法の逆元 $-\boldsymbol{x}$ は，単に $\boldsymbol{x}$ の各係数の符号をひっくり返したやつである．

以上で 8 つの性質すべてをチェックできた（ちょっと省略したけど）ので，V は確かに線型空間になっているといえる．

ほとんどの人が「和とスカラー倍が定義できてる」から線型空間，と答えていたが，これでは全く足りない．「和とスカラー倍が定義できてる」のはあくまで必要条件であって,「それらが線型空間の定義の 8 つの性質を満たす事」を示すべし．

2. 線型結合で書けるかどうか，やってみれば良い．つまり，

$$\alpha + \beta \cos x + \gamma \cos(2x) = (\cos x)^2 \qquad (\text{もちろん，}x\text{ の恒等式として})$$

となるような α, β, γ があるか否かである．発見法的には,（多分，受験テクニックとして習ったように）$x = 0, \pi/2, \pi$ などを入れて，出てくる条件を連立して解いたらよい．また，ちょっと見通しの良い人は，2 倍角の公式

$$\cos(2x) = 2(\cos x)^2 - 1$$

を思い出しても良い．ともかく

$$\boldsymbol{d} = (\cos x)^2 = \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}$$

と書ける．こんな訳で，線型結合で書けるわけ．

3. V の任意の元は $\alpha + \beta \cos x + \gamma \cos(2x) + \delta (\cos x)^2$ の形をしているが，上から

$$\alpha + \beta \cos x + \gamma \cos(2x) + \delta (\cos x)^2 = \Bigl(\alpha + \frac{1}{2}\delta\Bigr)\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \Bigl(\gamma + \frac{1}{2}\delta\Bigr)\boldsymbol{c}$$

と書けるので，V の任意の元を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合として表す事は可能．

もし，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次独立なら，これが基底の一例になり，メデタシメデタシ．実際，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は一次独立である．なぜなら，

$$\alpha + \beta \cos x + \gamma \cos(2x) \equiv 0 \qquad (x\text{ の恒等式として})$$

が成り立つような α, β, γ があるかどうかが問題なのだが，$x = 0, \pi/2, \pi$ くらいでやってみると

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha - \gamma = 0, \quad \alpha - \beta + \gamma = 0$$

となり，この解は $\alpha = \beta = \gamma = 0$ しかない．

以上から，(1) 一次独立であり，かつ (2) V のすべての元をその線型結合で表せる，ので，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ は V の基底である．

5 月 27 日の連絡：5 月 29 日（水）の 3 限に，2209 にて補講を行います．
また，2 週間後の 6/10（月）のこの授業時間に中間テストをする予定です．
場所は通常と異なり，2308 です．
範囲はこれまでやった所全部，ですが，ほとんどの問題は 2 章のベクトル空間（ベクトル空間とは，線形独立，従属，基底，次元，部分空間など）です．多項式や関数の空間には困難を感じてる人も多いようですから，半分以上は数ベクトルの話にします．(数ベクトルの問題がちゃんととれれば，中間試験の合格点には達する．)
今日のキーワード：ベクトルの成分表示，線型空間のまとめ

なお，今日 (5/27) のオフィスアワーは中止です（種々の用事のため）．

第 5 回レポート問題：

部分空間と基底についての念押し問題です．言うまでもないことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問 13： ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ の成分に対して，以下のように制限を付けて，$\mathbb{R}^4$ の部分集合 W を作る．それぞれの場合，W は $\mathbb{R}^4$ の部分空間になっているが，(1) その次元は何か？また，(2) その基底を一つ，答えよ．

(a) W は $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$ を満たすようなベクトルの全体．
(b) W は $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$ かつ $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$ を満たすようなベクトルの全体．

(b) については，連立方程式を解くのがちょっと大変に思えるかもしれないが，地道に変数を一つずつ消去すれば良い（もうちょっと効率の良いやり方は，今日の後半（？）と次回の補講でやります）．

問 14： 実数上で定義された関数の全体を V とし，この V に通常の関数としての「和」と「スカラー倍」を定義する（前回の問 10, 問 12 と同じように）．この V が線型空間になることは認めよう．以下のように定義した集合 W は V の部分空間になっているが（本当はこの事実も各自で確かめるのが望ましい），それぞれの次元と基底を求めよ．(基底は無数にあるから，一例を挙げれば良い．) なお，次元が無限大になる場合には，基底を挙げる必要はない．「○○の理由で，次元は無限大である」と答えればよい．

(1) W は 偶関数の全体．つまり，$f(x) = f(-x)$ となるような $f \in V$ の全体．
(2) W は (i) x の 4 次以下の多項式で，かつ (ii) 偶関数になっているもの，の全体（つまり，条件 (i)(ii) を両方満たしているものの全体）．
(3) W は (i) x の 4 次以下の多項式で，かつ (ii) 偶関数になっているもの，かつ (iii) $f(0) = 0$ となっているもの，の全体（つまり，条件 (i)(ii)(iii) のすべてを満たしているものの全体）．

問 15： （成分表示の問題）2 次以下の x の多項式の空間を V とし，今までの問 14 などと同様に普通に多項式の和とスカラー倍を定義する． また，$\boldsymbol{f} = 3 + 2x + x^2$ とする．

(1) V の基底として，$\langle 1, x, x^2 \rangle$ をとるとき，この基底に関する $\boldsymbol{f}$ の成分表示を求めよ．
(2) V の基底として，$\langle x^2, x, 1 \rangle$ をとるとき，この基底に関する $\boldsymbol{f}$ の成分表示を求めよ．
(3) V の基底として，$\langle 1, (x+1), (x+1)^2 \rangle$ をとるとき，この基底に関する $\boldsymbol{f}$ の成分表示を求めよ．

基底の取り方によって，同じ $\boldsymbol{f}$ でも異なる成分表示になることを理解してもらいたい．

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：

上の問に解答し，

5 月 31 日（金）　14:00（時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，2 枚以上にわたる場合は何らかの方法（ゼムクリップは不可）で綴じてくだされ．
レポートを出す時は，**レポートボックスの奥が上になるような向きで**入れて下さい．(ほとんどの人が協力してくれてるので，採点時のストレスがかなり減りました．どうもありがとう！)

―――――――――――――――――――― 先週のレポートの略解 ――――――――――――――――――――

今回のレポート，部分空間の基底で手こずった人が多かったようです．5/27 には復習を兼ねてもう少し説明します．講義の始めの方で断ったように，スペースを省略するため，縦ベクトルを ${}^t(x, y, z)$ のように書いたところがあります．

問 11： 部分空間の条件をすべてチェックする．とは言っても,「和」と「スカラー倍」が自分自身の中に入ってるかどうか，を見るだけだから，以前のレポート問題よりも簡単．

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ が W の元である場合，条件から

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0, \qquad y_1 + y_2 - y_3 = 0$$

が共になりたつ．

2 つの和は，もともとのベクトルの足し算（高校以来の普通のやつ）によって定義されていて $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ であるが，これが W の元か否かが問題．それを確かめるには，W の元である条件を確かめる．つまり，

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) - (x_3 + y_3)$$

がゼロになるか否か，ということだ．この場合，

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) - (x_3 + y_3) = x_1 + x_2 - x_3 + y_1 + y_2 - y_3 = 0 + 0 = 0$$

で確かに成り立つから，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$ であって，メデタシメデタシ．

次にスカラー倍を考える．k をスカラーとして，$k\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ kx_3 \end{pmatrix}$ が W の元であるか否かを考える．チェックすべき条件は

$$kx_1 + kx_2 - kx_3$$

がゼロか否か，ということであり，これも

$$kx_1 + kx_2 + kx_3 = k(x_1 + x_2 - x_3) = 0$$

でなりたつ．よって，和とスカラー倍が共に W 内にあるから，W は線型部分空間になっている．

最後に基底を求める．基底の定義は，しつこいけど,「一次独立」かつ「すべての元をそれらの線形結合で書ける」ことだった．条件

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

があるから，常に $x_3 = x_1 + x_2$ でないといけない．つまり，W の任意の元は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の形に書ける．つまり任意の元が**右辺の二つのベクトルの線型結合で書ける**．

更に，右辺の二つのベクトルが**独立である**のは（比例しないから）明らか．よって，この二つのベクトルが基底を作っている．つまり，基底の例は

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

もちろん，他にもいくらでも基底の例はある．以下のベクトルの 2 本をとってきたら，どれでも基底になっている：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \ldots \text{（こんな感じでいくらでもあります）}$$

(「2 本とって来たら基底になっている」ことは，その 2 本が独立である限りは，この部分空間の次元が 2 であることから保証される．)

非常に重要な注意：部分空間 W の基底は，<u>その部分空間 W に入ってるベクトル</u> から作る必要がある ―― 定義を参照．何人かの人が，W に入っていないベクトルを持って来て「基底」としていた．そんな事したら,「部分空間を過不足なく表す」役に立たないから，全く無意味だよ．

（注意）「基底が与えられれば，それが基底である事は納得できるが，どうやって基底を見つけたら良いかわからない」との質問が（毎年）あります．これはまあ，無理もないことで，ある程度の勘は必要です．が，一応，一般的な攻め方を書いておくと，

- 考えている空間を十分に張れるだけのベクトルを用意して，余分なベクトルを取り去って行く方法
- 逆に，少数の一次独立なベクトルから出発して，足りないベクトルを足して基底にする方法

があります.（まあ，すぐにおもいつく二つの方法を書いただけですが...）どちらが良いかは場合によるでしょう．この小問 (1) では十分な数のベクトルを用意して，それらが独立であることを示しました.

