

構成的場の理論 — 古典的な問題の紹介*

原 隆

九州大学 数理学研究院

e-mail: hara@math.kyushu-u.ac.jp

2015年2月2日：ミスを少し訂正

概要

古典的な構成的場の理論の問題を解説する。特に格子正則化を用いた場合のスカラー場のモデルの構成について、どのような枠組みで行うのか、代表的な解析手法はなにか、および代表的な問題は何か、を解説する。特に (1) イジングモデル、 ϕ^4 モデルなどでは臨界現象が見られるので、これを利用して連続極限がとれること、(2) くりこみ群の描像と場の構成、(3) 代表的な例として φ_3^4 の構成と φ_4^4 の triviality について述べた。文献を網羅する余裕がなかったので、最後に簡単な文献案内をつけた。

目次

1	構成的場の理論とは？	2
1.1	公理的場の理論と構成的場の理論	2
1.2	公理的場の理論（と構成的場の理論）の枠組みの詳細	3
2	場の理論と統計力学	8
2.1	格子正則化と連続極限 (scaling limit)	8
2.2	連続極限をとる際の条件	11
3	統計力学における臨界現象	13
3.1	スピン系の定義、 φ^4 -系の定義（まず有限体積で）	14
3.2	相関不等式と鏡映正值性	18
3.3	無限体積の極限	22
3.4	「高温相」「低温相」の存在	24
3.5	臨界現象の存在	27
3.6	まとめ：とりあえずの目標の達成	31
4	くりこみ群の描像	32
4.1	Block Spin Transformation (BST) の定義と基本的性質	32
4.2	BST の結果の例	36
4.3	場の理論におけるくりこみ群：くりこみ群と連続極限 (effective theory としての意味)	39
5	場の理論の構成の実際 —— φ_3^4 理論	43
5.1	くりこみ群による解析 (アイデアのみ)	43
5.2	相関不等式による解析	46

*数理論理学 2013 (2013年9月28日~30日) 講義ノート

6	Triviality の問題 —— φ_d^4 理論 ($d \geq 4$)	50
6.1	φ_d^4 の Triviality とは？	50
6.2	相関不等式による解析	50
6.3	くりこみ群による描像	54
A	簡単かつ不完全な文献案内	54

1 構成的場の理論とは？

この節では構成的場の理論が目指すものとその枠組みを、簡単に紹介する。

1.1 公理的場の理論と構成的場の理論

場の量子論は、古典的場の理論を量子力学的に扱おうとする試みの中から、ほぼ必然的に産まれて来たものである。当初は、大体、以下のようなものを想定していたと思われる。

- 空間の各点 x には「場の演算子」と呼ばれる作用素 $\varphi(x)$ が棲んでいる。(これは適当なヒルベルト空間上の作用素と思いたい。)
- 場の演算子は正準交換関係 (CCR) を満たす。
- 場の演算子は量子力学的運動方程式に従う。
- この世は特殊相対論で記述されているから、場の理論も相対論的共変でないといけない。
- 以上の枠組みの下で、通常量子力学のようにいろいろと問題を考えたい。例えば、上のハミルトニアン固有値や固有状態は何か？

これは「場」とよばれるものが空間の各点に存在し、それが量子力学に従うとすれば、そこそ自然な問題設定といえる。しかし問題は、上の枠組みを字義通りに満たす演算子の組を数学的に扱うのはまず不可能であるところにある。厳密さを度外視して形式的に相対論的共変な場の理論を書き下す事は簡単にできるが、場の理論の自由度が無限大である事に関連していわゆる発散の困難が生じる。これに対しては「くりこみ理論」によって一定の解決が図られたが、これは数学的には意味不明である。更に、摂動論では「結合定数」の小さなところしか扱えない¹。

このように、相対論的に共変な場の理論を良く理解する事がなかなか困難であるため、場の理論を数学的に厳密に扱おうという機運が1950年代から高まった。この方向には主に**公理的場の理論**と**構成的場の理論**の二つのアプローチが存在する。

公理的場の理論とは、相対論的共変な(我々が望むような)場の量子論が存在したとして、それが持つべき最小限の仮定から、場の理論の持つべき一般的性質を導こうとする試みである。「最小限の仮定」が数学における「公理」のような役割を果たすので、公理的場の理論と呼ばれるようになった。なにぶん、非常に一般的な枠組みで議論するためどこまでの結果が得られるかは心許ない気もするが、驚くべき事に**スピンと統計の関係**²および**CPT定理**³という、一般的な定理が厳密に証明された。これは1960年代までの公理的場の理論の輝かしい成果である。

ところが、公理的場の理論は「スピンと統計の関係」や「CPT定理」などの輝かしい成果を残したものの、余りに一般的すぎる部分があり、個々のモデルに固有の性質についてはあまり教えてくれない。またそ

¹時代は前後するが、摂動論の結果が全くのナンセンスである場合もありそうである事は70年代ごろから次第に明らかとなってきた (triviality の問題, 後述)

²スピンの整数値の粒子はボゾン、スピンの半奇数値の粒子はフェルミオンである、という主張。詳しくは [24, 26] を参照

³場の量子論は CPT の 3 つの変換の積について不変である、という主張。ここで C は荷電共変変換、P は鏡映変換、T は時間反転の変換である。詳しくは [24, 26] を参照

もそも、Wightman の公理系を満たすような場の理論が存在するのか、も曖昧である⁴。このような状況から、公理的場の理論の枠組みに拘らず、もう少し具体的に、**場の量子論のモデルを具体的に構成し、その性質を調べる**という試みが1960年代後半から起こって来た。これが**構成的場の理論**である。この講義では構成的場の理論の基本的な考え方や、その成果（の一部）、および重要な未解決問題を紹介する。

記号について：場の理論のモデルは時空間の次元を右下に添字を付けて表す事が多い。例えば QED_4 は、4次元の QED を表す。同様に、 φ_d^4 は d 次元の φ^4 理論を表す。

1.2 公理的場の理論（と構成的場の理論）の枠組みの詳細

以下の詳細は、講義ではほとんど使わないが、「ポアンカレ不変性」などの標語だけで済ませるのもあまりに具体性がないので、参考までに公理系を記述する。詳細については [24, 26, 3]などを参照。

この講義で扱う構成的場の理論を理解するには、最後の「OS の公理系」に軽く目を通して頂ければ十分である。

1.2.1 まずは数学的定義を少し

空間の次元は d 次元（空間部分が $(d-1)$ 次元、時間部分が 1 次元）としている。もちろん、我々の住んでいるのは $d=4$ に相当する。

ミンコフスキー空間： d 次元実ベクトルの空間 $\mathbb{R}^d = \{(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(d-1)})\}$ に⁵不定計量の「ミンコフスキー内積⁶」 $(x, y) = x^{(0)}y^{(0)} - \sum_{i=1}^{d-1} x^{(i)}y^{(i)}$ を入れたものをミンコフスキー空間という。

ローレンツ変換：ミンコフスキー空間での線型変換

$$\Lambda : x = (x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(d-1)}) \in \mathbb{R}^d \mapsto x', \quad x'^{(i)} = \sum_{j=0}^{d-1} \Lambda_j^i x^{(j)}$$

で、ミンコフスキー内積を不変に保つものをローレンツ変換という。ローレンツ変換の全体は群をなすので、ローレンツ群と呼ぶ。

固有ローレンツ群：ローレンツ群の要素のうち、 $\Lambda_0^0 \geq 1$ と $\det \Lambda = 1$ を満たすものの全体を固有ローレンツ群 (proper Lorentz group) と呼び、 L_+^\uparrow と書く。

固有ポアンカレ群：平行移動と、固有ローレンツ群の要素による回転を組み合わせたもの、つまり $a \in \mathbb{R}^d$ と $\Lambda \in L_+^\uparrow$ に対して

$$(a, \Lambda)x = \Lambda x + a$$

として定義される変換の全体を固有ポアンカレ群 (proper Poincaré group) と呼び、 P_+^\uparrow で表す。

⁴もちろん、自由場（ガウス場）の理論は手で構成でき、Wightman の公理系を満たす事はすぐに確かめられる。この意味で、Wightman の公理系を満たす場の量子論の例として、自由場はある。しかし、自由場以外にそのようなものが存在するのか、は未知であった

⁵ $x^{(0)}$ は時間成分、それ以外が空間成分のつもりである。なお、以下ではたくさん空間の点が出てくるので、点を区別するのに下付きの添字を、空間の成分を区別するのに上括弧付きの添字を使う

⁶「内積」とは呼んでいるが、正定値でないので、数学の通常の意味での内積ではないことに注意

1.2.2 Wightman-Gårding の公理系

標準的な公理的場の理論では、場の量子論が満たすべき「最小限の仮定」として、以下のような Wightman-Gårding の公理系 (WG の公理系) を採用する⁷。

(GW0) 場の量子論とは、以下の (GW1)–(GW5) を満たすような、4つのものの組である。

- (1) 可分なヒルベルト空間 \mathcal{H}
- (2) \mathcal{H} の元である単位ベクトル Ω
- (3) 「場の作用素」と呼ばれる、 \mathcal{H} 上の作用素の族 ϕ
- (4) 固有ポアンカレ群の、 \mathcal{H} 上での連続表現 U

(GW1) 量子力学であること：「場の量子論」は以下の意味で通常の（演算子形式の）量子力学になっている。あるヒルベルト空間 \mathcal{H} （その内積は $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表す）と、その中で稠密な部分空間 D_0 があり、

- (a) 任意の緩増加超関数 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して、 D_0 をその定義域内に含むような、 \mathcal{H} 上の演算子 $\phi(f)$ が存在する。さらに、任意の D_0 内のベクトル $\Psi_1, \Psi_2 \in D_0$ に対しては、 $\langle \Psi_1, \phi(\cdot)\Psi_2 \rangle$ は緩増加超関数になっている。
- (b) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ が実関数の場合、 $\phi(f)$ は D_0 上の対称作用素である、すなわち

$$\langle \Psi_1, \phi(f)\Psi_2 \rangle = \langle \phi(f)\Psi_1, \Psi_2 \rangle.$$

これはスカラー場が中性（実数場）であることの表現である。

- (c) 全ての $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して、 D_0 は $\phi(f)$ の作用の下で \mathcal{H} の不変部分空間になっている。すなわち $\Psi \in D_0$ ならば $\phi(f)\Psi \in D_0$ 。
- (d) 「真空ベクトル」と呼ばれる特別なベクトル $\Omega \in D_0$ が存在して、 D_0 は以下の形のベクトルで張られている：

$$\{\Omega, \phi(f_1)\Omega, \phi(f_1)\phi(f_2)\Omega, \phi(f_1)\phi(f_2)\phi(f_3)\Omega, \dots \mid f_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\}$$

なお、 Ω については、以下で更に注文をつける。

(GW2) ポアンカレ不変性：固有ポアンカレ群 P_+^\uparrow の、 \mathcal{H} 上での表現 U が存在し、以下を満たす：

- (a) 任意の $(a, \Lambda) \in P_+^\uparrow$ に対し、 D_0 は $U(a, \Lambda)$ の不変部分空間である。すなわち、

$$U(a, \Lambda)\Psi \in D_0 \quad \text{if} \quad \Psi \in D_0.$$

- (b) 真空 Ω は $U(a, \Lambda)$ で不変である。つまり、 $(a, \Lambda) \in P_+^\uparrow$ に対して $U(a, \Lambda)\Omega = \Omega$ 。
- (c) D_0 上の作用素として、すべての $(a, \Lambda) \in P_+^\uparrow$ とすべての $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$U(a, \Lambda)\phi(f)U(a, \Lambda)^{-1} = \phi(f_{a, \Lambda}) \quad \text{ただし, } f_{a, \Lambda}(x) := f(\Lambda^{-1}(x - a))$$

(GW3) スペクトル条件：並進作用素 $U(a, I)$ の生成子（物理的には、これはエネルギー–運動量演算子と解釈できる）のスペクトルは、運動量空間での前方光円錐 $V^+ := \{p \in \mathbb{R}^d \mid p^{(0)} > 0, (p, p) > 0\}$ に入っている⁸。

⁷いくら一般的な場の理論を扱うと言っても、場の量の変換性（スカラーか、ベクトルかスピノルか、など）および荷電の有無からは区別して扱う。以下では「中性スカラー場」の場合を書く

⁸各座標軸方向への並進の生成子を $P^{(j)}$ ($j = 0, 1, 2, \dots, d-1$) とするとき、これらの生成子の joint spectrum が $V^{(+)}$ に入っているということ

(GW4) 局所性：空間的に離れた 2 領域に台を持つ場の作用素は、互いに交換する。すなわち、超関数 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の台が空間的に離れていれば⁹、 $\phi(f)$ と $\phi(g)$ は作用素として可換である：

$$[\phi(f), \phi(g)]_- := \phi(f)\phi(g) - \phi(g)\phi(f) = 0.$$

(GW5) 真空の存在と一意性： \mathcal{H} には並進不変 ($\Phi = U(a, I)\Phi$) なベクトルが、たった一つだけ存在し、これが (GW1) ででてきた「真空ベクトル」 Ω に他ならない。

ざっと見ても、この公理系は場の理論が満たすべき最低条件しか要求していない。その意味で、出発点としてはこの公理系は非常に緩い、正当なものと考えられる。これだけの緩い条件から「CPT 定理」や「スピンと統計の関係」などが導かれたのはある意味、驚異ともいえる。

1.2.3 Wightman 関数と再構成定理

上の GW の公理系は、場の量子論の基礎を形作るもので非常に重要である。しかし、これは初めからヒルベルト空間上の無限個の (!) 作用素の族を扱う形になっていて、なかなか解析が難しい。一方、経験的に、ある種の期待値や汎関数を扱う方が何となく取り付きやすいことはある。上の公理系を、すべて何らかの期待値 (汎関数) の言葉で書き直せないだろうか？これができる事も、Wightman により示された。

Wightman は、後に Wightman 関数と呼ばれる事になる、一連の超関数に注目した。Wightman 関数とは、場の量の真空期待値に相当する汎関数であり、上の公理系の言葉を用いると、

$$W_n(f_1, f_2, \dots, f_n) := \langle \Omega, \phi(f_1)\phi(f_2)\dots\phi(f_n)\Omega \rangle = \langle \Omega | \phi(f_1)\phi(f_2)\dots\phi(f_n) | \Omega \rangle \quad (1.2.1)$$

で定義される (何となく量子力学の「真空期待値」という感じを出したかったので、最右辺ではディラックの記法を使って書いてみた)。

Wightman は、GW の公理系を満たす場の理論の系と、以下の「Wightman 関数に対する公理系」を満たす Wightman 関数の族が同等である事 (一方からもう一方を導ける事) をしめした。この定理により、(GW の公理系を満たす) 演算子形式の場の理論を調べる代わりに、以下の「Wightman 関数に対する公理系」を満たす Wightman 関数の族を調べれば良い事が保証される。既に述べたように、作用素そのものよりは期待値の方が扱いやすい事が多いから、これは後々の構成的場の理論の発展に大きな影響を与えた。

Wightman 関数に対する Wightman の公理: n 変数¹⁰ 緩増加超関数の列 $\{W_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{nd})\}_{n=0}^\infty$ が存在し、以下を満たす：

(W1) 中性スカラー場であること：任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{dn})$ に対して

$$\overline{W_n(f)} = W_n(f^*)$$

が成り立つ。 $\overline{\quad}$ は複素共軛を表す。また n 変数の超関数 f に対して、その「共軛」 f^* を

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \overline{f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)}.$$

と定義した (引数の順序も入れ替えた事に注意)。

(W2) ポアンカレ共変性：任意の $(a, \Lambda) \in P_+^\uparrow$ と $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{dn})$ に対し

$$W_n(f) = W_n(f_{a,\Lambda}) \quad \text{ただし, } f_{a,\Lambda} := f(\Lambda^{-1}(x - a))$$

⁹すべての $x \in \text{supp} f$ と $y \in \text{supp} g$ に対して $(x - y, x - y) < 0$ となっていれば

¹⁰空間次元が d であるので、これらは nd 個の変数の関数であるが、空間の座標 (d 成分) をひとまとめにして 1 個と数えて n 変数と表現した

(W3) 正定値性：任意の $f_0 \in \mathbb{C}, f_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \dots$ と $N = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$\sum_{m,n=0}^N W_{m+n}(f_m^* \otimes f_n) \geq 0$$

が成立する。ここで $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{dm})$ と $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{dn})$ に対してそのテンソル積 $f \otimes g$ を

$$(f \otimes g)(x_1, \dots, x_{m+n}) = f(x_1, \dots, x_m)g(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}).$$

と定義した。また f^* は (W1) で定義した「共軛」である。

(W4) スペクトル条件：Wightman 関数 W_n に対し、そのフーリエ変換を

$$W_n(x_1, \dots, x_n) = \int \tilde{F}_{n-1}(p_1, \dots, p_{n-1}) \exp\{i \sum_{j=1}^{n-1} (p_j, x_{j+1} - x_j)\} dp_1 \cdots dp_{n-1}$$

により定義する（並進不変性から x_j は $x_{j+1} - x_j$ の形で入る）と、 \tilde{F} は緩増加超関数であって、 \tilde{F} の台は運動量空間での前方光円錐 V^+ に入る。

(W5) 局所性：任意の $n \geq 2$ と、空間的に離れた¹¹2点 x_j, x_{j+1} に対し

$$W_n(x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = W_n(x_1, \dots, x_{j+1}, x_j, \dots, x_n)$$

つまり、空間的に離れた2点は、その引数としての順序を入れ替えても Wightman 関数の値に影響しない。

(W6) クラスタ分解性：任意の空間的なベクトル $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} W_n(x_1, \dots, x_j, x_{j+1} + \lambda a, \dots, x_n + \lambda a) = W_j(x_1, \dots, x_j) W_{n-j}(x_{j+1}, \dots, x_n).$$

つまり、Wightman 関数は、その引数が遠くに離れて行くと、Wightman 関数の積に分解する。

さて、GW の公理系と W の公理系の関係は以下で与えられる。

定理 1.2.1 (Wightman の定理と再構成定理)

(i) GW の公理系 (GW1)–(GW5) をみたす場の理論が与えられたとき、Wightman 関数を (1.2.1) によって定義すると、Wightman 関数は (W1)–(W6) を満たす。

(ii) 逆に、(W1)–(W6) を満たす Wightman 関数の組が与えられると、これから GW の公理系 (GW1)–(GW5) を満たす場の理論を再構成できる。再構成した結果の ϕ, Ω を用いると、出発点の W は (1.2.1) を満たしている事がわかる。

つまり、ヒルベルト空間 \mathcal{H} とその上の作用素を直接扱うかわりに、(W1)–(W6) を満たす超関数の組を扱えば、結果的にヒルベルト空間上の場の理論が構成できる事になる。これは構成的場の理論につながる大事な一歩である。

1.2.4 Osterwalder-Schrader の公理系と再構成定理

Osterwalder-Schrader の公理系が、以下の構成的場の理論の議論では重要になってくる。ここでは、Schwinger 関数と呼ばれる超関数 S_n の組を考えるが、これは Wightman 関数を時間変数について解析接続したものに

¹¹ $(x_j - x_{j+1}, x_j - x_{j+1}) < 0$

なっている。少し定義を述べる：

$$\mathcal{S}_{\neq}(\mathbb{R}^{dn}) := \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{dn}) \mid f \text{ とその全ての導関数が超平面 } y_i = y_j \text{ でゼロ}\} \quad (1.2.2)$$

$$\mathcal{S}'_{\neq}(\mathbb{R}^{dn}) := \{\mathcal{S}_{\neq}(\mathbb{R}^{dn}) \text{ 上の線型汎関数}\} \quad (1.2.3)$$

$$\mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{dn}) := \{f \in \mathcal{S}_{\neq}(\mathbb{R}^{dn}) \mid \text{supp} f \subset \{(t_1, \mathbf{x}_1), \dots, (t_n, \mathbf{x}_n)\} \in \mathbb{R}^{nd}, 0 < t_1 < \dots < t_n\}\} \quad (1.2.4)$$

Osterwalder-Schrader の公理系： Schwinger 函数と呼ばれる緩増加超函数の組 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して、以下を満たす：

(OS1) $S_n \in \mathcal{S}'_{\neq}(\mathbb{R}^{dn})$ である。更に、

$$\overline{S_n(f)} = S_n(\Theta f^*)$$

が任意の $f \in \mathcal{S}_{\neq}(\mathbb{R}^{dn})$ に対して成立する。ここで時間反転

$$(\Theta f)((t_1, \mathbf{x}_1), \dots, (t_n, \mathbf{x}_n)) := f((-t_1, \mathbf{x}_1), \dots, (-t_n, \mathbf{x}_n))$$

を定義した。

(OS2) ユークリッド不変性： \mathbb{R}^d の任意の回転 Λ 、および任意の $a \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$S_n(f) = S_n(f_{(a, \Lambda)}), \quad f \in \mathcal{S}_{\neq}(\mathbb{R}^{dn}). \quad \text{ただし, } f_{a, \Lambda} := f(\Lambda^{-1}(x - a))$$

(OS3) 正值性：任意の $f_0 \in \mathbb{C}$ および $f_j \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}^{dj})$ に対して ($j \geq 1$)

$$\sum_{m, n=0}^N S_{m+n}((\Theta f_n^*) \otimes f_m) \geq 0.$$

(OS4) 対称性： S_n はその引数について対称である、つまり任意の引数の置換 π に対して

$$S_n(f) = S_n(f_{\pi}). \quad \text{ここで } f_{\pi} \text{ は } f \text{ の引数の順序を置換 } \pi \text{ によって変えて得られる函数}$$

(OS5) クラスター分解性： $f \in \mathcal{S}_{\neq}(\mathbb{R}^{dn}) \cap \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^{dn})$, $g \in \mathcal{S}_{\neq}(\mathbb{R}^{dm}) \cap \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^{dm})$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_{m+n}(f \otimes T_t g) = S_n(f) S_m(g)$$

がなりたつ。ここで

$$(T_t g)((t_1, \mathbf{x}_1), \dots, (t_n, \mathbf{x}_n)) := g((t_1 - t, \mathbf{x}_1), \dots, (t_n - t, \mathbf{x}_n))$$

は時間方向の並進である。

OS の公理系と W の公理系の関係は以下の定理で与えられる。

定理 1.2.2 (Osterwalder-Schrader の定理と再構成定理)

(i) Wightman の公理系 (W1)–(W6) をみたす Wightman 函数が与えられると、(OS1)–(OS5) をみたす Schwinger 函数の組を構成できる。

(ii) 逆に、(OS1)–(OS5) をみたす (下の脚注を参照¹²) Schwinger 函数の組が与えられると、(W1)–(W6) を満たす Wightman 函数の組を構成できる。

¹²実はここは少し不正確である。実際には (OS1) よりもう少し強い条件がないと、この (ii) は成立せず、この「定理」の記述は間違っている。しかしこの辺りは余りに技術的であり、かつ OS の公理系は主役ではないため、今回の講義ではここはごまかすことにした。正確な表式は原論文 [20, 21] または [3] などを参照

1.2.5 場の理論の構成の筋道 (の一つ)

以上から、場の理論の構成法のひとつが示唆される。つまり、

1. OS の公理系を満たす、Schwinger 関数の組を構成する
2. OS の定理を用いて、Wightman の公理系を満たす Wightman 関数の組を構成する
3. Wightman の再構成定理をもちいて、GW の公理系を満たす、演算子形式の場の理論を構成する

という筋道である。このうち、2 と 3 のステップは上記のように定理の形で解決されているから、我々が注力すべきは 1 のステップである。以下ではこの方針に従い、1 のステップをどのように解決すべきかを考えて行く。

2 場の理論と統計力学

この節では場の理論と統計力学の関係について、おおざっぱに説明する。

2.1 格子正則化と連続極限 (scaling limit)

ではいよいよ、場の理論を構成する試みを始めよう。もちろん、ミンコフスキー空間での場の理論を一気に定義できれば良いのだが、これは場の自由度が無限大であるため（また、「くりこみ」の問題もあるため）、ほぼ、絶望的である（自由場の理論は例外的に簡単ですぐに作れるが、これは面白くない）。

一方、これまでに述べた事を振り返ると、「場の量子論」を作るには、**OS の公理系を満たす Schwinger 関数の組**を与えれば十分である。そのような Schwinger 関数を与えられるのであれば、どのような手段を用いても良い。

であるので、(GW の公理系を満たす) 演算子形式でのミンコフスキー空間での場の量子論を作る代わりに、OS の公理系を満たすような Schwinger 関数の組を作る事を目標としてみよう。「OS の公理系を満たすような Schwinger 関数の組」ができれば、既に述べた再構成定理を用いる事によって、GW の公理系を満たす場の理論が自動的に構成できるから、これは試みても損はない道筋である。

しかし、「OS の公理系を満たすような Schwinger 関数の組」を与える事自身、なかなか大変である。もちろん、自由場に相当するものは簡単に作れるが、それ以外のものは容易に作れない。容易でない理由は、我々の扱うべきものが本質的に無限自由度、かつ、無限のスケールが絡んだ系だからである¹³

そこで、ミンコフスキー空間での Schwinger 関数を直接構成する事は一旦、あきらめて、系を有限自由度にしてしまつて（または無限のスケールが絡む部分をなくして）「Schwinger 関数の類似物」をまずは定義しよう。そのあとで適当な極限をとつて Schwinger 関数を構成するのである。このような方法は一般に正則化 (regularization) による構成と呼ばれる。

この節では場の理論を数学的にも厳密に定義する（可能性のある）一つの方法（格子正則化の方法）を大雑把に紹介する¹⁴。この方法についての現代的な文献には [2, 3] がある。

2.1.1 \mathbb{R}^d の近似としての $\epsilon\mathbb{Z}^d$

格子正則化においては、文字通り、空間 \mathbb{R}^d を有限間隔の格子で近似する。少し記号を導入する。

¹³無限のスケールが絡んでいる事は、すぐ後に述べる格子正則化を行うとわかりやすいかもしれない

¹⁴これまで述べてきたように、どのような手段を用いても「OS の公理系を満たす Schwinger 関数の組」を作れば良いのだから、格子正則化に限る必要はない。実際、他の方法で構成された例もあるが、ここでは（多分に個人的な好みも反映して、またこれから述べる統計力学の様々な手法が使えるので）格子正則化を採用する

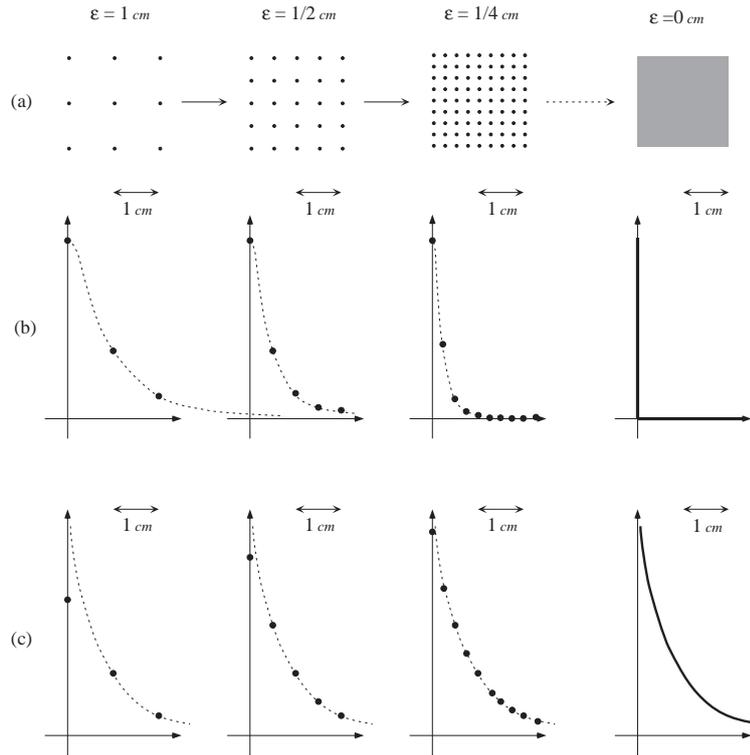


図 1: (a) 格子の極限としての連続時空の構成.