(2) 第一問をかなり詳しく説明したので，以下は簡単に行きます．(2) の W は部分空間ではありません.（理由）「和」や「スカラー倍」が W の外に出てしまうから．これは

$$x_1 + x_2 - x_3 = 3, \qquad y_1 + y_2 - y_3 = 3$$

から

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) - (x_3 + y_3) = x_1 + x_2 - x_3 + y_1 + y_2 - y_3 = 3 + 3 = 6,$$
$$kx_1 + kx_2 + kx_3 = k(x_1 + x_2 - x_3) = 3k$$

となることから明らか.（反例を一個だけ挙げるなら，例えば，${}^t(1, 0, 0)$ を考えれば良い.）なお，スカラー倍が W の外に出る，というのは厳密ではありません．正しくは「外に出る事もある」というべき.（$k = 1$ なら外に出ないからね.）

(3) 部分空間ではない．まあ，条件が $x_1 = (x_3)^3$ であって，これは 3 次曲線（曲がってる !! ）だから無理なのは直感的に明らか．より説得力を出すには,「和」と「スカラー倍」が一般には W に入らないことを示せば良い．例えば，${}^t(1, 0, 1)$ 同士の「和」は ${}^t(2, 0, 2)$ だが，これは W の元ではない.

(4) 部分空間ではない.「和」は W に入る．しかし，整数ではない数による「スカラー倍」は成分が一般には整数にならないから，W に入らない（ことが多い）.

(5) 部分空間ではない.「スカラー倍」は W に入る．しかし,「和」がダメである．例えば，${}^t(0, 1, 0) +^t (1, 0, 0) \notin W$.

問 12：

(1) 部分空間である.（証明）$f, g \in W$ の場合，$f(4) = g(4) = 0$ が成り立つ．その和 $h = f + g$ は $h(4) = f(4) + g(4) = 0 + 0 = 0$ で条件をみたす．またスカラー倍 $p = kf$ も $p(4) = kf(4) = k \times 0 = 0$ でやはり条件を満たす．つまり和とスカラー倍が W の中で定義できてるので部分空間.

（注意）特殊な例（例えば $f(x) = (x - 4)^4$ と $g(x) = (x - 4)^3$）のみを考えて，和やスカラー倍が W 内に入ってる，だから部分空間だ，とやった人が少しいた．**特殊な例をいくらやっても，証明にはなりません．（もちろん，問題を解くとっかかりとして特殊な例から始めるのは非常に有効です.）**

(2) これは部分空間ではない．上と同じように考えると $h(0) = (-1) + (-1) = -2$ でダメ．スカラー倍も $p(0) = k \times (-1) = -k$ で一般にはダメ.

（注意）部分空間ではない，ことを示すには**反例を一つ挙げれば十分**です —— 上の (1) との相違に注意．上では一応，一般的にダメなことを示していますが,「$f(x) = g(x) \equiv -1$ のときに $h(x) \equiv -2 \neq -1$ なので和がダメ」と言っても十分.

(3) これは部分空間である．4 次以下の多項式を足したら，やはり 4 次以下の多項式だから和は W 内に入ってる．スカラー倍しても 4 次以下の多項式ではあるから，スカラー倍も OK. 基底の例は $\langle 1, x, x^2, x^3, x^4 \rangle$.（詳細は省略するが，この 5 つの単項式が独立な事は明らか．また，4 次以下の多項式はもちろん，この 5 つの単項式の線型結合で書ける.）

（注）この問題，既に「4 次以下の多項式の空間」として線型空間の例として取り扱ったが，ここではより大きい V の部分空間として考えた．ただ,「和」と「スカラー倍」の定義が以前と全く同じなので，答えも同じになる.

(4) これは上の小問 (1) と小問 (3) の組み合わせ（それぞれの W の共通部分）．これが部分空間であるのは，(1) と (3) の両方の条件が成り立つ（和とスカラー倍が W に入ってる）から OK.

問題は基底であるが，(3) の $1, x$ などはダメである（なぜなら，W の元ではない）．ので，$f(4) = 0$ という条件をちゃんと考える必要がある．さて，**多項式**f が $f(4) = 0$ ということは，f が $(x - 4)$ で因数分解できる，ということだ．つまり，W のすべての元は $(x - 4)$ を因数に持つ形で因数分解できて，

$$f(x) = (x - 4)g(x)$$

の形に書けるはず．ここで，f が 4 次以下なので，g は 3 次以下の多項式（ここまでは f が W の元であるための必要条件）.

逆に，上の形で g が 3 次以下の多項式なら，絶対に W の元になっている（なぜなら，こんな f は 4 次以下であるし，$f(4) = 0$ は自動的に O.K.）．よって，うえの形に書けることが $f \in W$ の必要十分条件なのだ.

というわけで，あとは 3 次以下の多項式 g をどう表すか，を考えればよいが，それは $1, x, x^2, x^3$ で書く事ができる．ので，前の因子 $(x - 4)$ とあわせて，

$$\Big\langle (x - 4), (x - 4)x, (x - 4)x^2, (x - 4)x^3 \Big\rangle$$

が基底の一つである.（うえの 4 つの式が独立であることは一応，確かめたほうがよいかもしれないが，次数が違うものの集まりだから，これは明らかでしょう —— でも一度は自分で確かめた方が良い.）

（注）基底の別の例として $\Big\langle (x - 4), (x - 4)^2, (x - 4)^3, (x - 4)^4 \Big\rangle$ もある．こっちの方が形としてはきれいだね.（$x - 4 = y$ と思って，y の多項式を探すつもりになれば，この形に自然にたどり着くだろう.）

(5) 部分空間であることは,「和」と「スカラー倍」が W 内にある事を確かめれば良く，前回のレポートに酷似しているので略.

問題は基底だが，ともかく独立なベクトルを探してやる必要がある.「倍角の公式」「3 倍角の公式」を使ってできるだけ似た形のものにそろえよう.

$(\cos x)^n$ の形にそろえてみよう．高校の時に習った

$$\cos(2x) = 2(\cos x)^2 - 1, \qquad \cos(3x) = 4(\cos x)^3 - 3\cos x$$

を思い出すと，$\cos(2x), \cos(3x)$ は $1, \cos x, (\cos x)^2, (\cos x)^3$ の線型結合で書ける事がわかる．この 4 つが独立であることも

$$c_0 + c_1 \cos x + c_2 (\cos x)^2 + c_3 (\cos x)^3 \equiv 0$$

を解けば（$x = 0, \pi/4, \pi/2, \pi$ などを考える），c_j がみんなゼロであることからわかる．

そこで 1 が W の元である事がわかれば（ここ重要！ここをあまりちゃんと書いてない人がほとんどだった；まあ，当たり前と思って省略した人もいたのでしょうが）， 基底の一つとして $\langle 1, \cos x, (\cos x)^2, (\cos x)^3 \rangle$ がとれることがわかる．さて，1 が W の元であるか否かは，例えば倍角の公式を変形して $1 = 2(\cos x)^2 - \cos(2x)$ と書けば，(このような線型結合で書けるのだから）W の元であることがわかる．

もちろん，基底の例としては他にもいろいろある．他の自然な取り方としては $\bigl\langle 1, \cos x, \cos(2x), \cos(3x) \bigr\rangle$ があるが，別に 1 を入れる必要はない．例えば，$\bigl\langle (\cos x)^2, \cos x, \cos(2x), \cos(3x) \bigr\rangle$ なども立派な基底の例である — 問題から最短距離という意味では，こっちの方が良いかもしれない．

いくつかの注意：そろそろ，例年どおり，いろいろな注意をすべき時期となりました（学問的な意味で）．

- 以前の講義ノートには書いてありますが，n 項縦ベクトル（成分は実数）の空間を $\mathbb{R}^n$ と書きます．この場合，ベクトルの和とスカラー倍は，高校からの普通のやつ（成分事に足したり，スカラー倍する）です．
- ええと,「部分集合」と「部分空間」は全く別物です.「部分空間」と書くべきところを「部分集合」と書いてる人多数．気をつけましょう．
- また集合の用語ですが，集合 A, B と A の要素 a に対しては
  - $A \subset B$（A は B の部分集合）は「A は B に含まれる」
  - $a \in A$（a は A の元）は「a は A の要素（元）である」