(b) 連続極限をとる試み I: 統計系のパラメーターを固定した場合の 2 点関数.

(c) 連続極限をとる試み II: 統計系のパラメーターを ϵ の関数として適当に動かし、いつでも点線のような振る舞いになるようにした場合の 2 点関数.

\mathbb{Z}^d は d -次元超格子のことである: $\mathbb{Z}^d := \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)}) \in \mathbb{R}^d \mid x^{(j)} \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq d\}$. これからでてくるものとの関係で、これを「格子間隔 1 の d -次元超格子」と呼ぶ. 一方、 $\epsilon > 0$ に対して「格子間隔 ϵ の d -次元超格子」を $\epsilon\mathbb{Z}^d$ と書いて、以下のように定義する:

$$\epsilon\mathbb{Z}^d := \left\{ \tilde{x} = (\tilde{x}^{(1)}, \tilde{x}^{(2)}, \dots, \tilde{x}^{(d)}) \in \mathbb{R}^d \mid \frac{\tilde{x}^{(j)}}{\epsilon} \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq d \right\}.$$

これから連続時空と格子の両方が混在した話になるので、記述をはっきりさせるために、以下では \mathbb{Z}^d の元は x, y, \dots と書き、 $\epsilon\mathbb{Z}^d$ や \mathbb{R}^d の元は上のように $\tilde{x}, \tilde{y}, \dots$ と書くことにする. また、 $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して ϵx と書けば、 j -成分が $\epsilon x^{(j)}$ で与えられる $\epsilon\mathbb{Z}^d$ の元を表すものとする.

格子正則化の大本は「格子間隔 ϵ の格子 (の $\epsilon \rightarrow 0$ の極限) で連続空間を記述しよう」という、大変単純な考えである. つまり、任意の $\tilde{x} \in \mathbb{R}^d$ に対して、 $x^{(j)} \equiv \lfloor \tilde{x}^{(j)} / \epsilon \rfloor$ を定義すると、 $x \in \mathbb{Z}^d$ かつ $\epsilon x \in \epsilon\mathbb{Z}^d$ となっているので、 $\epsilon \downarrow 0$ の極限を用いて \mathbb{R}^d を $\epsilon\mathbb{Z}^d$ で「近似」しようということ¹⁵. 図 1 の (a) 参照.

2.1.2 格子正則化の考え

「格子正則化」ではこの単純な考えを推し進めて、 $\epsilon\mathbb{Z}^d$ で定義された Schwinger 関数 (の類似物) の極限として、 \mathbb{R}^d で定義された Schwinger 関数を定義しようとする. この際、 $\epsilon\mathbb{Z}^d$ は離散空間であるから、 $\epsilon > 0$ である限りいわゆる発散の困難は無く、全ての量が数学的にも問題なく定義できる. この後で最後に $\epsilon \downarrow 0$ の極限を (極限がうまく存在するように工夫して; 可能かどうかは全く自明ではないので、可能になるように頑張る) とり、Schwinger 関数を構成しようとするものである.

¹⁵もちろん、空間そのものを「近似」するだけではなく、Schwinger 関数を近似することが主目的である (次節参照)

勿論、できあがった Schwinger 関数には OS の公理系を満たして欲しいのであるが、 $\epsilon\mathbb{Z}^d$ の格子上で Schwinger 関数（の類似物）をうまく選ぶと OS の公理系（のほとんど—— \mathbb{R}^d の回転不変性を除く）を自動的に満たさせることができる。この意味で、格子正則化は「OS の公理系を満たす Schwinger 関数の組」を作るには大変有望な方法である。

2.1.3 具体的には？

さて、上のプログラムを実際に遂行してみよう。例にとるのは中性スカラー場の理論である。

格子正則化を行うとしても、格子の上でどのような系を考えるのか（そしてその極限として Schwinger 関数をどう定義するつもりなのか）は悩ましい問題である。ここでは場の理論の形式的な経路積分の表式¹⁶を参考にして、どのような格子系を扱うべきかを考えてみよう。

ミンコフスキー空間での（ポテンシャル \tilde{V} の中性スカラー）場の n -点関数の表式は、経路積分では形式的に¹⁷

$$W_n(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \approx \int [D\varphi] \varphi(\tilde{x}_1) \varphi(\tilde{x}_2) \cdots \varphi(\tilde{x}_n) \exp \left\{ i \int d^d \tilde{x} \left(\frac{1}{2} \sum_j \partial_j \varphi(\tilde{x}) \partial^j \varphi(\tilde{x}) - \tilde{V}(\varphi(\tilde{x})) \right) \right\} \quad (2.1.1)$$

となる（ここで $[D\varphi]$ はすべての場の量に関する直積測度のようなもの；数学畑の方は、あくまで形式的表現と理解されたい。また、 $\frac{\partial \varphi(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^{(j)}}$ を $\partial_j \varphi(\tilde{x})$ と略記し、 $\{\partial_0 \varphi(\tilde{x})\}^2 - \sum_{\mu=1}^{d-1} \{\partial_\mu \varphi(\tilde{x})\}^2$ を $\sum_j \partial_j \varphi(\tilde{x}) \partial^j \varphi(\tilde{x})$ と略記した——ミンコフスキーな内積に関するベクトル和のつもりで。）ここで（あまり深く考えずに）「時間を複素数に解析接続」すると、この表式は（解析接続した結果を改めて S_n と書いた）

$$S_n(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \approx \int [D\varphi] \varphi(\tilde{x}_1) \varphi(\tilde{x}_2) \cdots \varphi(\tilde{x}_n) \exp \left[- \int d^d \tilde{x} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \{\partial_j \varphi(\tilde{x})\}^2 + \tilde{V}(\varphi(\tilde{x})) \right) \right] \quad (2.1.2)$$

となる。ここで \mathbb{R}^d を $\epsilon\mathbb{Z}^d$ で近似するつもりになると、上の表式での微分を差分で置き換えて

$$S_n(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \approx \int [D\varphi] \varphi_{\tilde{x}_1} \varphi_{\tilde{x}_2} \cdots \varphi_{\tilde{x}_n} \exp \left[-\epsilon^d \sum_{\tilde{x} \in \epsilon\mathbb{Z}^d} \left(\sum_{j=1}^d \frac{\{\varphi_{\tilde{x}+\epsilon e_j} - \varphi_{\tilde{x}}\}^2}{2\epsilon^2} + \tilde{V}(\varphi(\tilde{x})) \right) \right] \quad (2.1.3)$$

が示唆される（ここで e_j は j -方向の単位ベクトル）。

これではまだ $\tilde{x} \in \epsilon\mathbb{Z}^d$ が無限個あって、上の積分は良く定義できていない。そこで、 \mathbb{Z}^d 自身を有限の（一辺 $2L$ の）格子に切り取ってしまい、有限の格子 Λ を定義する：

$$\Lambda := \{(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)}) \in \mathbb{Z}^d \mid |x^j| \leq L\} \quad (2.1.4)$$

そして、この有限格子 Λ 上で、以下の期待値を定義しよう：

$$\langle \cdots \rangle_{\Lambda, \epsilon} := \frac{1}{Z_{\Lambda, \epsilon}} \int \left(\prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x \right) (\cdots) \exp \left[-\epsilon^d \sum_{\tilde{x} \in \epsilon\mathbb{Z}^d} \left(\sum_{j=1}^d \frac{\{\varphi_{\tilde{x}+\epsilon e_j} - \varphi_{\tilde{x}}\}^2}{2\epsilon^2} + \tilde{V}(\varphi(\tilde{x})) \right) \right] \quad (2.1.5)$$

ここで

$$Z_{\Lambda, \epsilon} := \int \left(\prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x \right) \exp \left[-\epsilon^d \sum_{\tilde{x} \in \epsilon\mathbb{Z}^d} \left(\sum_{j=1}^d \frac{\{\varphi_{\tilde{x}+\epsilon e_j} - \varphi_{\tilde{x}}\}^2}{2\epsilon^2} + \tilde{V}(\varphi(\tilde{x})) \right) \right] \quad (2.1.6)$$

¹⁶とにかく「OS の公理系を満たす Schwinger 関数の組」さえ得られればよい、との立場に立てば、場の理論の経路積分などに引かざる必要はなく、天下りにでも「OS の公理系を満たす Schwinger 関数の組」を見つけられればよい。ところが多数の人間が努力したにも関わらず、これ以外のアプローチはそれほど成功しているとは言えない。また、物理屋としても、連続時空と離散的な時空の間にそんなに差があるとは思いたくない。このような理由で、ともかく経路積分から出発してみようということであって、皆さんがもっといい方法を見つけられればそれでも一向に構わない

¹⁷実際には以下の表式はグリーン関数に相当するものである。ただし、 $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$ (x_j の時刻をそれぞれ t_j と書いた) が成り立つ場合にはグリーン関数と Wightman 関数は一致するので、ここでは両者の違いを無視した

は期待値を定義する際の規格化因子である。そしてこの有限格子での Schwinger 関数の類似物を

$$S_{n,\Lambda,\epsilon}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) := \mathcal{N}_\epsilon^N \langle \varphi_{x_1}, \dots, \varphi_{x_n} \rangle_{\Lambda,\epsilon} \quad (2.1.7)$$

と定義する —— \mathcal{N}_ϵ は今までには現れていなかったが、「場の量のくりこみ」を表すもので、以下に述べる連続極限が存在するように調節する。(この意味で (2.1.3) は正確ではなく、実際には右辺に N_ϵ^n が現れたものを考える。)

これで格子正則化を行った場合、どのような系を考えると良いかの見当をつけることができた。場の理論の構成を行う場合には、この道筋を逆にたどるつもりで、 Λ を大きくして \mathbb{Z}^d にする極限、さらには $\epsilon \downarrow 0$ とする極限をとって、Schwinger 関数 (の候補) を定義する：

$$S_n(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} S_{n,\Lambda,\epsilon}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \quad (2.1.8)$$

もちろん、この極限が存在するか否かは全く自明ではないが、 $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$ の極限が存在することは多くの場合に証明できる。一方、 $\epsilon \downarrow 0$ の極限はもっと大変で、 \tilde{V} 中のパラメーターや場の規格化因子 \mathcal{N}_ϵ を、 ϵ の関数として適切に調節しつつ、極限をとる事が必要になる。これらについては、後に詳述する。なお、この $\epsilon \downarrow 0$ の極限を**連続極限** (continuum limit) と呼ぶ。

さて (2.1.5) の表式は Λ 上のスピン $\varphi_{\tilde{x}}$ のなす、統計力学系の形をしている。特に、隣り合ったスピン同士が同じ値をとりたがる傾向にあり、(磁石のモデルとしてのスピン系の用語を流用すると) **強磁性的なスピン系** になっている。場の理論を構成するつもりで進んで来たのだが、思わぬところで統計力学のスピン系との密接な関係を見いだしてしまった事になる。歴史的には、このような出会いは非常に幸運であった。この関係によって、場の理論に特有の手法、統計力学に特有の手法の両方を用いた解析の可能性が拓かれたからである。1970 年代、このような結びつきによって構成的場の理論と厳密統計力学は劇的に進歩した。

2.2 連続極限をとる際の条件

前節で格子正則化を導入した。これから、連続極限をとる際にどのような条件が必要かを考えて行く。この節では厳密性に拘らず、大体のアイデアを説明する (厳密な解析は 3 節以降で行う)。

(2.1.2) から (2.1.1) へ戻るのは OS の公理系さえ満たしていれば自動的にできるから、よしとしよう¹⁸。一番の問題は $\epsilon \downarrow 0$ の極限がとれるか、つまり (2.1.3) から (2.1.2) へ、**意味のある極限が存在するように** 移行できるかと言うことである。連続極限で意味のある振る舞いをする 2 点関数 (や n 点関数) を作りたいので、そのためには系のパラメーターをうまく調節することが不可欠である。