  と言います．厳密には「a は A に含まれる」は間違いです —— とはいえ，僕もときどき，用語をごっちゃまぜにして使ってる事もありますが．
- 既に注意したけど，**部分空間 W の基底は，W の元であるベクトルで作る**ことが絶対条件です．これは「W そのものを線型空間とみなした場合の基底」という定義を良く思い起こせば自明です —— W だけで完結したストーリーにしなさい，ということなので，W に入ってないベクトルを使ってはいけません．ここを忘れてる人がたくさんいました．
- 多項式の空間や $\cos x$ などの線形結合の作る空間の問題を出していますが，この際,（解っているのだろうが）基底の書き方がおかしい人が散見されます．多項式の空間 V を例に取れば，基底は例えば $\langle 1, x, x^2 \rangle$ などとなります —— 基底を作っている「ベクトル」は 1 とか x とかの多項式で，これは「V の基底は V のベクトルから作る」鉄則から言えば当たり前．ところが，これを

  $$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{または} \qquad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

  などと書いている人がいます．これらは単に，数でできたベクトルであって，その成分が $(1, 0, 0)$ とか $(0, x, 0)$ である，と言ってるにすぎません．つまり，これらのベクトルは単に数が並んだものであって，本来の多項式ではありません．この違いを良く認識して，答えはちゃんと多項式（や $\cos x$ とか）で書くようにして下さい．**自分が扱っている対象は何なのか**をはっきりさせれば，このような変な解答は出ないはずです．

6 月 3 日の連絡：1 週間後の 6/10（月）のこの授業時間に中間テストをする予定です．**場所は通常と異なり，2308 です．**

「線型空間の定義」は試験問題の最初か最後に載せます．それ以外の事項はもちろん，皆さんの頭の中が頼りです．

範囲はこれまでやった所全部（ただし，ノートの 3 章 — 掃き出し法 — まで），ですが，ほとんどの問題は 2 章のベクトル空間（ベクトル空間とは，線形独立，従属，基底，次元，部分空間など）からです．
多項式や関数の空間には困難を感じてる人も多いようですから，半分以上は数ベクトルの話にします．(数ベクトルの問題がちゃんととれれば，中間試験の合格点には達するということ.)

今日のキーワード：線型空間のまとめと行列など（線型写像も少し）
なお，今日出題のレポートはありません．

先週のレポートの略解

今回はできていた人が前回よりも増えました．

問 13： (a) $x_1+x_2+x_3-x_4=0$ ということは，$x_4=x_1+x_2+x_3$ さえ満たせば，x_1,x_2,x_3 は任意で良い，ということだ．つまり，W の任意の元は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1+x_2+x_3 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \qquad x_1,x_2,x_3 \text{ は任意}$$

と書ける．右辺に出ている 3 つのベクトルは一次独立である（注意：試験ではなぜ線型独立か，ある程度の理由や計算も述べる事！）．また，上に示したように，この線型結合で W の任意の元を表せる．従って，この 3 つのベクトルは基底になっている．よって，次元は 3，基底の一つは

$$\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} \right\rangle$$

(b) $x_1+x_2+x_3-x_4=0$ かつ $x_1-x_2-x_3-x_4=0$ を解くと，

$$x_2+x_3=0 \quad \text{かつ} \quad x_1-x_4=0 \qquad (\text{これらを満たす限り},\ x_j \text{ は任意})$$

となる．上の 2 つが同値なのは，元の 2 式を足し引きすると新しい 2 式になり，逆に新しい 2 式を仮定すれば元の 2 式が成り立つことからわかる．(このような連立方程式は，先週補講の掃き出し法でやれば系統的に解けますが，この例くらいだったらうまく足し引きした方が楽ですね.)

従って，W の任意の元は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}, \qquad x_1,x_2 \text{ は任意}$$

と書ける．よって次元は 2，基底の一つは

$$\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix} \right\rangle$$

である．

（注）小問 (a) の W を W_a，小問 (b) の W を w_b と書くと，W_b は W_a の部分空間になっている（why?）．このような場合，W_a の基底をうまくとってやると，その基底を作るベクトルから何個かを取り除いて W_b の基底を作ることができる．別の言い方をすると，W_b の基底を作るベクトルに何個かを付け加えて W_a の基底を作ることができる．今の場合，W_a の次元が 3，W_b の次元が 2 であるから，付け加えるベクトルは 1 個である．

実際，上で示した (b) の基底にベクトル ${}^t(0,0,1,1)$ を付け加えて

$$\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} \right\rangle$$

を作ってみると，これは W_a の基底になっていることがわかる（基底になっていることはどうやったら示せるか？各自で復習すること）．

問 14： 部分空間になっていることのチェックは略．

(1) 次元は無限大なので，基底は挙げにくい．次元が無限大である分かりやすい理由は，V の元 $1, x^2, x^4, \ldots, x^{2n}$ がすべて**独立**だからである．(だから，例えば，x^{2n} を残りの $1, x^2, \ldots, x^{2n-2}$ の線型結合では書けない．) ここで n は任意なので，結局，有限個のベクトルをとって，V の元をその線型結合で表すことはできない．

(注 1) $x^2, x^4, x^6, \ldots$ などが「独立」であることに言及していない人が多数，いました．アタリマエだと思って書かなかったのだと思いますが，一応，書きましょうね．
(注 2)「偶関数は無数にあるから無限次元」とした人も案外，多かったです．いいたい事はわかりますが，これでは理由になってません．なぜなら，2 次以下の多項式で偶関数のもの（$a + bx^2$）も無限個ありますが，これの作る空間は 2 次元です．**次元が無限大というのと，無限個の要素からなることは全く別の概念だということ**は一応，しっかり理解しておきましょう．

(2) まず，(i) の条件を満たす多項式は $1, x, x^2, x^3, x^4$ の線型結合で書ける．つまり，$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ の形をしている（a_j は任意の実数）．ここで (ii) の条件も課すと，偶関数であるとは $f(x) \equiv f(-x)$ ということなので，これから $a_1 = a_3 = 0$（a_0, a_2, a_4 は任意）となる．つまり，題意を満たすのは $1, x^2, x^4$ の任意の**線型結合**である．高校から散々やった知識により，この 3 つのベクトルは**独立**である．よって基底の一つは $\langle 1, x^2, x^4 \rangle$ で，次元は 3．

(3) 上の問で，条件を満たす必要条件として $f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4$ というのが出ていた．これに更に (iii) の条件を課すと，$a_0 = 0$ となる．つまり，題意を満たすのは x^2, x^4 の任意の**線型結合**である．この二つは（上の 3 つのが独立なんだから）**独立**である．よって基底の一つは $\langle x^2, x^4 \rangle$ で，次元は 2．

問 15： ともかく，定義通りやってみましょう．

(1) $\boldsymbol{f} = 3 + 2x + x^2$ という線型結合なので，この係数を最初から拾って $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ が答え．
(2) 今度は基底を作ってるベクトルの順序が違います．降べきの准ですから $\boldsymbol{f} = x^2 + 2x + 3$ と書いてみて，この最初から係数を拾う．答えは $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ですね．
(3) 今度は $1, (x+1), (x+1)^2$ で展開しろ，と言ってるのですね．つまり $\boldsymbol{f} = b_0 + b_1(x+1) + b_2(x+1)^2$ と書いてみて，この係数 b_0, b_1, b_2 を拾えばよろしい．実際に係数比較で係数をもとめると $\boldsymbol{f} = (x+1)^2 + 2 = 2 + 0 \cdot (x+1) + 1 \cdot (x+1)^2$ となるので，答えは $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$．

重要な注意： 前回に注意したにもかかわらず，今回も基底の書き方がおかしい人が少し，いました．基底というのは，あくまで，**考えている線型空間のベクトルの集まり**です．以下の 2 つの例は，その意味で，意味を持ちません．

(1) 問 11 で基底を $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ と書いた例．問 11 で考えているのは，$\mathbb{R}^4$（成分が 4 つある，縦ベクトルの空間）です．だから，基底はこのような縦ベクトルの集まりになるはず．一方，$\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ は単に数 x_1, x_2, x_3 の集まりですよ．
まあ，言いたい事はわかります．$\boldsymbol{x}$ を線型結合の形で書いたので，x_1, x_2, x_3 がかかっているベクトルを書きたかったんですよね．でも，上に述べたように，この書き方は酷すぎる．