実際、統計力学系として、パラメーターを全く動かさないで連続極限をとってみた例を図 1 の (b) に示した。この場合、系のパラメーターを変えないので、単に空間のスケールがどんどん縮んで行く事になり、図に示したように、2 点関数は原点以外ではゼロに収束してしまう。これでは粒子が空間を飛んでいるような場の理論は表現できない。

まともな場の理論を作るには図 1 の (c) で示唆されるように、統計系のパラメーターを ϵ の関数としてうまく調節してやって、連続極限でも適度に広がった関数を作る必要がある。ここから場の理論と臨界現象の接点が見えてくる。

なお、以下では少し、統計力学 (特に臨界現象) の知識を前提としている。統計力学に詳しくない方は、次の 3 節を先に読まれるのが良いだろう。

2.2.1 連続極限の条件：1. 臨界現象との関係 (長さのスケール)

連続極限をとる際の条件を考えるためには、(2.1.3) の関係を連続時空と格子の言葉でよく見る (特に両者の長さのスケールに注意する) ことが必要である。まず、左辺をみよう。左辺は基本的に連続時空の Schwinger

¹⁸実際はこのように格子から場の理論を作った場合、OS の公理の内の回転対称性が満たされるかどうかは決して自明ではなく、見比べてはいけない。しかし、この講義のレベルではよしとしよう、ということ

関数のつもりである。だから、例えば質量 m_{phys} の粒子を表したければ2点関数は¹⁹

$$S_2(0, \tilde{x}) \approx C \exp(-m_{\text{phys}}|\tilde{x}|) \quad (C \text{ は適当な正の定数}) \quad (2.2.1)$$

のように、距離とともに指数函数的に落ちて欲しい。

一方、右辺は $\epsilon \mathbb{Z}^d$ の上のスピン系であるが、 $\tilde{x} \in \epsilon \mathbb{Z}^d$ に対して

$$x := \frac{\tilde{x}}{\epsilon} \in \mathbb{Z}^d \quad (2.2.2)$$

を考えると、右辺はこの x で添字づけられた \mathbb{Z}^d 上のスピン系とみなすことができる。この x で見ると、(2.2.1) の2点関数は

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_\epsilon \approx C \exp(-m_{\text{phys}}|\tilde{x}|) \approx C \exp(-m_{\text{phys}}\epsilon|x|) \quad (2.2.3)$$

となる。これは \mathbb{Z}^d のスピン系としての相関距離 ξ が²⁰

$$\xi = \frac{1}{m_{\text{phys}} \epsilon} \quad (2.2.4)$$

を満たすことを意味する。

以上から、非常に重要な条件が得られた：

条件1. $\epsilon \downarrow 0$ でも m_{phys} を有限に保ちたいなら、(2.2.4) を満たすように ξ を無限大にすべし。
(そのように \tilde{V} 中のパラメーターを ϵ の関数として選ぶべし。)

これは正に、系を \mathbb{Z}^d -スピン系の 臨界点に接近 させることを意味する。

さて、臨界現象を示す統計系は非常にたくさんある（その一例が前節まで考えてきた φ^4 -スピン系で、これは3節で実際に厳密に解析する）。従って、この条件1を満たすには（満たすだけで良いなら）、臨界現象を示す統計力学系を持ってきて、 $\epsilon \downarrow 0$ に伴ってうまく臨界点に近づけてやれば良いということになる。

2.2.2 連続極限の条件：2. 場の規格化

勿論、連続極限に際しての条件はこれだけではない。(2.1.2) の極限が存在するためには、勿論、 φ の大きさも問題である。つまり、いくら (2.2.4) が満たされていても、Schwinger 関数全体が一斉に無限大やゼロに収束しては元も子もない。この意味で、

条件2. 場の量の規格化も適当に調節すべし。

ただ、これはスピン変数 φ を一斉に適当に定数倍することによって、回避できる可能性がある。例えばスピン系の2点関数が

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_\epsilon \approx \epsilon^{2\alpha} \exp(-m_{\text{phys}}|\tilde{x}|) \quad (2.2.5)$$

のようにゼロになるのであれば ($\alpha > 0$)、場の量 $\tilde{\varphi}_x$ を

$$\tilde{\varphi}_x := \epsilon^{-\alpha} \varphi_x \quad (2.2.6)$$

と定義したつもりで

$$S_{2,\epsilon}(0, x) := \epsilon^{-2\alpha} \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_\epsilon \quad (2.2.7)$$

を考えれば、この2点関数に関しては嫌な $\epsilon^{2\alpha}$ は消える。この例は (2.1.8) で $\mathcal{N}_\epsilon = \epsilon^{-\alpha}$ としたことにあたる。

勿論この場合、他の n -点関数まで有限の極限を持っているかどうかは全く自明ではない²¹。しかしともかく、我々にできることはこの例のように場の量を一斉に (ϵ の関数として) 何倍かすることだけである。この2番目の規格化の条件は（あまり打つ手が無いという意味で）そんなに大きなものではない（が、これが次の「trivial でない」条件に効いてくる）。

¹⁹この辺りでは物理の知識を天下りに援用している

²⁰相関距離などについても後に詳しく定義する

²¹後述のガウス (3.2.4) などがあれば、 n -点関数を2点関数の積でおさえるなどして、有限の極限を存在を言える場合がある

2.2.3 連続極限の条件：3. Trivial でないこと

最後に、我々のやっていることが物理的に意味を持つ為の条件を挙げておこう。実は格子正則化とか色々言わなくても、任意の空間次元で場の理論が構成できる——ガウス場（自由場）の理論である。しかし、この理論は構成粒子が全く相互作用せずに互いに素通りする、あまり（全然？）おもしろくないものである。例えこのような場が存在しても（他の粒子 — 我々と観測装置を含む — と全く相互作用しないから）我々とは全く無関係のはずである。

と言うわけで、我々がこの世の中を記述したいのなら、ガウス場のような相互作用の無い理論には価値がない。そこで三つ目の条件として

条件3. 出来た場の理論は相互作用のある理論（nontrivial な理論と言う）であるべし

を得る。

以上の3つの条件を満たせば、大体、我々の望む場の理論ができそうだ。問題は、実際にこの3条件を満たす場の理論が作れるかである。上に述べてきたように、また次節以降で見ると、条件1や2だけを満たす事はそれほど難しくなく、ところが条件3が大問題で、現在のところ、4次元では条件3まで含めて厳密に成功した例はない。また、厳密さを犠牲にした議論をしても、これらの条件（特に条件3）は可能な場の理論を非常に強く制限する。結局、4次元では「非可換ゲージ理論」のみ²²が条件1～3の全てをみたすと考えられている。

2.2.4 連続極限のとり方：まとめ

以上を簡単にまとめておこう。

Step 1 まず、格子間隔 ϵ の格子 $\epsilon\mathbb{Z}^d$ 上の統計系を定義する：

$$\langle \cdots \rangle_\epsilon := \int d\rho_\epsilon(\{\varphi\})(\cdots). \quad (2.2.8)$$

Step 2 ρ_ϵ を ϵ の関数として（上の条件1～3を満たすように）絶妙に調節しながら $\epsilon \downarrow 0$ の連続極限をとり、OSの公理系を満たすSchwinger関数の組を作る。

Step 3 最後に、OSの再構成定理、Wightmanの再構成定理を使って、ミンコフスキー空間上の場の理論を作る。

くり返しになるが、問題は第二のステップ、つまりどのように ρ_ϵ をとるべきか（どのように ρ_ϵ 中のパラメーターを調節すべきか）と言うことである。

3 統計力学における臨界現象

さて、前節までで、場の理論を構成する一つの方法として、格子正則化の方法がある事を紹介した。そのとき、キーになるのは統計力学系としての臨界点の存在である事も簡単に述べた。本節では、そのシナリオが実際に行えるのか、格子上の統計力学系（特にスピン系）の性質——特に臨界点の存在——を調べる。

²²「のみ」というのは確かに言い過ぎで、他にも可能性は多々ある。ただし、それらがどのくらい、物理的に「自然」かは別問題である。ここの「のみ」は「自然な理論の中ではこれのみ」くらいの緩い意味で受け取って頂きたい

3.1 スピン系の定義, φ^4 -系の定義 (まず有限体積で)

考える対象は, d -次元正方格子 $\mathbb{Z}^d := \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)}) : x^{(j)} \in \mathbb{Z}\}$ 上の「スピン系」である. 数学的には, \mathbb{Z}^d の各元 (サイトと言う) x に, 実数値をとる確率変数 (スピン変数) φ_x が乗っているものである. ただし, スピン変数は独立でない —— これが臨界現象の存在には不可欠であると同時に解析を難しく (面白く) する.

有限体積系の定義から始めよう. \mathbb{Z}^d の部分集合として各辺の長さが $2L$ の「超直方体」 Λ をとり, かつ周期的境界条件 (Periodic Boundary Condition, PBC) を課す²³. この意味は,

$$\Lambda := \left\{ (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)}) \mid x^{(j)} \in \mathbb{Z}, -L < x_j \leq L \right\} \quad (3.1.1)$$

とするが, ただし $x^{(j)} = -L$ を $x^{(j)} = L$ と同一視することである. 以下, $|\Lambda|$ によって, Λ 中の点の数を表す. 定義により, $|\Lambda| = (2L)^d$ である.

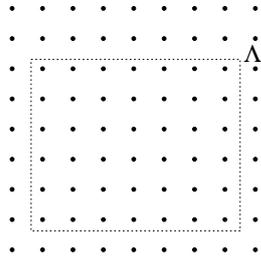


図 2: 考えている格子

この格子の各点 $x \in \Lambda$ に (実数値をとる) 確率変数 (スピン変数) φ_x が乗っている状況を考え, その確率分布 (密度) を ρ_Λ とする (この ρ_Λ がスピン系を規定する). そして, 以下の熱力学的期待値を定義する.

$$\langle F(\{\varphi_x\}) \rangle_{\rho_\Lambda} := \int \left(\prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x \right) \rho_\Lambda(\{\varphi_x\}) F(\{\varphi_x\}) \quad (3.1.2)$$

F としては, スピン変数の多項式程度のもを主に考える²⁴.

さて, ρ_Λ として, 余りに一般的なものを考えても仕方ない (また, 解析ができない) ので, この講義では (2.1.5) に対応した²⁵, 以下の形の ρ_Λ に限定して話を進める²⁶:

$$\rho_\Lambda(\{\varphi_x\}) := \frac{1}{Z_\Lambda} \exp \left[\frac{J}{2} \sum_{\substack{x, y \in \Lambda \\ |x-y|=1}} \varphi_x \varphi_y \right] \cdot \prod_{x \in \Lambda} \eta(\varphi_x) \quad (3.1.3)$$

ここで Z_Λ は規格化定数で, $\langle 1 \rangle_{\rho_\Lambda} = 1$ となるようにとる. つまり

$$Z_\Lambda = \int \left(\prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x \right) \exp \left[\frac{J}{2} \sum_{\substack{x, y \in \Lambda \\ |x-y|=1}} \varphi_x \varphi_y \right] \cdot \prod_{x \in \Lambda} \eta(\varphi_x) \quad (3.1.4)$$

²³他の境界条件 (特に自由境界条件や+境界条件と呼ばれるもの) もよく考えられるし重要であるが, 今日の話にはそれほど必要がないので, 記述を簡単にするため, 周期的境界条件に話を限る

²⁴この期待値の (無限体積および連続) 極限の結果を Schwinger 関数とする予定であるから, スピン変数の多項式を考えておけば十分

²⁵(2.1.5) と少し異なるのは $(\varphi_x - \varphi_y)^2$ に相当する項を展開して, φ_x^2 に相当するところを η の中に押し込んだところである. この関係については 3.1.1 節でもっと説明する

²⁶ (物理の言葉で) 外部磁場による相互作用の項 $+H \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x$ を指数関数の中にいれたものもかなりの部分, 解析可能であるが, 今日では扱わない

である。 $J \geq 0$ はパラメーターで、あとから色々調節する。また、 $\eta(\varphi)$ は一変数 φ の分布を定める確率測度（の密度関数）であるが、今日は代表的な二つのモデル、イジングモデル

$$\eta(\varphi) = \delta(\varphi^2 - K^2) \quad K > 0 \text{ はパラメーター} \quad (3.1.5)$$

および φ^4 モデル

$$\eta(\varphi) = \exp\left[-\frac{\mu}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4\right] \quad \mu \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0 \text{ はパラメーター} \quad (3.1.6)$$

の場合に話を限る。なお、記号を簡単にするため、スピン変数とその測度をまとめて $\Phi \equiv \{\varphi_x\}_{x \in \Lambda}$, $d\Phi \equiv \prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x$ と書くことがある。

Remarks:

1. イジングモデルは φ^4 モデルにおいて、 $\mu = 2dJ - \frac{\lambda K^2}{6}$ として $\lambda \uparrow \infty$ の極限をとったものである。
2. φ^4 モデルでは3つのパラメーター (J, μ, λ) があるが、 φ の大きさを一斉に変える自明な変換 $(a > 0 \text{ は定数})$

$$\varphi \Rightarrow \varphi' := a\varphi \quad (3.1.7)$$

の下では

$$(J, \mu, \lambda) \Rightarrow (J', \mu', \lambda') := (a^2 J, a^2 \mu, a^4 \lambda) \quad (3.1.8)$$

と対応させると、両者は全く同じものになる。この意味で、3つのパラメーターの内、一つは余分なものである。（ただし、場の理論を構成する際には、場の量をどのように規格化するかは重要であるから「一つは余分」は言い過ぎではある。）いずれ連続極限をとる際に、場の規格化因子 \mathcal{N}_ϵ を導入するから、今の段階ではスピンの大きさは問題ない。（この意味では、イジングモデルでは $K = 1$ としてしまっても良い。）

3. $J > 0$ の場合、スピン同士の相互作用の項 $\frac{J}{2} \sum_{\substack{x, y \in \Lambda \\ |x-y|=1}} \varphi_x \varphi_y$ は、隣り合ったスピンの向きを揃えようとする。これを物理的背景から**強磁性的相互作用**（ferromagnetic interaction）と表現する。
4. 統計力学の文脈では $\rho = \exp(-\beta\mathcal{H})$ と書き、 \mathcal{H} をハミルトニアンと呼ぶことが多い。
5. 統計力学のモデルとしてみた場合、上の J は（相互作用の強さ/ $(k_B T)$ ）、という物理的意味を持つ（ k_B はボルツマン定数、 T は温度）。ただし、今日は場の理論を構成する事が主目的なので、このような物理的解釈にはあまり立ち入らない。ただし、「相転移」「臨界現象」などの統計力学系としての用語は後々、使用する。
6. この有限体積での期待値は、 ρ_Λ がそこそこ性質が良ければ——スピン変数の値が大きいところで ρ_Λ が十分早くゼロになれば——確実に定義できている。特に、上で述べたイジングモデル、 φ^4 モデルでは期待値を定義する分母分子の積分が収束し、確実に定義できている事はすぐにわかる。この意味で、有限体積系の定義には大きな問題はない（無限体積極限が存在するか否かは別であるがこれも肯定的に解決される——3.3節参照）。

見たい量：

場の理論の構成（Schwinger 関数の構成）が我々の目標であるので、特に重要なのは n 個の φ の積 $\langle \varphi_{x_1} \varphi_{x_2} \cdots \varphi_{x_n} \rangle$ である（ x_j には重複があっても良い）。これを n 点相関関数（または単に n 点関数）とよぶ。モデルが φ の符号を一斉に変える変換について不変であるので、 n が奇数の場合の n 点関数は恒等的にゼロである。

後々のために、キュムラントと呼ばれる n 点関数（連結 n 点関数）も定義しておこう：

$$u^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) := \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{\partial}{\partial h_2} \cdots \frac{\partial}{\partial h_n} \log \left\langle \exp \left(\sum_{j=1}^n h_j \varphi_{x_j} \right) \right\rangle \Big|_{h_1=h_2=\dots=h_n=0} \quad (3.1.9)$$

この量は $\{\varphi_x\}$ という確率変数の n 個の相関を表すと解釈できる。 φ の奇数個の積の期待値がゼロであることを考えると、連結相関関数は具体的に

$$u^{(2)}(x, y) = \langle \varphi_x \varphi_y \rangle \quad (3.1.10)$$

$$u^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle \varphi_{x_1} \varphi_{x_2} \varphi_{x_3} \varphi_{x_4} \rangle - \langle \varphi_{x_1} \varphi_{x_2} \rangle \langle \varphi_{x_3} \varphi_{x_4} \rangle \\ - \langle \varphi_{x_1} \varphi_{x_3} \rangle \langle \varphi_{x_2} \varphi_{x_4} \rangle - \langle \varphi_{x_1} \varphi_{x_4} \rangle \langle \varphi_{x_2} \varphi_{x_3} \rangle \quad (3.1.11)$$

などとなっている。

すぐ後に述べるガウス模型では、 $n \geq 3$ の連結相関関数はすべてゼロである。逆に、 $n \geq 3$ の連結相関関数はすべてゼロであれば、考えているモデルはガウス模型か、その重ね合わせになっている。

なお、スピンの関数 f, g に対して、 f, g の共分散を

$$\langle f; g \rangle := \langle f g \rangle - \langle f \rangle \langle g \rangle \quad (3.1.12)$$

と略記する。

3 節での我々の最終目標の確認：

前節で紹介したように、我々の目標はこのスピン系の n 点関数の連続極限として、Schwinger 関数を

$$S_n(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} S_{n, \Lambda, \epsilon}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \mathcal{N}_\epsilon^n \langle \varphi_{x_1} \varphi_{x_2} \cdots \varphi_{x_n} \rangle_{\rho_{\Lambda, \epsilon}} \quad (3.1.13)$$

のように構成することである。（ここでは ρ_Λ 中のパラメーターを ϵ の関数として調節する事を見越して単に ρ_Λ とではなく、 $\rho_{\Lambda, \epsilon}$ と書いた。またこれまでも述べて来たように、 x と \tilde{x} は $\tilde{x} = \epsilon x$ の関係にある）。この問題にはこの節の最後でもう一度立ち帰ることにする —— それまでは、 ϵ は固定したと思って、格子系のスピン系の解析を進める。

なお、 J と \mathcal{N}_ϵ のどちらかは余分である（例えば、 $\mathcal{N}_\epsilon \equiv 1$ と固定して J の大きさを変えてやれば、全てのモデルを扱える）。しかし、両方残している方が便利な事もあるので、ここでも \mathcal{N}_ϵ を入れておいた。

3.1.1 「場の理論」と「スピン系」のパラメーターの関係

すぐ上に確認したように、我々の目的は連続時空上の Schwinger 関数を、スピン系の相関関数の適切な極限として (3.1.13) のように構成する事であるが、このような場合に混乱しがちなのはパラメーターの関係である。場の理論は（少なくとも形式的には）連続時空上のものであるから、諸量を積分の形で書くのが自然であるが、格子上の統計力学系は（格子が離散的なので）和で書くのが自然である。これに対応して、理論を規定するパラメーターの自然な取り方にも違いがある。ここではこの違いを簡単に（全く厳密ではないレベルで）まとめておく。

場の理論の表式としては (2.1.3) を、「場の量のくりこみ」を考えに入れて補正した (2.1.7) をとる。具体的にはこれは（期待値を定義するための規格化因子は省略した）

$$S_n(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \approx \mathcal{N}_\epsilon^n \int [D\tilde{\varphi}] \tilde{\varphi}_{\tilde{x}_1} \tilde{\varphi}_{\tilde{x}_2} \cdots \tilde{\varphi}_{\tilde{x}_n} \exp \left[-\epsilon^d \sum_{\tilde{x} \in \epsilon \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{j=1}^d \frac{\{\tilde{\varphi}_{\tilde{x}+\epsilon e_j} - \tilde{\varphi}_{\tilde{x}}\}^2}{2\epsilon^2} + \tilde{V}(\tilde{\varphi}_{\tilde{x}}) \right) \right] \quad (3.1.14)$$

となっている。ただし、格子上の系との対応をつけるため、場の量を φ ではなく、 $\tilde{\varphi}$ とした。（ここまでは連続極限の形式的な表式を形式的に離散化しただけで、連続時空上で自然なパラメーターの取り方になっている。）

これから格子間隔1の格子上のスピン系（この節で考えているもの）との関係をつけよう。格子点同士の関係はこれまでも出ているように $\tilde{x} = \epsilon x$ である。これに対応して場の量とスピン変数を

$$\varphi_x := \mathcal{N}_\epsilon \tilde{\varphi}_{\tilde{x}} \quad \text{ただし} \quad \tilde{x} = \epsilon x \quad (3.1.15)$$

として関係付けよう。 φ_x は $x \in \mathbb{Z}^d$ に棲んでいるスピン変数である。これを用いて (3.1.14) を書き直すと（またもや期待値を定義するための規格化因子は省略）

$$\begin{aligned} S_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &\approx \int [D\varphi] \varphi_{x_1} \varphi_{x_2} \cdots \varphi_{x_n} \exp \left[-\epsilon^d \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{j=1}^d \frac{\{\varphi_{x+e_j} - \varphi_x\}^2}{2\epsilon^2 \mathcal{N}_\epsilon^2} + \tilde{V}\left(\frac{\varphi_x}{\mathcal{N}_\epsilon}\right) \right) \right] \\ &= \int [D\varphi] \varphi_{x_1} \varphi_{x_2} \cdots \varphi_{x_n} \exp \left[-\frac{\epsilon^{d-2}}{4\mathcal{N}_\epsilon^2} \sum_{x,y:|x-y|=1} (\varphi_x - \varphi_y)^2 + \epsilon^d \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \tilde{V}\left(\frac{\varphi_x}{\mathcal{N}_\epsilon}\right) \right] \\ &= \int [D\varphi] \varphi_{x_1} \varphi_{x_2} \cdots \varphi_{x_n} \exp \left[\frac{\epsilon^{d-2}}{2\mathcal{N}_\epsilon^2} \sum_{x,y:|x-y|=1} \varphi_x \varphi_y - \sum_x \left\{ \frac{d\epsilon^{d-2}}{\mathcal{N}_\epsilon^2} \varphi_x^2 + \epsilon^d \tilde{V}\left(\frac{\varphi_x}{\mathcal{N}_\epsilon}\right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

となる。

この最後の表式に出ている測度が、我々の扱うスピン系の ρ_Λ ((3.1.3) 式の) に対応すべきものである。両者を見比べると、

$$J = \frac{\epsilon^{d-2}}{\mathcal{N}_\epsilon^2} \quad (3.1.17)$$

および

$$\eta(\varphi) := \exp \left[-\frac{d\epsilon^{d-2}}{\mathcal{N}_\epsilon^2} \varphi^2 - \epsilon^d \tilde{V}\left(\frac{\varphi}{\mathcal{N}_\epsilon}\right) \right] \quad (3.1.18)$$

であることがわかる。特に、 φ^4 モデルの場合にパラメーターを比べてみると、場の理論として

$$\tilde{V}(\tilde{\varphi}) = \frac{\lambda^{\text{FT}}}{4!} \varphi^4 + \frac{\mu^{\text{FT}}}{2} \varphi^2 \quad (3.1.19)$$

と書かれていたものは、

$$\eta(\varphi) = \exp \left[-\left\{ \frac{d\epsilon^{d-2}}{\mathcal{N}_\epsilon^2} + \frac{\epsilon^d \mu^{\text{FT}}}{\mathcal{N}_\epsilon^2} \right\} \varphi^2 - \frac{\epsilon^d \lambda^{\text{FT}}}{\mathcal{N}_\epsilon^4} \frac{1}{4!} \varphi^4 \right] \quad (3.1.20)$$

となる。つまり、スピン系としての J, λ, μ との関係は

$$J = \frac{\epsilon^{d-2}}{\mathcal{N}_\epsilon^2}, \quad \mu = \frac{1}{\mathcal{N}_\epsilon^2} \left(\epsilon^d \mu^{\text{FT}} + 2d\epsilon^{d-2} \right), \quad \lambda = \frac{\epsilon^d}{\mathcal{N}_\epsilon^4} \lambda^{\text{FT}} \quad (3.1.21)$$

となっている、もし、いわゆる「くりこみ」が全く必要ないと仮定すると、上で $\mathcal{N}_\epsilon = 1$ ととって λ, μ, J を ϵ の関数として調節してやれば、Schwinger 関数が作れることになる。（もちろん、話はそう単純ではない。）

3.1.2 正確に解ける例：ガウス模型

このような格子系がどのように振る舞うのかの例として、すぐに解ける「ガウス模型」を紹介しておく。この模型は φ^4 モデルにおいて、 $\lambda = 0$ として定義される。ただし、(3.1.6) と少しだけ μ の定義をずらして

$$\rho_\Lambda(\Phi) = \frac{1}{Z} \exp \left[-\frac{J}{4} \sum_{\substack{x,y \in \Lambda \\ |x-y|=1}} (\varphi_x - \varphi_y)^2 - \frac{\mu}{2} \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x^2 \right] \quad (3.1.22)$$

と書く事にしよう。これは単なるガウス積分なので簡単に解析できる。その無限体積極限に対する結果だけをのべると、 $d=1,2$ では $\mu > 0$ で、また $d \geq 3$ では $\mu \geq 0$ で、このモデルは定義できていて、その2点関数は無限体積極限では

$$\langle \varphi_x \varphi_y \rangle = \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik \cdot (x-y)}}{\mu + 2J \sum_{j=1}^d (1 - \cos k_j)} \quad (3.1.23)$$

である。これを少し解析すると、 $\mu > 0$ では

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \stackrel{|x| \rightarrow \infty}{\approx} \frac{const}{|x|^{(d-1)/2}} \exp\{-const' \cdot \sqrt{\mu}|x|\} \quad (3.1.24)$$

また、 $\mu = 0$ では、

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \approx \begin{cases} \frac{const}{|x|^{d-2}} & (d > 2) \\ \infty & (d \leq 2) \end{cases} \quad (3.1.25)$$

であることがわかる。

更に、4点以上の相関関数は以下のWickの定理より決まる。

Theorem 3.1.1 (Wick の定理) ガウス模型 (ハミルトニアンが φ の2次形式で書ける模型) では、

$$\langle \varphi_{x_1} \varphi_{x_2} \cdots \varphi_{x_{2n}} \rangle = \sum_p \prod_{j=1}^n \langle \varphi_{x_{p(j)}} \varphi_{x_{p(j+n)}} \rangle. \quad (3.1.26)$$