(2) 問 12 で，前回に引き続き $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ などと書いた例．似たような例としては $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x^4 \end{bmatrix} \right\rangle$ というのもあった．
問 12 では「関数の集合」や「多項式の集合」を考えているのだから，今度は基底を作るベクトルの一つ一つは多項式や関数であるべきで，上のような縦ベクトルが入る事はあり得ません．
これも言いたい事はわかります．もともとの関数の空間に $\langle 1, x^2, x^4, x^6, \ldots \rangle$ という基底を導入して，その前の 3 つをとるつもりなんでしょう．でもそれならそのように書けば良いのです．$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x^4 \end{bmatrix}$ というのは，あくまで，「第 3 成分が x^4 である数のベクトル」です．

数学において，余り神経質に記号にこだわるのは良くない事です．しかし，上の二つの例は，自分が何を書いているのかに余りに無頓着すぎます．もっというと，よく分かっていないのに無理に過去の知識に合わせて書こうとしている印象を受けます．(それでも，訳も分からずに解答を丸暗記するよりは良いのですが．)
このような解答は試験では該当部分を零点とせざるを得ません．「なんとなくそれっぽい答えを書いてみる」のではなく，**自分が書いてるのが何なのか**を是非，自覚して頂きたいと思います．それによって，もっと理解が深まるだろうから，このようにしつこく注意しているのです．

なお，細かな注意として，基底を書く時は $\langle 1, x^2, x^4, x^6 \rangle$ のように，括弧で挟んで下さい．(これもなかなか定着しない人がいます．)

(追加の注意)「多項式」というのは，1 と「x の正のベキ」の線型結合を言います．負のベキや，$\sin x$ などはもちろん，入りません！

6 月 17 日の連絡：7 月 1 日（月）は休講です.（その代わりは，既に 5/29 にやりました.）
今日のキーワード：線型写像

第 6 回レポート問題：線型写像の基本的な問題（線形性を理解するための）です.

言うまでもないことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください.

問 16： 講義に配った「講義ノート」p.25 の問 2 を解け．再録すると問 2 とは以下の通り：

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が線型写像で，$f(3) = 1$ だと言う．このとき，$f(5)$ はいくらか？
- 上の f に対して，$f(x) = 10$ となる x を求めよ.

問 17： 講義に配った「講義ノート」p.25 の問 3 を解け．再録すると問 3 とは以下の通り：

- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が線型写像で，$g\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ かつ，$g\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ だと言う．このとき，$g\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$ と $g\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$ を求めよ.
- 上の g に対して，$g(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$ となるようなベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ を求めよ.

問 18： 講義に配った「講義ノート」p.25 の問 4 を解け．再録すると問 4 とは以下の通り：

- $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ が線型写像で，$h\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$，$h\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ かつ，$h\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ だと言う．このとき，$h\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)$ と $h\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ を求めよ.
- 上の h に対して，$h(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$ となるようなベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ はあるか？

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ.

レポート提出について：

上の問に解答し，

6 月 21 日（金）　14:00 （時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法（ゼムクリップは不可）で綴じてくだされ.
レポートを出す時は，**レポートボックスの奥が上になるような向きで**入れて下さい.（ほとんどの人が協力してくれてるので，採点時のストレスがかなり減りました．どうもありがとう！）

6 月 24 日の連絡：7 月 1 日（月）は休講です.（その代わりは，既に 5/29 にやりました.）
今日のキーワード：線型写像，表現行列，核空間と像空間（時間があれば）

第 7 回レポート問題：線型写像の問題（線型性の理解と表現行列）です.

問 19： 写像 f が以下の性質を満たしている．それぞれの場合について，f が線型写像ではあり得ないものを挙げ，その理由（なぜ線型写像でないか）を説明せよ.

(a) f は実数から実数への写像で，$f(1)=2, f(3)=4$

(b) f は 2 項縦ベクトルの空間 $\mathbb{R}^2$ から実数の空間 $\mathbb{R}$ への写像で，$f\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=1$ かつ $f\left(\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\right)=2$

(c) f は 3 項縦ベクトルの空間 $\mathbb{R}^3$ から実数の空間 $\mathbb{R}$ への写像で，$f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)=1$ かつ $f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=2$ かつ $f\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)=3$

(d) f は 3 項縦ベクトルの空間 $\mathbb{R}^3$ から実数の空間 $\mathbb{R}$ への写像で，$f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)=1$ かつ $f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=2$ かつ $f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=4$

問 20： 行列 A，および $\mathbb{R}^3$ の基底 E, F を以下のように定義する：

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\2&2&2\end{bmatrix},\qquad E=\left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\rangle,\qquad F=\left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\rangle$$

また，$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ に $A\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ を対応させる写像として，線型写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を定義する（ここで $A\boldsymbol{x}$ は行列 A とベクトル $\boldsymbol{x}$ の積である）.

(1) 基底 E, E に関する f の表現行列は何か？(アタリマエの答えになるが，念のために訊いた.)
(2) 基底 F, F に関する f の表現行列を求めよ.（この基底 F がどんな意味を持っているかは来学期のお楽しみ.）
(3) 基底 F, E に関する f の表現行列を求めよ.

注意： 上の問 (1)(2)(3) で例えば「基底 F, E に関する f の表現行列」(先に F，後から E）というのは，線型写像 $f: X\to Y$ の表現行列で,「X の基底としては F を用い，Y の基底としては E を用いた場合」のものを求めよ，という意味である.

問 21： V を x の 2 次以下の多項式の空間（和とスカラー倍はいつも通り定義）とし，線型写像 f を「$p(x)$ を $p'(x)$ にうつす写像（ここで $p'(x)$ とは $p(x)$ の導関数)」として定義する．V の基底 $\langle 1, x, x^2\rangle$ に関する f の表現行列を求めよ.

言うまでもないことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください.

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ.

レポート提出について：上の問に解答し，

7 月 5 日（金）　14:00 （時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，2 枚以上にわたる場合は何らかの方法（ゼムクリップは不可）で綴じてくだされ.
レポートを出す時は，**レポートボックスの奥が上になるような向きで**入れて下さい.（ほとんどの人が協力してくれてるので，採点時のストレスがかなり減りました．どうもありがとう！)

——— 先週のレポートの略解 ———

問 16： f が線型なので，任意の $k, x\in\mathbb{R}$ に対して，

$$f(kx)=kf(x)$$

が成り立つはず.（共に実数で区別しにくいが，k はスカラー倍の k，x はベクトルの x のつもり）．よって，

$$f(5)=f\left(\frac{5}{3}\cdot 3\right)=\frac{5}{3}f(3)=\frac{5}{3}.$$

また，$f(x)=10$ のとき，$x=k\cdot 3$ と表せる k を探すと（$x\neq 0$ は明らかゆえ，こんな k は絶対にある)，

$$10=f(x)=f(k\cdot 3)=kf(3)=k$$

より，$k=10$．よって $x=30$ が答え.

問 17： ノリは問 16 と同じである．$\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ のとき，$f(\boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{a}) + \beta f(\boldsymbol{b})$ であるから，求めたいベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して，上のような表現を行えば良い．具体的には

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

であるから，

$$f\Bigl(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\Bigr) = \frac{1}{2}f\Bigl(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\Bigr) + \frac{1}{2}f\Bigl(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\Bigr) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \qquad f\Bigl(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\Bigr) = \frac{1}{2}f\Bigl(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\Bigr) - \frac{1}{2}f\Bigl(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\Bigr) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

次に，$\boldsymbol{x} = \alpha\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ が $f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$ を満たすなら，

$$\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix} = f(\boldsymbol{x}) = \alpha f\Bigl(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\Bigr) + \beta f\Bigl(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\Bigr) = \frac{\alpha}{2}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} + \frac{\beta}{2}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\alpha+\beta\\4\alpha+2\beta\end{bmatrix}$$

となっているはずで，$3\alpha+\beta = -6, 4\alpha+2\beta = 10$．これを解くと，$\alpha = -11, \beta = 27$．よって，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}-11\\27\end{bmatrix}$.