右辺の p は1から $2n$ までの添字をふたつずつのペアに分ける分け方を意味し、このような全ての分け方について和をとる。また、奇数個の φ の積の期待値はもちろん、ゼロである。

3.2 相関不等式と鏡映正值性

これから格子スピン系を解析し、臨界現象の存在を示して行く。本題に入る前に、我々の武器となる二つの主要な道具を紹介する。

3.2.1 相関不等式

相関不等式とは、スピン系の相関関数の間に成り立つ不等式の事である。様々な種類があるが、我々にとって重要なものを列挙する。これらの不等式はすべて、上記のイジングモデル、および φ^4 モデルに対して証明できる。以下では数式を簡単にするため、 n 点関数 $\langle \varphi_{x_1} \varphi_{x_2} \cdots \varphi_{x_n} \rangle$ を $\langle \varphi^A \rangle$ や $\langle \varphi^B \rangle$ などと略記することがある。(かなり酷い記号法であるが、 $A = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ と略記したと理解されたい)。

Griffithsの第一不等式 [15, 16]

$$\langle \varphi^A \rangle \geq 0 \quad (3.2.1)$$

Griffithsの第二不等式

$$\langle \varphi^A; \varphi^B \rangle := \langle \varphi^A \varphi^B \rangle - \langle \varphi^A \rangle \langle \varphi^B \rangle \geq 0 \quad (3.2.2)$$

Lebowitzの不等式とガウス型不等式

$$\langle \varphi_x \varphi_y \varphi_z \varphi_w \rangle \leq \langle \varphi_x \varphi_y \rangle \langle \varphi_z \varphi_w \rangle + \langle \varphi_x \varphi_z \rangle \langle \varphi_y \varphi_w \rangle + \langle \varphi_x \varphi_w \rangle \langle \varphi_y \varphi_z \rangle \quad (3.2.3)$$

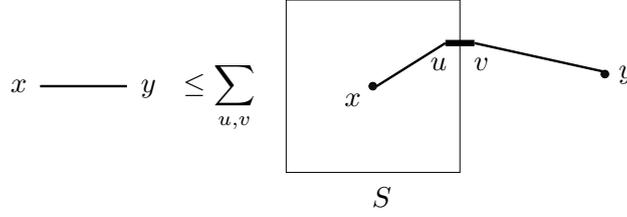


図 3: Simon 不等式の概念図. 太く短い線は J を, 実線は 2 点関数を表し, 交点について和をとる.

$$\langle \varphi_{x_1} \varphi_{x_2} \cdots \varphi_{x_{2n}} \rangle \leq \sum_{j=2}^{2n} \langle \varphi_{x_1} \varphi_{x_j} \rangle \langle \varphi_{x_1} \varphi_{x_2} \cdots \check{\varphi}_{x_j} \cdots \varphi_{x_{2n}} \rangle \quad (3.2.4)$$

ここで $\check{\varphi}_{x_j}$ とは, φ_{x_j} が期待値の中には現れていないことを意味する.

Messenger-Miracle-Solé の不等式 [18] (の帰結)

この不等式は非常に面白く, 相関関数の空間的な (弱い) 単調性を保証するものである. 結果は非常に自然なものではあるが, これがあるおかげで, 解析がかなり楽になる.

- (i) $e_1 := (1, 0, 0, \dots, 0)$ を定義する. 非負の整数 a に対して, $\langle \varphi_0 \varphi_{ae_1} \rangle$ は a の非増加関数である. おおざっぱにいうと, 座標軸上の 2 点関数は, 原点から離れるほど, 値が小さくなる.
- (ii) $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)})$ に対して, $\|x\|_1 := \sum_{j=1}^d |x^{(j)}|$, $\|x\|_\infty := \max_j |x^{(j)}|$ と定義し, さらに 2 点 $y = \|x\|_\infty e_1$ と $z = \|x\|_1 e_1$ を定義する. このとき,

$$\langle \varphi_0 \varphi_z \rangle \leq \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \leq \langle \varphi_0 \varphi_y \rangle \quad (3.2.5)$$

かなりたつ. おおざっぱにいうと, 座標軸上にない一般の点での 2 点関数は, その座標の ℓ^1 -ノルムと ℓ^∞ -ノルムで決まる座標軸上の点 z, y での 2 点関数で上下からはさまれている.

以上の不等式はどれも, 左辺に現れる φ の次数と右辺に現れる φ の次数が等しい, いわば「斉次」ともいふべき不等式であった. 以下の不等式はこれらと異なり, 左辺と右辺で φ の次数が異なっている²⁷.

Simon の不等式 [22]

$x, y \in \mathbb{Z}^d$ とし, x を囲むような \mathbb{R}^d 内の超平面 S を, y をその内部に含まないようにとる (格子を考えているので, 格子点の中間を通るような面をつないで作ると良い; 図 3 参照). S の内側 (x のある方) を B と書く. また不等式の意味をはつきりさせるため, 相互作用の J をわざわざ

$$J_{x,y} := \begin{cases} J & (|x - y| = 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (3.2.6)$$

と書く. すると,

$$\langle \varphi_x \varphi_y \rangle \leq \sum_{u,v \in \mathbb{Z}^d} \langle \varphi_x \varphi_u \rangle J_{u,v} \langle \varphi_v \varphi_y \rangle = \sum_{\substack{|u-v|=1 \\ u \in B, v \in B^c}} \langle \varphi_x \varphi_u \rangle J \langle \varphi_v \varphi_y \rangle \quad (3.2.7)$$

が成り立つ. 上の式の真ん中に示しているように, 和の中身は $x \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow y$ とつながる形になっていて, u, v が x, y を隔てている超平面 S の両側にある.

Lebowitz 不等式 (3.2.3) は $u^{(4)}(x, y, z, w) \leq 0$ と表す事ができるが, この量を下から押さえる (かつ, 有効な) 不等式はないのだろうか? 二つの例を紹介する.

²⁷ただ, 次元を勘定すれば納得できるように, その次数の食い違いを J の次数で補正する形になっている. (3.1.3) をみればわかるように, $J\varphi^2$ が無次元量の組み合わせになっている

$$u^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq - \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad J \\ \diagup \quad \diagdown \\ x_3 \quad x_4 \\ \quad J \end{array} - (2 \text{ permutations})$$

図 4: Aizenman-Fröhlich 不等式の模式図. 太く短い線は J を, 実線は 2 点函数を表し, 交点について和をとる.

Aizenman の不等式 [4, 5], Fröhlich の不等式 [9]

$$u^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq - \sum_z \langle \varphi_{x_1} \varphi_z \rangle \langle \varphi_{x_3} \varphi_z \rangle \left\{ \delta_{z, x_2} + \sum_{z_1} J_{z, z_1} \langle \varphi_{z_1} \varphi_{x_2} \rangle \right\} \left\{ \delta_{z, x_4} + \sum_{z_2} J_{z, z_2} \langle \varphi_{z_2} \varphi_{x_4} \rangle \right\} - (2 \text{ permutations}) \quad (3.2.8)$$

ここで (2 permutations) というのは, 第一行において x_2, x_3, x_4 の役割を入れ替えたものを 2 項, という意味である. この不等式の強みは, 次のスケルトン不等式とは異なり, 右辺には φ^4 項の強さ λ などが出ていない事にある. このため, λ が非常に大きくても有効な不等式として使える場合があり, 「非摂動的な」効果を押し込んだ良い不等式と言える. これは 6.2 節で見るように, 場の理論の triviality の証明に威力を発揮する (統計力学系の解析に用いれば, $\lambda = \infty$ に相当するイジングモデルでも解析できる).

スケルトン不等式 (skeleton inequalities) [7]

これは通常物理で行う「摂動展開」と密接に関係した面白い不等式である. 右辺に λ がでてくるので, λ の小さいところでしか有効でないが, 5.2 節で見るような, 場の理論の構成には十分に役に立つ.

$$u^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \leq 0 \quad (3.2.9)$$

$$u^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq -\lambda \sum_z \langle \varphi_{x_1} \varphi_z \rangle \langle \varphi_{x_2} \varphi_z \rangle \langle \varphi_{x_3} \varphi_z \rangle \langle \varphi_{x_4} \varphi_z \rangle \quad (3.2.10)$$

$$u^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \leq -\lambda \sum_z \langle \varphi_{x_1} \varphi_z \rangle \langle \varphi_{x_2} \varphi_z \rangle \langle \varphi_{x_3} \varphi_z \rangle \langle \varphi_{x_4} \varphi_z \rangle + \frac{\lambda^2}{2} \left\{ \sum_{y, z} \langle \varphi_{x_1} \varphi_y \rangle \langle \varphi_{x_2} \varphi_y \rangle \langle \varphi_y \varphi_z \rangle^2 \langle \varphi_{x_3} \varphi_z \rangle \langle \varphi_{x_4} \varphi_z \rangle + (2 \text{ permutations}) \right\} \quad (3.2.11)$$

数式だと見にくいですが, ファインマンダイアグラムのように書いてみると, その意味は一目瞭然である (図 5 参照).

Remark. これらの不等式はまず, 有限体積で証明するが, その後で無限体積の極限をとることにより, (無限体積極限がある限り) 無限体積極限に対しても成立することが簡単に証明される.

3.2.2 相関函数の単調性

Griffiths 第二不等式から, 物理的には大変に自然な, 相関函数の単調性が出る. この性質は以下で繰り返し使われるので, ここでまとめて見ておこう.

相関函数 $\langle \varphi^A \rangle$ を考える. 今, 他のパラメーターは固定して, J だけを動かす事を考えよう. J を増やした場合, この相関函数の値は増えるだろうか?

$$\begin{aligned}
& u^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq -\lambda \\
& \begin{array}{ccc} & x_1 & x_2 \\ & \diagdown & \diagup \\ & \bullet & \\ & \diagup & \diagdown \\ & x_3 & x_4 \end{array} \\
& u^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \leq -\lambda \\
& \begin{array}{ccc} & x_1 & x_2 \\ & \diagdown & \diagup \\ & \bullet & \\ & \diagup & \diagdown \\ & x_3 & x_4 \end{array} + \frac{\lambda^2}{2} \begin{array}{ccc} & x_1 & x_2 \\ & \diagdown & \diagup \\ & \bullet & \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \\ & \diagup & \diagdown \\ & x_3 & x_4 \end{array} + (2 \text{ permutations})
\end{aligned}$$

図 5: $u^{(4)}$ のスケルトン不等式. 実線は 2 点関数を表し, 交点 (小さな黒丸) について和をとる. 右辺は $u^{(4)}$ のスケルトン展開の 1 次, 2 次になっている.

物理的には増えることが期待される. なぜなら, スピン間の強磁性的相互作用の強さが J に比例しているからである. 隣り合ったスピン同士は互いに同じ向きを向きたいと思っているが, その傾向は J とともに増加する. よって, 相関関数も J と共に増加する事が期待される.

この予想は実際, Griffiths 第二不等式からすぐに導出できる. それを見るため, $\langle \varphi^A \rangle$ を J で微分してみよう. 期待値の定義を思い出して普通に微分すると,

$$\frac{\partial}{\partial J} \langle \varphi^A \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x, y \in \Lambda \\ |x-y|=1}} \langle \varphi_x \varphi_y; \varphi^A \rangle \quad (3.2.12)$$

が得られる. ところが, この右辺の和の中身は Griffiths 第二不等式により非負である. つまり, $\langle \varphi^A \rangle$ が J について広義の増加関数であることが示された. まとめておこう.

命題 3.2.1 $\langle \varphi^A \rangle$ は, J の関数として広義増加関数である.

3.2.3 鏡映正值性の帰結

鏡映正值性 (reflection positivity) とは, 格子と相互作用の対称性が良ければ成り立つ性質である. その定義は少しややこしいのでここでは割愛するが, 我々の考えているイジングモデルおよび φ^4 モデルでは成立する事が証明されている. ここでは鏡映正值性から導かれるいくつかの重要な性質を述べよう.

(1) 「市松模様」評価 (chessboard estimate) 以下の定理で示すように, 一点 x で定義された量の期待値を格子全体での期待値 (の $1/|\Lambda|$ 乗) で押さえるタイプの評価である. これは以下の infrared bound の証明に使われる他, 無限体積極限の存在証明等にも利用できる.

定理 3.2.2 (chessboard estimate [10]) それぞれの $x \in \Lambda$ に対して, x に依存するスピン変数の関数 $f_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ があるとき,

$$\left\langle \prod_{x \in \Lambda} f_x(\varphi_x) \right\rangle_{\Lambda} \leq \prod_{y \in \Lambda} \left\{ \left\langle \prod_{x \in \Lambda} f_x(\varphi_x) \right\rangle_{\Lambda} \right\}^{1/|\Lambda|} \quad (3.2.13)$$

が成り立つ.

(2) **赤外評価 (infrared bound)** これは非常に面白く、かつ強力な結果で、2点関数のフーリエ変換に対して、かなり強い制限を与えてくれるものである。

定理 3.2.3 (運動量空間での infrared bound [11]) 無限体積での2点関数 $\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle$ は以下のように書ける：

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle = p + q(x) \quad (3.2.14)$$

ここで p は非負の定数である。また $q(x)$ (のフーリエ変換) は以下の式を満たす：

$$q(x) = \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik \cdot x} \hat{q}(k), \quad \text{with} \quad 0 \leq \hat{q}(k) \leq \frac{1}{2J \sum_{j=1}^d (1 - \cos k_j)} \quad (3.2.15)$$

上の定理は運動量空間でのものであったが、座標空間でもこれに対応する結果が存在する。ただし、後で定義する「高温相」でのみ証明されている定理であり、 J_c は後に定義するものである。

定理 3.2.4 (座標空間での infrared bound [23]) イジングモデルおよび φ^4 モデルでは、 $J < J_c$ である限り²⁸,

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \leq \frac{\text{const}}{J|x|^{d-2}} \quad (3.2.16)$$

がなりたつ。ここで const は J にはよらない有限な定数である。

(3) **スペクトル表示 (spectral representation)** これも非常に面白い「場の理論」的な味わいの定理である。

定理 3.2.5 (2点関数のスペクトル表示 [10]) $x \in \mathbb{Z}^d$ を成分で $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)})$ と書き、この第2成分以降をまとめて $\vec{x} := (x^{(2)}, \dots, x^{(d)})$ と書く。無限体積での2点関数 $\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle$ は以下のように書ける：

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle = \int d\rho(\lambda, \vec{q}) \lambda^{|x^{(1)}|} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \quad (3.2.17)$$

ここで $d\rho(\cdot, \cdot)$ はその台が $[0, 1] \times [-\pi, \pi)^{d-1}$ に含まれる測度である (従って、上で効いて来る λ, \vec{q} の範囲は $\lambda \in [0, 1]$, $\vec{q} = (q^{(2)}, q^{(3)}, \dots, q^{(d)}) \in [-\pi, \pi)^{d-1}$ である)。また、 $\vec{q} \cdot \vec{x} = \sum_{j=2}^d q^{(j)} x^{(j)}$ は、ベクトル \vec{q} と \vec{x} の内積である。

3.3 無限体積の極限

さて格子正則化によって Schwinger 関数を得るには、ともかく格子の大きさを無限大にし、無限体積極限をとる必要がある。形式的には

$$\langle \cdots \rangle_\rho \equiv \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \langle \cdots \rangle_{\rho_\Lambda} \quad (3.3.1)$$

ということである。 Λ を \mathbb{Z}^d に広げたいのだが、その広げ方には何通りもあり得るので “ $\lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d}$ ” と書いておいた。

統計力学に詳しい方は「自由エネルギー」の無限体積極限は非常に広い範囲のモデルで存在する事をご存知だろう。ところが、我々が見たいのはスピン変数の相関関数などの期待値であり、期待値の無限体積極限の存在は自明ではない。自明ではないのだが、イジングモデル、 φ^4 モデルについては、無限体積極限の存在 (ただし、適当な部分列については) は証明されている。概略は以下の通りである。

有限体積での期待値 $\langle \varphi^A \rangle_\Lambda$ の $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$ の極限が存在するか否かを問題にしたい。勿論、 $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$ とは言っても色々な行き方があるが、今日のところは超立方格子の大きさ L を無限大にする極限のみを考えることにする。この問題に対しては以下のように議論する。

²⁸進んだ注：この結果は「自由境界条件」に対しては $J = J_c$ でも証明されている

1. $|\Lambda|$ に関して一様に $\langle \varphi^A \rangle_\Lambda$ が有界であることをまず、示す。つまり $|\Lambda|$ によらない定数 C_A が存在して (C_A は A には依存してよい)

$$|\langle \varphi^A \rangle_\Lambda| \leq C_A \quad (3.3.2)$$

が成立することを示す。

2. 上の事実は、各 A 毎に、期待値 $\langle \varphi^A \rangle_\Lambda$ が収束するような Λ の部分列があることを意味する。従って対角線論法によって、すべての A に対して $\langle \varphi^A \rangle_\Lambda$ が収束するような、 Λ の部分列をとる事ができる。ただし、これはあくまで部分列による構成であるので、部分列の取り方によっては、全く異なる熱力学的極限になってしまう可能性は排除できていない²⁹。

上の議論のうち、二番目は単に部分列をとりまくるだけなので、何にも問題ない。問題は一番目である。もちろん、イジングモデルのようにスピン変数が有界であれば、 $\langle \varphi^A \rangle_\Lambda$ も自明に有界であるので、一番目は何ら問題なく証明できる（証明すべき事すらない）。しかし、 φ^4 モデルのように、スピン変数が有界でない場合には、 Λ のサイズによらないで一様に $\langle \varphi^A \rangle_\Lambda$ が押さえられる事を証明するのは、案外、面倒である。実際、期待値の定義の分母と分子を別々に扱って、分子の上界と分母の下界を作って評価すると、その結果はほぼ確実に $C^{|\Lambda|}$ のオーダーになって ($C > 1$ は定数) 全く役に立たない。

(3.3.2) のような評価を証明するには、通常、「クラスター展開」に類似の考え方、あるいは chessboard estimate を用いるのが普通である。

Chessboard estimate による $\langle \varphi^A \rangle$ の評価

$A = \{a_x\}$ の場合に期待値 $\langle \varphi^A \rangle_\Lambda = \left\langle \prod_x \varphi_x^{a_x} \right\rangle_\Lambda$ を上から押さえる事を考える（Griffiths 第一不等式によって、この期待値は非負であるので、上から押さえれば十分）。

Chessboard estimate の表式において、 $f_x(\phi) := \phi^{a_x}$ としたものを考えると

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_x \varphi_x^{a_x} \right\rangle_\Lambda &= \left\langle \prod_x f_x(\varphi_x) \right\rangle_\Lambda \leq \prod_{y \in \Lambda} \left\{ \left\langle \prod_{x \in \Lambda} f_y(\varphi_x) \right\rangle_\Lambda \right\}^{1/|\Lambda|} \\ &= \prod_{y \in \Lambda} \left\{ \left\langle \prod_{x \in \Lambda} \varphi_x^{a_y} \right\rangle_\Lambda \right\}^{1/|\Lambda|} = \prod_{y \in \Lambda, a_y > 0} \left\{ \left\langle \prod_{x \in \Lambda} \varphi_x^{a_y} \right\rangle_\Lambda \right\}^{1/|\Lambda|} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

が得られる。この右辺に現れている期待値については、以下のように荒っぽく評価しても、 $1/|\Lambda|$ 乗しているために問題ない事がわかる。

期待値の評価が困難なのは、スピン変数が相互作用していて、期待値を定義する積分が積に分解してくれないからである。そこで相互作用の項 $\sum_{|x-y|=1} \varphi_x \varphi_y$ を強引に以下のように押さえて、積分を積に分解できる形にしてしまう：

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{|x-y|=1} \varphi_x \varphi_y \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{|x-y|=1} |\varphi_x \varphi_y| \leq \frac{1}{2} \sum_{|x-y|=1} \frac{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{|x-y|=1} \varphi_x^2 = d \sum_x \varphi_x^2 \quad (3.3.4)$$

これによって期待値の分母は

$$\begin{aligned} \left(\left\langle \prod_{x \in \Lambda} \varphi_x^{a_x} \right\rangle_\Lambda \text{ の分母} \right) &= Z_\Lambda = \int \left(\prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x \right) \exp \left[\frac{J}{2} \sum_{\substack{x, y \in \Lambda \\ |x-y|=1}} \varphi_x \varphi_y \right] \prod_{x \in \Lambda} \eta(\varphi_x) \\ &\geq \int \left(\prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x \right) \exp \left[-dJ \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x^2 \right] \prod_{x \in \Lambda} \eta(\varphi_x) = \left[\int d\varphi \eta(\varphi) e^{-dJ\varphi^2} \right]^{|\Lambda|} \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

²⁹ 実のところ、他の境界条件（自由境界条件、+境界条件など）をとると、期待値 $\langle \varphi^A \rangle_\Lambda$ が Λ について単調であることがいえる場合がある。そのようなときには、部分列などをとらずとも、その境界条件に対しては一意的な無限体積極限の存在が証明できる。また、そのような境界条件を仲介役として用いる事で、周期的境界条件の無限体積極限も一意に定まり、他の境界条件のものと同じである事が証明される場合も多い。今日のところはこのような事情には立ち入らない。

と、積の形の下界で押さえられる。同様に期待値の定義での分子については

$$\begin{aligned}
\left(\left\langle \prod_{x \in \Lambda} \varphi_x^{a_y} \right\rangle_{\Lambda} \text{ の分子} \right) &= \int \left(\prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x \right) \exp \left[\frac{J}{2} \sum_{\substack{x, y \in \Lambda \\ |x-y|=1}} \varphi_x \varphi_y \right] \prod_{x \in \Lambda} \left\{ \varphi_x^{a_y} \eta(\varphi_x) \right\} \\
&\leq \int \left(\prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x \right) \exp \left[dJ \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x^2 \right] \prod_{x \in \Lambda} \left\{ \varphi_x^{a_y} \eta(\varphi_x) \right\} \\
&= \left[\int d\varphi \eta(\varphi) e^{dJ\varphi^2} \varphi^{a_y} \right]^{|\Lambda|}
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

と積の形の上界を得る。よって (3.3.3) から

$$\begin{aligned}
\left\langle \prod_x \varphi_x^{a_x} \right\rangle_{\Lambda} &\leq \prod_{y \in \Lambda, a_y > 0} \left\{ \left\langle \prod_{x \in \Lambda} \varphi_x^{a_y} \right\rangle_{\Lambda} \right\}^{1/|\Lambda|} \\
&= \prod_{y \in \Lambda, a_y > 0} \left[\int d\varphi \eta(\varphi) e^{dJ\varphi^2} \varphi^{a_y} \Big/ \int d\varphi \eta(\varphi) e^{-dJ\varphi^2} \right]
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

を得る。つまり、

$$K(J, n) := \int d\varphi \eta(\varphi) e^{dJ\varphi^2} \varphi^n \Big/ \int d\varphi \eta(\varphi) e^{-dJ\varphi^2} \tag{3.3.8}$$

を定義すると ($n = 0$ では $K = 1$) ,

$$\left\langle \prod_x \varphi_x^{a_x} \right\rangle_{\Lambda} \leq \prod_{y \in \Lambda} K(J, a_y) \tag{3.3.9}$$

が得られた。右辺は J, η および $A = \{a_y\}$ にのみ依存する有限量であるから、欲しい結果 ($|\Lambda|$ について一様な評価) が得られた。□

3.4 「高温相」「低温相」の存在

この節の我々の最終目標は、そこで相関距離が発散するような、「臨界点」の存在の証明である。その前段階として、まず、これらのモデルが「高温相」と「低温相」を持つ事を示そう³⁰。

3.4.1 「高温相」の存在

まず、イジングモデルや φ^4 モデルにおいて、 $J = 0$ の場合を考えよう。この場合、期待値を定義する積分は各スピン変数の積に完全に分解する。従って、その期待値も非常に簡単で、特に $x \neq y$ では

$$\langle \varphi_x \varphi_y \rangle = 0 \tag{3.4.1}$$

となっている。これはつまり、異なるスピン同士には相関がない、ことを意味しているが、スピン変数の測度が直積測度になっているから当たり前ではある。

さて、 $0 < J \ll 1$ の場合には、スピン同士の相関があるので、相関関数は上のように簡単にはならない。しかし、上に類似の結果を期待するのは自然であろう。実際、以下がなりたつ：

³⁰統計力学系としては見た場合、 $J \ll 1$ は高温に、 $J \gg 1$ は低温に対応するので、便宜上、「高温」「低温」という呼び方をする。統計力学に詳しくない方は単に $J \ll 1$ を「高温」、 $J \gg 1$ を「低温」と呼んでいるのだ、と思って頂ければ十分である。「相」については後に少し述べるが、これにもこの講義では深い意味は付与しない

命題 3.4.1 イジングモデルおよび φ^4 モデルにおいて, $0 < J \ll 1$ の場合には, 全ての相関関数は距離とともに指数函数的に減少する. すなわち, ある定数 $c > 0, K > 0$ があって³¹,

$$\langle \varphi_{x_1} \varphi_{x_2} \cdots \varphi_{x_{2n}} \rangle \leq n! K^{2n} \exp\{-c \max_{i,j} |x_i - x_j|\} \quad (3.4.2)$$

が成り立つ (奇数個のスピン積は \pm 対称性によってゼロである).

つまり, 異なる点での相関関数は完全にはゼロではないが, 距離と共に指数函数的に減少するのである.

このような性質は多くの統計力学系が高温の場合に示すものなので, 上の命題 (相関関数が距離とともに指数的に減衰する事) が成り立つようなパラメーターの範囲を「高温相」という.

証明

「Simon 不等式」(3.2.7) の状況に於いて, $B = \{x\}$ ととると. $x \neq y$ である限り,

$$\langle \varphi_x \varphi_y \rangle = \langle \varphi_x^2 \rangle J \sum_{z:|z-x|=1} \langle \varphi_z \varphi_y \rangle \leq 2dJ \langle \varphi_x^2 \rangle \max_{z:|z-x|\leq 1} \langle \varphi_z \varphi_y \rangle \quad (3.4.3)$$

が得られる (最後のところでは z についての和を, 中身の最大値で押さえた).