問 18： ノリは問 16,17 と全く同じである．

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

なので（右辺の 3 つのベクトルは一次独立ゆえ，表し方は一通り），

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) - f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}, \qquad f\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) - f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$$

となる．最後に，$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$ となる $\boldsymbol{x}$ を求める．

$$\boldsymbol{x} = \alpha\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix} = f(\boldsymbol{x}) = \alpha f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) + \beta f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) + \gamma f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \alpha\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

となるはずだから，$2\alpha+\gamma = -3,\ 2\beta+\gamma = 5$ となれれば良い．これは $\beta = \alpha+4,\ \gamma = -2\alpha-3$ なら任意の α でなりたつ．ので，こんな $\boldsymbol{x}$ は存在し，その具体形は（$\alpha \in \mathbb{R}$ は任意）

$$\boldsymbol{x} = \alpha\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + (\alpha+4)\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + (-2\alpha-3)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\0\\1\end{bmatrix}$$

となる．うえで任意のスカラー α がでてきたのが変に思える人もいるかもしれないが，これはベクトル ${}^t(2,1,0)$ が f の核空間を張っていることを理解すればわかる．詳しくは（今日か次回の）講義で．

別解 上の問 17,18 は問題の線型写像の表現行列（今日，やる予定）を求めて計算しても良い．先取りすると以下の通り：「$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線型写像 f は，適切な $m \times n$ 行列 A_f を用いて，$f(\boldsymbol{x}) = A_f\,\boldsymbol{x}$ と書ける.」 これを用いて，A_f を一気に求めてしまうわけである．

問 17 なら，2×2 行列 A を用いて $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となるはずで（そのような A を求めたい），題意より

$$A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \qquad A\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

となっているはずだ．これはまとめて

$$A\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 1\end{bmatrix}$$

とも書ける．ので，A は（高校の時にやったかもしれない）逆行列を用いて

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 1\end{bmatrix}\Bigl(-\frac{1}{2}\Bigr)\begin{bmatrix}-1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 1\\4 & 2\end{bmatrix}$$

と求められる．ので，後はこの行列に $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ や $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ をかければ，答えが得られる．また，$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$ となる $\boldsymbol{x}$ は

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix} \qquad\Longrightarrow\qquad \boldsymbol{x} = A^{-1}\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$$

となるので，逆行列を計算すればよい．(ただし，この講義では逆行列の計算法などは秋学期の始めごろにまとめてやります．2×2 なら高校で知ってると思うけど.) 実のところ，このようにやっても，あんまり得にはならないが，参考のために解説した．

7 月 8 日：帰国しました．久しぶりに研究三昧の一週間でした．
今日のキーワード：線型写像，核空間と像空間
7/15 は休日ですが，代わりに，7/16（火）に線型代数（月の授業）があります．

第 8 回レポート問題： 線型写像に関する問題です．言うまでもないことですが，レポート問題は少なめに出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問 22： 行列 A を $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ と定義する．さらに $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に $A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を対応させる写像として，線型写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を定義する（ここで $A\boldsymbol{x}$ は行列 A とベクトル $\boldsymbol{x}$ の積である；またこの行列 A や線型写像 f は問 20 と同じものである）．

(1) f の核空間と像空間をそれぞれ求めよ（集合の形で書け）．
(2) f の核空間と像空間の次元と基底を求めよ．もちろん，基底は何通りもありうるから，基底の一つを答えれば良い．

問 23： $X = \mathbb{R}^3$ から $Y = \mathbb{R}^3$ への線型写像 f が以下を満たしているという．

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{かつ} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{かつ} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

このとき，
(1) f の核空間と像空間をそれぞれ求めよ（集合の形で書け）．
(2) f の核空間と像空間の次元と基底を求めよ．
(3) 標準基底に関する f の表現行列を求めよ．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：

上の問に解答し，

7 月 12 日（金）　14:00 （時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，2 枚以上にわたる場合は何らかの方法（ゼムクリップは不可）で綴じてくだされ．

—— 先週のレポートの略解 ——

問 19：

(a) あり得ない．なぜなら，線型性より $f(3) = 3 \times f(1) = 6$ のはず．
(b) これだけでは「あり得ない」とはいえない（線型写像である可能性が十分にある）．なぜなら，${}^t(1,1)$ と ${}^t(2,0)$ は独立なので，勝手に線型写像の値を設定できるから．
(c) 前問 (b) と同じく，3 つのベクトルが独立なので,「あり得ない」とはいえない（線型写像である可能性が十分にある）．
(d) これはあり得ない．なぜなら，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるが，対応する f の値は和になっていないから．

以上より，線型写像であり得ないのは，(a) と (d) である．(b) と (c) は，上で述べたように，線型写像である可能性が高い．（しかし，他のベクトルでの値がわからないから，線型写像であるとは断言できない —— この点，(b)(c) を線型写像と断言している解答が多く見られました.）

問 20： 定義通りにやり，理解するための問題です．一般論を思い出すと基底 E, E' に関する表現行列は（$E = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ として）

$$\Big[[f(\boldsymbol{v}_1)]_{E'}, [f(\boldsymbol{v}_2)]_{E'}, \ldots, [f(\boldsymbol{v}_n)]_{E'} \Big]$$

でしたから，これをそれぞれの場合できっちり書けばよろしい．

(1) 基底 E とは，一番簡単な，普通の基底だ．$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ なので，これらの行き先はそれぞれ $f(\boldsymbol{v}_1) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, f(\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}, f(\boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ である．これらの右辺は，正に $f(\boldsymbol{v}_j)$ を基底 E で展開したものの係数を与えている．よって，これらを集めて答えは

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\2&2&2\end{pmatrix}.$$

(2) 今度は $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ であって，これらの行き先は $f(\boldsymbol{v}_1) = \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} = 3\boldsymbol{v}_1$，$f(\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix} = 2\boldsymbol{v}_2$，$f(\boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\boldsymbol{v}_3$ である．従って，一般論から，表現行列は $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ となる．(ここで注意すべきは，右辺のベクトルを基底 F で展開する事．)

(3) これはちょっと厄介だ．出発点の方は F を用いるので，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ を考える．従って，行き先は (2) でやったように，$f(\boldsymbol{v}_1) = \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix}, f(\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}, f(\boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ である．

今度は (2) と異なり，これを E で展開しないといけないのだが，E は標準基底だから，ここに出ている成分がそのまま成分表示になる．従って，表現行列はこの 3 つを並べて $\begin{pmatrix}3&2&0\\0&-2&0\\6&2&0\end{pmatrix}$ となる．

問 21： やり方は問 [20] と全く同じ．基底のメンバーとして $\boldsymbol{v}_1 = 1, \boldsymbol{v}_2 = x, \boldsymbol{v}_3 = x^2$ をとると，行き先は $f(\boldsymbol{v}_1) = 0, f(\boldsymbol{v}_2) = 1 = \boldsymbol{v}_1, f(\boldsymbol{v}_3) = 2x = 2\boldsymbol{v}_2$ である．よって表現行列は $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ となる．

表現行列についての注意： 予想された通り，かなりの人が表現行列で苦しんでいました．これは式をボンヤリ見ていてもわかりません．実際に手を動かして，$[f(\boldsymbol{v})]_E$ などが何を意味するのか，一つ一つ確かめる事が大切です．しかしまあ，あまり抽象的ではわからない，という人もいるでしょうから，表現行列についての少し別の捉え方を示しておきます．

今，線型空間 X から Y への線型写像 f を考え，X の基底を $E = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n \rangle$，$Y$ の基底を $F = \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_m \rangle$ として，基底 E, F に関する f の表現行列を考えます．まず，ベクトル $\boldsymbol{x} \in X$ の基底 E に関する成分表示 $[\boldsymbol{x}]_E$ とは，$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ と展開した時の係数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を縦に並べたものでした．同じように，ベクトル $\boldsymbol{y} \in Y$ の基底 F に関する成分表示 $[\boldsymbol{y}]_F$ とは，$\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{f}_1 + y_2\boldsymbol{f}_2 + \cdots + y_m\boldsymbol{f}_m$ と展開した時の係数 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ を縦に並べたものです．それでこのときの表現行列とは

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\cdot\\\cdot\\y_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdot&\cdot&\cdots&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdots&\cdot\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\x_n\end{pmatrix}$$

と書けるような行列のことです．講義ノートの一般論がわかりにくい人は，具体的に，上のように書ける行列を探してみるのも一法でしょう（実際，このように解いた人もいました）．なお，表現行列は「基底の取り替えの行列」の一般論から求める事ができますが，混乱しやすいので，この講義では扱いません．(斎藤正彦さんの参考書には詳しく載っています．)

7 月 16 日（今日は月曜の授業）の連絡：**まず，お詫び．先週から酷い風邪で寝ていたため，まだ回収したレポートの採点が終っていません．申し訳ありませんが，これは来週の授業のときに（今週の出題分と併せて）返します．**

来週（7/22）は通常通りの授業（＋授業アンケート）をします．その次，7/29 は休講です．なお，今学期は十分に予定を消化したので，7/29 分の補講は行いません．各自，試験のための勉強時間と思って自学自習に励んで下さい．

教務課の掲示通りに（8/5 のはずですが，各自で確認して下さい）期末試験をします．
試験範囲は今学期にやったところ全部，です．が，特に

- 2 章の線型空間（線型空間とは，線型独立と従属，基底と次元，部分空間など）と
- 5 章の線型写像（線型写像とは，像空間と核空間，階数，表現行列など）

が主になるでしょう．なお，表現行列で苦労している人が多いようですが，表現行列は，完全には解らなくてもなんとかなる問題がほとんどと思います．
ただし，連立方程式が解けないと答えにたどり着けないと思うので，連立方程式を確実に解けるようにもなっていて下さい．

期末試験では「A4 の紙一枚（片面だけに書いたもの；原則として手書き）」の持ち込みを認めます．学生番号と氏名を書いて，試験当日，答案とともに提出して下さい．「自分は持ち込み無しで受ける」という人は，学生番号と名前を書いた「A4 の紙」を提出して下さい．

（補足説明）

- 原則として，持ち込み用紙は採点しません．ただし，(以下の方針から判断して）非常に良いものを作った場合には，ホンの少しだけ良いことがあるかもしれません．
- 持ち込みを認める理由：ある程度の分量の概念（特に表現行列）が出て来たため，**持ち込み用紙を自分で書いて，全体を整理する手助けとしてもらいたい**，というのが最大の狙いです．
- 「持ち込み用紙を自分で準備することを通して勉強する」ことが最大の狙いですから，皆さんには，自分で持ち込み用紙を準備する事を奨めます．友達と協力して持ち込み用紙を作成した場合は，「○○さんと一緒に作りました」と明記して下さい．このような明記がないのに，非常によく似たものが複数現れた場合には，それなりの措置を講じるかもしれません．
- まちがっても，試験対策委員の作成したものを多数の人間が持ち込む，などはやらないでくださいね．しつこいけど，自分で勉強してまとめる，のが最大の目的です．試験対策委員の作ったものを持ち込んでも何の役にも立ちません．(自分でまとめが作れない人は，その程度の実力だということです．その時点で諦めるか，死にものぐるいで勉強するかしかないでしょう．)
- 例題とその解答を延々と書く事はルール違反ではないけども，勉強にならないので，お勧めしません．あまりに酷い場合には減点する可能性があります．
- **「線型空間の定義」などは試験問題には書きません．** 必要と思う人は上の A4 の範囲内に自分で書いて下さい．
- なお，このように持ち込み用紙は提出してもらうので，提出前にコピーを取っておく方が無難です — 持ち込み用紙も答案と一緒に返却の予定ですが，返却までのタイムラグがありますから．

言わずもがなの注意：持ち込みを認めるという事は，それだけ問題が厄介になる可能性があるということです．決して「持ち込みだから楽勝」などと思わないでください．

今日のキーワード：核空間と像空間，線形写像の階数

第 9 回レポート問題：

問 24： $X = \mathbb{R}^3$ から $Y = \mathbb{R}^3$ への線型写像 f が以下を満たしているという．

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \quad \text{かつ} \quad f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix} \quad \text{かつ} \quad f\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\-1\\-2\end{bmatrix}$$

以下の小問に答えよ（解答の順序はどのようにしても良い．ただし，採点の便宜を考えて，どの小問の答えがどれか，がわかるように明記して下さい.）

(1) f の核空間と像空間の次元と基底を求めよ．
(2) f の階数を求めよ．
(3) 標準基底に関する f の表現行列を求めよ．
(4) $f\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\right)$ を求めよ．

問 25： 3 次以下の x の多項式の全体が作る線型空間（「和」と「スカラー倍」はいつものやつ）を V とする．V の線型写像 F として

$$p(x) \in V \quad を \quad p'(x) \in V \quad に写す写像$$

を考える（p' は多項式 $p(x)$ の x に関する微分）．以下の小問に答えよ（解答の順序はどのようにしても良い．ただし，採点の便宜を考えて，どの小問の答えがどれか，がわかるように明記して下さい.）

(1) （しつこいけど）基底 $\langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ に関する，F の表現行列を求めよ．
(2) F の像空間と核空間の基底と次元をそれぞれ求めよ．
(3) F の階数は何？

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：

上の問に解答し，

7 月 19 日（金）　15:00 （時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法（ゼムクリップは不可）で綴じてくだされ．

—————— 先週のレポートの略解 ——————

問 22： （問題の解答に入る前に注意）「集合の形で書け」と言うことなので，単に像と核を縦ベクトルの集まりとして書けば形式上は正解です．最も手抜きの書き方としては

$$像は \ \left\{ A\boldsymbol{x} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \right\}, \qquad 核は \ \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$$

というものですが，これはちょっと騙されたみたいな感じがするかもしれませんし，まあ，常識的に考えてもうちょっと「解いて」から書いて下さい，とは思います．ということで，本当は以下に示すようなものを望んでいました．試験の場合はこのようなややこしさを避けるため,「基底と次元」を訊きますからご安心を．

(では解答例の本論．まずは，深く考えない場合の解答.)
以下，(1)(2) をまとめて解答します．まず，具体的に写像を書いてみると

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad の行き先は \qquad A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ 2y \\ 2x+2y+2z \end{bmatrix}$$

となっている．
核空間は上の右辺が零ベクトルになるような $\boldsymbol{x}$ の全体だ．具体的には x, y, z が連立方程式

$$x + z = 0, \qquad 2y = 0 \qquad 2x + 2y + 2z = 0$$

を満たすような $\boldsymbol{x}$ の全体である．この連立方程式は 3 つの式からなるが，３番目の式は 1 番目と 2 番目からすぐにでる．従って，これははじめの 2 つ，つまり

$$x + z = 0, \qquad y = 0$$

と同値であり，要するに，$y = 0$ かつ $z = -x$（x は任意）というわけ．従って，

$$\mathrm{Ker}\ f = \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \,\middle|\, x \text{ は任意} \right\} \text{ であり，その基底の一つは } \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ で，次元は } 1$$

像空間の方は

$$\begin{bmatrix} x+z \\ 2y \\ 2x+2y+2z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = (x+z) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 2y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の全体が作る空間である．これは右辺に出ている 2 つのベクトルで張られており，またこの 2 つのベクトルは線形独立である（今は二つのベクトルが独立か否かを知りたいので，比例するかどうかを考えればよろし）．従って集合の形で書くと，

$$\mathrm{Im}\ f = \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, s, t \text{ は任意} \right\} \text{ である．その基底の一つは } \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ で，次元は } 2.$$

(次に，前回の問 20(2) を利用する方法)

前回と同じく F のベクトルを $F = \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3 \rangle$ と書く．前回のレポート問 20 の (2) の解答によると，

$$f(\boldsymbol{f}_1) = 3\boldsymbol{f}_1, \quad f(\boldsymbol{f}_2) = 2\boldsymbol{f}_2, \quad f(\boldsymbol{f}_3) = \boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{f}_3$$

であった．従って，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{f}_1 + x_2\boldsymbol{f}_2 + x_3\boldsymbol{f}_3$ と展開した場合，行き先が

$$(*) \qquad f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{f}_1 + x_2\boldsymbol{f}_2 + x_3\boldsymbol{f}_3) = x_1 f(\boldsymbol{f}_1) + x_2 f(\boldsymbol{f}_2) + x_3 f(\boldsymbol{f}_3) = 3x_1\boldsymbol{f}_1 + 2x_2\boldsymbol{f}_2$$

となることがわかっている.（以上，既に前回の解答で出したことの復習.）

これから像と核を出してみよう．まず像の方は，(*) の線型結合全体（x_1, x_2 は任意だから）になるから，

$$\mathrm{Im}\ f = \left\{ s\boldsymbol{f}_1 + t\boldsymbol{f}_2 \,\middle|\, s, t \text{ は任意} \right\} \quad \text{となって，その基底の一つは } \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \rangle \text{ で，次元は } 2$$

となる．また，核の方は (*) が零ベクトルになるものだから，$x_1 = x_2 = 0$ が必要充分である．つまり，$\boldsymbol{x} = x_3\boldsymbol{f}_3$（$x_3$ は任意）であるから，

$$\mathrm{Ker}\ f = \left\{ s\boldsymbol{f}_3 \,\middle|\, s \text{ は任意} \right\} \quad \text{となって，その基底の一つは } \langle \boldsymbol{f}_3 \rangle \text{ で，次元は } 1$$

となる．もちろん，この答えは最初に示したものと一致する．

問 23： いちいち縦ベクトルを書くのは大変なので，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

とおく．問題の条件は，f が

$$f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{b}_1, \qquad f(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{b}_2, \qquad f(\boldsymbol{a}_3) = \boldsymbol{b}_3 \tag{2}$$

を満たしている，ということである．

まず，事前に $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$ は一次独立であり（これをチェックする方法は今までに散々やったのでここでは略），3 本からなっているので，$\mathbb{R}^3$ の基底をなしていることに注意しておこう．これはつまり，$\mathbb{R}^3$ の任意の元をこの 3 つのベクトルの線型結合で書けることを意味する．よって任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $f(\boldsymbol{x})$ が計算できることになる．具体的に書くと，$\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 \tag{3}$$

と線型結合の形で表すと，

$$f(\boldsymbol{x}) = f(c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3) = c_1 f(\boldsymbol{a}_1) + c_2 f(\boldsymbol{a}_2) + c_3 f(\boldsymbol{a}_3) = c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 \tag{4}$$

となるはずなのだ．

また，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ も一次独立かどうかを見ておこう．これは $c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0}$ を解けばわかる．この解は

$$c_1 = -6c_3, \quad c_2 = \frac{9}{2}c_3 \quad (c_3 \text{ は任意}) \tag{5}$$

となって，**一次独立ではない**．特に

$$12\boldsymbol{b}_1 = 9\boldsymbol{b}_2 + 2\boldsymbol{b}_3 \tag{6}$$

が成り立つことに注意しておく．以下ではこれらの事実をふんだんに用いる．

像空間 からやる．上で見たように，任意の $\boldsymbol{x}$ に対する $f(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ の線型結合で書ける．ので，像空間はこの 3 つのベクトルで張られる空間だ．この 3 つのベクトルは一次独立ではなく，(6) の関係を満たしている（また，$\boldsymbol{b}_2$ と $\boldsymbol{b}_3$ は明らかに一次独立である）．従って像空間の基底は $\langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 \rangle$，その次元は 2 であって，

$$\mathrm{Im}\ f = \left\{ s\boldsymbol{b}_2 + t\boldsymbol{b}_3 \,\middle|\, s \text{ と } t \text{ は任意のスカラー} \right\} \tag{7}$$

となる．もちろん，ここは $\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$ や $\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3 \rangle$ を基底として採用してもよい．

（2012 年度の注意：参考までに載せます） 2012 年度は以下のような間違いが目立ちました．それは，ある程度，上のような議論をやった後で，特に，$\boldsymbol{b}_1 = f(\boldsymbol{a}_1)$ と $\boldsymbol{b}_2 = f(\boldsymbol{a}_2)$ が像空間を張っていることを示した上で,「像空間の基底は $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$」とやるものです．これは明らかに像空間の定義を取り違えています．像空間は行き先の空間 Y の部分空間ですから，その基底も Y の元でないといけません．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は像空間の基底 $\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$ を作る素のベクトルであって，像空間の基底ではないのです．ここのところ，各自で良く，考えてください．

核空間 をやろう．これは表現行列を求めてから出す方法もある．けども，あえて今の段階でやってみる．核空間というのは，$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ となるような $\boldsymbol{x}$ の全体だ．(3) と (4) を思い出すと，

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0} \tag{8}$$

となるような c_1, c_2, c_3 を求めた場合，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3$ の全体が $\mathrm{Ker}\ f$ なのである．ところが (8) は (**??**) と全く同じでその解は (5) で与えられている．よって核空間とは（$c_3/2$ を c にした）

$$\mathrm{Ker}\ f = \left\{ c(-12\boldsymbol{a}_1 + 9\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3) \,\middle|\, c \text{ は任意のスカラー} \right\} \tag{9}$$

とわかる．$\boldsymbol{d} = -12\boldsymbol{a}_1 + 9\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3$ とおくと，この空間の基底は $\langle \boldsymbol{d} \rangle$，次元は 1 である．具体的に計算すると，

$$\boldsymbol{d} = -12\boldsymbol{a}_1 + 9\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -10 \\ -3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

となっている．

（2011 年度の注意；参考までに載せます）かなりの人が上のような解き方をした上で，$-12, 9, 2$ という係数に反応して，核空間の基底を ${}^t(-12, 9, 2)$ としていました．しかしこれは上の解き方を見ればわかるように,「核空間の基底をベクトル $\boldsymbol{a}_j$ の線型結合で書いた時の係数（の比例定数）」です．つまり，このベクトルはこの「核空間の基底を $\mathbb{R}^3$ の基底 $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$ で展開した場合の係数ベクトル」を表しています．もし，この事情を明記して解答した人がいれば，それも正解ですが，そのように明記しない場合，これらのベクトルはすべて，標準基底に関する係数だと解釈され，不正解です．もちろん,「基底は $-12\boldsymbol{a}_1 + 9\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3$」と書いてあれば，完全な正解ですが.

実のところ，この事情を理解してそのように解答した人は皆無と思われます（なぜなら，${}^t(-12, 9, 2)$ としている人は，像空間の基底では ${}^t(2, 0, 1)$ などと，標準基底に関するこたえを書いていました．これでは基底の選び方をきっちり理解しているとはとても思えない.）

この解き方をしたかなりの人は，最初の方では $\boldsymbol{a}_j$ の線型結合として解き始めています．これは完全に正しいことです．しかしそれなら最終結果にも $\boldsymbol{a}_j$ の線型結合の係数であることを明記すべきです．上に書いたように，像空間の方は無造作に書いている事からしても，多分,「$\boldsymbol{a}_j$ の線型結合」であることを答えを書く時点では忘れていたものと推測します.

正直，数ベクトルの空間にいろいろな基底を入れるのは，却ってわかりにくいだろうとは思います.（だからこそ,「多項式の空間」などをやった訳です.）問題で与えられた数ベクトルの表現を与えるものともかく基本的な基底（出題者，解答者にとっての標準基底），それ以外の基底は標準ではない基底（なので，どんな基底かは明記すべし），と区別する必要があります.

さて最後に 表現行列 ですが... 先週までの講義結果によると，$\boldsymbol{e}_j$ を基本ベクトルとして

$$A = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_3) \end{bmatrix} \tag{10}$$

が表現行列のはず．そこで，標準基底 $\boldsymbol{e}_j$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線型結合として表し，(3) と (4) を用いれば，計算できるはずだ.

これはまあ，地道にやるしかない（逆行列を使えば少しは見通しが良くなるけど）．$\boldsymbol{e}_1$ なら

$$x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2 + z\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{e}_1 \qquad \text{つまり} \qquad \begin{bmatrix} x+z \\ x+y \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

を解けば良い．がんばってやると，

$$x = z = 1/2,\ y = -1/2, \qquad \text{つまり} \qquad \boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) \tag{12}$$

がわかる．同様に計算すると

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3), \qquad \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) \tag{13}$$

もわかる．そこで (4) を用いると，

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 + 3\boldsymbol{b}_3) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{e}_2) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -11 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{e}_3) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{14}$$

となる．よって，表現行列は

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 11 & -11 & 7 \\ 7 & -5 & 5 \end{bmatrix} \tag{15}$$

と求められる．なお，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{x}$ の全体を求めると Ker f がわかるが，これはもちろん，上で求めたものに一致する.

7 月 22 日の連絡：今日で授業は終わりです．何とか予定通り，前期の内容を終える事ができそうで，ほっとしています．7/29 は休講です．なお，今学期は十分に予定を消化したので，7/29 分の補講は行いません．各自，試験のための勉強時間と思って自学自習に励んで下さい．

教務課の掲示通りに（8/5 のはずですが，各自で確認して下さい）期末試験をします．
試験範囲は今学期にやったところ全部，です．が，特に

- 2 章の線型空間（線型空間とは，線型独立と従属，基底と次元，部分空間など）と
- 5 章の線型写像（線型写像とは，像空間と核空間，階数，表現行列など）

が主になるでしょう．表現行列で苦労している人が多いようですが，表現行列は，完全には解らなくてもなんとかなる問題がほとんどと思います．
ただし，連立方程式が解けないと答えにたどり着けないと思うので，連立方程式を確実に解けるようにもなっていて下さい．

なお,「表現行列について」よく分からない場合，その原因の大きな部分は，そもそも「基底○○に関する表現ベクトル（成分表示）」がわかっていないことにあると思われます．どうもわからなくて困っている人は，まず,「基底 E に関する成分表示」$[\boldsymbol{x}]_E$ が何だったのか，まずはそこから復習する事をお奨めします．

（以下，先週と同じ注意）
期末試験では「A4 の紙一枚（片面だけに書いたもの；原則として手書き）」の持ち込みを認めます．学生番号と氏名を書いて，試験当日，答案とともに提出して下さい.「自分は持ち込み無しで受ける」という人は，学生番号と名前を書いた「A4 の紙」を提出して下さい．

（補足説明）

- 原則として，持ち込み用紙は採点しません．ただし,（以下の方針から判断して）非常に良いものを作った場合には，ホンの少しだけ良いことがあるかもしれません．
- 持ち込みを認める理由：ある程度の分量の概念（特に表現行列）が出て来たため，**持ち込み用紙を自分で書いて，全体を整理する手助けとしてもらいたい**，というのが最大の狙いです．
- 「持ち込み用紙を自分で準備することを通して勉強する」ことが最大の狙いですから，皆さんには，自分で持ち込み用紙を準備する事を奨めます．友達と協力して持ち込み用紙を作成した場合は,「○○さんと一緒に作りました」と明記して下さい．このような明記がないのに，非常によく似たものが複数現れた場合には，それなりの措置を講じるかもしれません．
- まちがっても，試験対策委員の作成したものを多数の人間が持ち込む，などはやらないでくださいね．しつこいけど，自分で勉強してまとめる，のが最大の目的です．試験対策委員の作ったものを持ち込んでも何の役にも立ちません.（自分でまとめが作れない人は，その程度の実力だということです．その時点で諦めるか，死にものぐるいで勉強するかしかないでしょう.）
- 例題とその解答を延々と書く事はルール違反ではないけども，勉強にならないので，お勧めしません．あまりに酷い場合には減点する可能性があります．
- **「線型空間の定義」などは試験問題には書きません．** 必要と思う人は上の A4 の範囲内に自分で書いて下さい．
- なお，このように持ち込み用紙は提出してもらうので，提出前にコピーを取っておく方が無難です — 持ち込み用紙も答案と一緒に返却の予定ですが，返却までのタイムラグがありますから．

言わずもがなの注意：持ち込みを認めるという事は，それだけ問題が厄介になる可能性があるということです．決して「持ち込みだから楽勝」などと思わないでください．

今日のキーワード：線型写像の合成と逆，線形写像の階数，全体のまとめ

先週のレポートの略解

問 24： この解答は問 23 のと本質的に同じ．いちいち縦ベクトルを書くのは大変なので，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix}0\\-1\\-2\end{bmatrix} \tag{16}$$

とおく．問題の条件は，f が

$$f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{b}_1,\qquad f(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{b}_2,\qquad f(\boldsymbol{a}_3) = \boldsymbol{b}_3 \tag{17}$$

を満たしている，ということである．
　まず $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\rangle$ は一次独立であり，３本からなっているので，$\mathbb{R}^3$ の基底をなすことに注意．よって $\mathbb{R}^3$ の任意の元を $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\rangle$ の線型結合で書けて，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $f(\boldsymbol{x})$ が計算できる．具体的に書くと，$\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 \tag{18}$$

と線型結合の形で表すと，

$$f(\boldsymbol{x}) = f(c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3) = c_1 f(\boldsymbol{a}_1) + c_2 f(\boldsymbol{a}_2) + c_3 f(\boldsymbol{a}_3) = c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 \tag{19}$$

となるはずなのだ．つまり，f の像空間はこの 3 本のベクトルで張られている．(あとは，これが線型独立かどうかを見れば，像空間の基底がわかる.)

　また，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ も一次独立かどうかを見ておこう．これは

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0} \tag{20}$$

を解けばわかるが，今回は $\boldsymbol{b}_2 = 2\boldsymbol{b}_1$ に気づけば簡単である（$\boldsymbol{b}_3$ は $\boldsymbol{b}_1$ の定数倍ではないから，$\boldsymbol{b}_1$ とは独立）.

(1) 像空間 からやる．任意の $\boldsymbol{x}$ に対する $f(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ の線型結合で書ける．ので，像空間はこの 3 つのベクトルで張られる空間だ．この 3 つのベクトルは $\boldsymbol{b}_2 = 2\boldsymbol{b}_1$ の関係を満たし，$\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}_3$ は明らかに一次独立である．従って像空間の基底は $\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$，その次元は 2 である．もちろん，ここは $\langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 \rangle$ を基底として採用してもよい．

核空間 をやろう．これは表現行列を求めてから出す方法もある．けども，あえて今の段階でやってみる．核空間というのは，$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ となるような $\boldsymbol{x}$ の全体だ．(18) と (19) を思い出すと，

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0} \tag{21}$$

となるような c_1, c_2, c_3 を求めた場合，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3$ の全体が $\mathrm{Ker}\, f$ なのである．ところが (21) は (20) と全く同じで，その解は $c_1 = -2c_2$, $c_3 = 0$ である．よって核空間とは

$$\mathrm{Ker}\, f = \left\{ c(-2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) \,\middle|\, c \text{ は任意のスカラー} \right\} \tag{22}$$

とわかる．$\boldsymbol{d} = -2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ とおくと，この空間の基底は $\langle \boldsymbol{d} \rangle$，次元は 1 である．具体的に計算すると，

$$\boldsymbol{d} = -2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

となっている．

(2) f の階数 は像空間の次元そのものだから，2 である．

(3) さて 表現行列 は… 講義結果によると，$\boldsymbol{e}_j$ を基本ベクトルとして

$$A = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_3) \end{bmatrix} \tag{23}$$

が表現行列のはず．そこで，標準基底 $\boldsymbol{e}_j$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線型結合として表し，(18) と (19) を用いれば，計算できるはずだ．

　これはまあ，地道にやるしかないが，今回のベクトルなら以下のようにやるのが良いだろう．まず，$\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{e}_2$ に注意し，これから $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1$，更に $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{e}_1 = 2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3$ を得る．そこで (19) から，

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_3) = 2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3 = -\boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{24}$$

となる．よって，表現行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{25}$$

と求められる．なお，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{x}$ の全体を求めると $\mathrm{Ker}\, f$ がわかるが，これはもちろん，上で求めたものに一致する．

　表現行列の別の求め方： 表現行列というのは，今の場合，$\boldsymbol{b}_j = A\boldsymbol{a}_j$（$j = 1, 2, 3$）となる行列のことである．この 3 つは 3 つの縦ベクトルを行列の形にまとめて書くと

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}$$

の形であるから，この両辺に右から $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}$ の逆行列をかけて

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}^{-1} = A \qquad \text{具体的には} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

と求められる．機械的にやれる点ではこちらの方が簡単だが，逆行列を計算しないといけない（効率の良いやり方は秋学期にやります.）

(4) 上で求めた行列とベクトルのかけ算をすれば良い．答えは $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

問 25： 問題そのものは表現行列や像空間などの定義を訊くだけのものですが，微分演算が行列で表現できることを実感してもらいたくて出題しました．

(1) 任意の $\boldsymbol{p} \in V$ は $\boldsymbol{p} = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3$ と書ける．また，こいつを微分した結果を $\boldsymbol{p}'$ と書くと，$\boldsymbol{p}' = p_1 + 2p_2 x + 3p_3 x^2$ である．この事情を基底 $E = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ に関する表現ベクトルの言葉で書けば，

$$[\boldsymbol{p}']_E = \begin{bmatrix} p_1 \\ 2p_2 \\ 3p_3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{p}]_E = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, \qquad \text{となっているので，表現行列は} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と求められる．

(2) 像空間は (1) での $\boldsymbol{p}'$ の表式からもわかるように「２次以下の多項式全体」だ．よってこの基底の例は $\langle 1, x, x^2 \rangle$，次元は 3.

核空間の方は,「微分したらゼロになる多項式の全体」ということだ.（もちろん，上の $\boldsymbol{p}'$ の表式から具体的に求めてもよい.）これは要するに，$p(x) = \text{定数}$ ということ．従って基底の例は $\langle 1 \rangle$，次元は 1.

(3) 像空間の次元が 3 なので，階数も 3.

毎度の注意：

（1）まず，問 25 は，かなりの人ができていましたが，例によって,「基底の書き方」がおかしな人が半数以上でした．しつこいけども，今考えているのは「多項式の空間」です．従って，像空間や核空間の基底を構成するベクトルは多項式でないといけません !!

つまり，像空間は「2 次以下の多項式の全体」なので，基底は $\langle 1, x, x^2 \rangle$ となります —— 基底を構成しているベクトルのそれぞれは，$1, x, x^2$ という多項式ですね.

同じく，核空間は「定数関数の全体」ですから，その基底は $\langle 1 \rangle$ となります.

ここのところ，像空間なら

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{（間違い !! ）}$$

などと書いた人が多数，いました．つい油断したのでしょうが，これでは単なる $\mathbb{R}^4$ のベクトルを書いてるだけで，多項式とは何の関係もありませんよ！

気持ちはわかりますが，同じ間違いを何回もしているので，今回は辛めに点を引いておきました（試験でも引きます）．今一度，自分が何を書いているのか，きちんと考えて欲しいと思います.

（2）問 24 の核空間について，その基底を $\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ とした人が，ちらほら見かけられました．こうなった理由は，核空間のベクトルが $-2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$（の定数倍）だから，だと思われます．しかし，$-2$ と 1 というのは，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の係数であって，標準基底での成分表示の結果ではありません．だから，$-2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ の成分を計算したものが正しい答えになります.（または，このままで，$-2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ を答えにするのなら，正しい.）ここのところ，勘違いしている人が多かったようなので，再度，注意しておきます.