右辺に出てきた $\langle \varphi_x^2 \rangle$ は, 並進対称性により, x によらないので, $\langle \varphi^2 \rangle$ と略記することにしよう. また, $\langle \varphi_z \varphi_y \rangle$ については $z \neq y$ である限り上と同じ議論を行おう. その結果,

$$\begin{aligned} \langle \varphi_x \varphi_y \rangle &\leq 2dJ \langle \varphi^2 \rangle \max_{z:|z-x|\leq 1} \left[2dJ \langle \varphi^2 \rangle \max_{z':|z'-z|\leq 1} \langle \varphi_{z'} \varphi_y \rangle \right] \\ &\leq (2dJ \langle \varphi^2 \rangle)^2 \max_{\|z'-x\|_1 \leq 2} \langle \varphi_{z'} \varphi_y \rangle \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

が得られる ($\|x\|_1 := \sum_{j=1}^d |x^j|$).

以下, これをくり返す. $\|x - y\|_1 = \ell$ とすると, 最低 ℓ 回, この操作をくり返すことができる ($(\ell - 1)$ 回目までの結果では右辺に出てくる $z' \neq y$ が保証されているから) ので

$$\langle \varphi_x \varphi_y \rangle \leq (2dJ \langle \varphi^2 \rangle)^\ell \max_{\|z-x\|_1 \leq \ell} \langle \varphi_z \varphi_y \rangle \leq \langle \varphi^2 \rangle (2dJ \langle \varphi^2 \rangle)^\ell \quad (3.4.5)$$

を得る. 最後のところでは

$$\langle \varphi_z \varphi_y \rangle \leq \left\langle \frac{\varphi_z^2 + \varphi_y^2}{2} \right\rangle = \langle \varphi^2 \rangle \quad (3.4.6)$$

を用いた. 従って, $2dJ \langle \varphi^2 \rangle < 1$ である限り, $\langle \varphi_x \varphi_y \rangle$ が $\ell \equiv \|x - y\|_1$ について指数函数的に減少することが言えた.

以上で 2 点関数が距離と共に指数函数的に減少する事が示された. 一般の n 点関数については, ガウス型不等式 (3.2.4) を繰り返し用いた結果に, 今証明したばかりの 2 点関数の結果を用いればよい. \square

3.4.2 「低温相」の存在

今度は $J \gg 1$ の場合を考えてみたい. 手始めに $J = +\infty$ の極限を考えよう. この場合, 隣り合ったスピン同士が同じ値をとるしかなく, これが全てのスピンに波及する. つまり, 空間的にどれだけ離れていてもスピン変数は互いに同じ値をとり, 従って相関関数は距離が離れても減衰しない.

同様の傾向が $J \gg 1$ でも成り立つのではないかと期待したいのだが, 高温相の時と異なり, 同様の結果は $d > 1$ の場合にのみ, 成り立つ事がわかる. ($d = 1$ では, J が無限大でない限りはいつも相関関数が指数的に減衰する.)

³¹もちろん, c, K は J に依存するだろう

命題 3.4.2 $J \gg 1$ であるイジングモデルおよび φ^4 モデルにおいては、相関関数は距離とともに減衰しない。すなわち、ある定数 $K > 0$ があって、

$$\langle \varphi_{x_1} \varphi_{x_2} \cdots \varphi_{x_{2n}} \rangle \geq K^n \quad (3.4.7)$$

が、すべての $x_j \in \mathbb{Z}^d$ に対して成り立つ（奇数個の φ の相関関数は恒等的にゼロである）。

上の命題の帰結のように、相関関数が距離無限大でもゼロにならないようなパラメーター領域をこの講義では「低温相」と呼ぶ事にする。

(証明) 証明にはパイエルの議論を使うのが一般的であるが、このノートでは省略し、文献を挙げるに留める。代わりに、 $d \geq 3$ で有効な, infrared bound を用いた証明法を紹介する³²。Infrared bound の表式 (3.2.14)

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle = p + q(x) \quad (3.4.8)$$

から出発しよう。ここで $x = 0$ とすると

$$\langle \varphi_0^2 \rangle = p + q(0) \quad (3.4.9)$$

となる。 $q(0)$ に対しては (3.2.15) より

$$\begin{aligned} q(0) &= \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \hat{q}(k) \leq \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{2J \sum_{j=1}^d (1 - \cos k_j)} \\ &= \frac{1}{2J} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\sum_{j=1}^d (1 - \cos k_j)} \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

が成り立っている。さて、 $d > 2$ では右辺に出ている積分は収束して J によらないので、右辺は J の減少関数で $1/J$ のオーダーである。一方、 $\langle \varphi_0^2 \rangle$ は J の増加関数である（命題 3.2.1 参照）。従って、 J を十分大きくとってやると

$$\langle \varphi_0^2 \rangle > q(0) \quad (3.4.11)$$

が実現されてしまう。これを (3.4.9) と見比べると、(3.4.11) が成り立つ場合には、 $p > 0$ とならざるを得ないことが結論できる。

ところが (3.2.15) と Riemann-Lebesgue の定理から、 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} q(x) = 0$ がすぐにわかる。従って (3.2.14) から

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle = \lim_{|x| \rightarrow \infty} [p + q(x)] = p > 0 \quad (3.4.12)$$

が結論できる。

ここで Messenger-Miracle-Solé 不等式の帰結 (3.2.5) を用いる。この不等式によれば、まず、 $\langle \varphi_0 \varphi_{ae_1} \rangle$ は $a > 0$ の広義減少関数であった。すぐ上でこの量の $a \rightarrow \infty$ の極限が $p > 0$ である事を示したので、有限の $a > 0$ でも $\langle \varphi_0 \varphi_{ae_1} \rangle \geq p > 0$ であることがわかる。さらに一般の x に対しては $\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \geq \langle \varphi_0 \varphi_{\|x\|_1 e-1} \rangle$ であったことを用いれば、やはりこの右辺が p 以上であるから、左辺も p 以上であると結論できる。

最後に一般の $2n$ 点関数に対しては、Griffiths 第二不等式 (3.2.2) を何回も使って

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{x_1} \varphi_{x_2} \varphi_{x_3} \cdots \varphi_{x_{2n}} \rangle &\geq \langle \varphi_{x_1} \varphi_{x_2} \rangle \langle \varphi_{x_3} \varphi_{x_4} \varphi_{x_5} \cdots \varphi_{x_{2n}} \rangle \\ &\geq \langle \varphi_{x_1} \varphi_{x_2} \rangle \langle \varphi_{x_3} \varphi_{x_4} \rangle \langle \varphi_{x_5} \varphi_{x_6} \varphi_{x_7} \cdots \varphi_{x_{2n}} \rangle \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

として、それぞれの 2 点関数に今証明した下界を用いればよい。 \square

³²この講義では触れていないが、この方法は多成分のスピン系でも有効である。原論文は [11]

3.4.3 相転移の存在

以上から、 J の値によって、以下のように定性的に異なる振る舞いが見られることがわかった。

- 高温側 $0 < J \ll 1$ では、2点関数 $\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle$ は $|x|$ とともに指数函数的に減少する（高温相）。
- 低温側 $J \gg 1$ では、2点関数 $\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle$ は $|x|$ について一様に正である（低温相）。

さて、この中間のどこかの J の値でこれら2つの相が入れ替わっているはずである³³。このような相の移り変わりを**相転移**、移り変わる点を**相転移点**と言う。

3.5 臨界現象の存在

これまで、2次元以上では相転移が存在することを見た。この節ではもう一歩進んで、相転移点近傍での系の振る舞いを詳しく調べる。特に、相転移点に近づくにつれて帯磁率などが発散すること（臨界現象）を示す。

3.5.1 帯磁率の発散

スピン系の性質を特徴づける重要な量として**帯磁率** (susceptibility) がある。これは有限体積では

$$\chi_\Lambda := \sum_{x \in \Lambda} \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_\Lambda \quad (3.5.1)$$

で、また無限体積では

$$\chi := \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \quad (3.5.2)$$

で定義される量である³⁴。

この節の主目的は以下の定理である。

定理 3.5.1 $d > 1$ におけるイジングモデルや φ^4 モデルを考える。ただし $\eta(\varphi)$ は固定した上で、いろいろな $J \geq 0$ におけるモデルを比べよう (χ も J の関数とみなして $\chi(J)$ と書く)。すると有限な正の J_c が存在して、無限体積での帯磁率 $\chi(J)$ に対して以下が成り立つ：

- (1) χ は $J < J_c$ で有限、 $J > J_c$ で無限大、かつ
- (2) χ は $J \nearrow J_c$ につれて発散する。

上で導入した $J_c(d)$ はこれらのモデルの**臨界点** (critical point) と呼ばれる³⁵。上の定理は、 J が下から臨界点に近づく場合、帯磁率が無限大に発散する事を意味している。次節ではこの結果をもちいて、相関距離も発散する事をしめす。

Theorem 3.5.1 の証明

証明は本質的に χ の J に関する微分に基づく。しかし、無限体積での量を直接微分することが出来るかどうかは自明ではない。そこで、まず有限体積の量について議論し、最後に無限体積極限をとる。

1. まず、前節までの結果から χ について何が言えるかをまとめておこう。

³³理論的にはこれら2つの相の間に第3、第4の相が挟まっている可能性（特に、相関関数は距離とともに減衰してゼロになるが、その減衰の仕方が指数関数よりもゆっくりである可能性）も否定できない。しかしイジングモデル、 φ^4 モデルに対しては「相転移点」の一点を境にして、「高温相」と「低温相」が入れ替わっている事が証明されている

³⁴統計力学的意味を考えれば、上の定義よりも基本的な表式を帯磁率の定義として採用すべきだが、今日は場の理論の構成に向けての最短コースなので、この定義を採用する。また、この量がなぜ帯磁率と呼ばれるか、などにも立ち入らない

³⁵統計力学系としては「相転移点」と「臨界点」は少し異なる概念であるが、イジングモデルや φ^4 モデルの場合には両者は一致する。この講義でも両者を同じものとして扱う

- $J \ll 1$ では 2 点関数が距離とともに指数函数的に減衰する事が 3.4.1 節で示された。従って、この領域では $\chi < \infty$ である。
- $J \gg 1$ では 2 点関数 $\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle$ は減衰せず、ある正の数よりも大きいままであることが 3.4.2 節で示された。従って、この領域では $\chi = \infty$ である。

式を簡単にするために

$$f_\Lambda(J) := \frac{1}{\chi_\Lambda(J)} \quad (3.5.3)$$

を定義すると、以上から (f_Λ の $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$ の極限を f_∞ と書く)

- 十分小さい J では $f_\infty(J) > 0$,
- 十分大きい J では $f_\infty = 0$

であることがわかる。

2. Griffiths 第二不等式 (3.2.2) から χ_Λ は J の広義増加関数である (命題 3.2.1)。よって f_Λ は J の広義減少関数であり、

$$J_c := \sup\{J : f_\infty(J) > 0\} \quad (3.5.4)$$

を定義すると、これは正かつ有限である。さらに J_c の定義から、 $J < J_c$ では $\chi < \infty$ 、かつ $J > J_c$ では $\chi = \infty$ であることもわかる。これが定理 3.5.1(1) の証明である。

3. より難しいのは $f_\infty(J)$ が $J \nearrow J_c$ につれて連続的にゼロに行く ($f_\infty(J)$ が $J < J_c$ で連続である) ことをしめすことである。この目的のために $f_\infty(J)$ の微分を考えよう。厳密には $f_\infty(J)$ が J で微分できるかどうかは自明でない (実際、 $J = J_c$ で導関数が存在しない可能性が高い) ので、まず、有限体積での量 χ_Λ を J で微分する：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dJ} \chi_\Lambda(J) &= \sum_{x \in \Lambda} \frac{d}{dJ} \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_\Lambda(J) \\ &= \sum_{x \in \Lambda} \frac{1}{2} \sum_{|y-z|=1} \langle \varphi_0 \varphi_x; \varphi_y \varphi_z \rangle_\Lambda \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

ここで Lebowitz の不等式 (3.2.3) を用いると (以下、うるさいので Λ の添え字を時々、略)、

$$\begin{aligned} \langle \varphi_0 \varphi_x; \varphi_y \varphi_z \rangle &= \langle \varphi_0 \varphi_x \varphi_y \varphi_z \rangle - \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \langle \varphi_y \varphi_z \rangle \\ &\leq \langle \varphi_0 \varphi_y \rangle \langle \varphi_x \varphi_z \rangle + \langle \varphi_0 \varphi_z \rangle \langle \varphi_x \varphi_y \rangle \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

が得られる。これを (3.5.5) に使うと、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dJ} \chi_\Lambda &\leq \sum_{x \in \Lambda} \sum_{|y-z|=1} \langle \varphi_0 \varphi_y \rangle \langle \varphi_x \varphi_z \rangle = \chi_\Lambda \sum_{|y-z|=1} \langle \varphi_0 \varphi_y \rangle \\ &= 2d \chi_\Lambda \sum_y \langle \varphi_0 \varphi_y \rangle = 2d (\chi_\Lambda)^2 \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

すなわち、

$$0 \geq \frac{d}{dJ} f_\Lambda(J) = \frac{d}{dJ} \left(\frac{1}{\chi_\Lambda} \right) \geq -2d \quad (3.5.8)$$

が成立することがわかる (最左辺は $f_\Lambda(J)$ が単調非増加であることから)。

4. これで必要な材料はそろった。 $f_\infty(J)$ が $J = J_c$ で不連続だったとしてみよう。 $\lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} f_\Lambda = f_\infty$ であるから、これは十分大きな Λ に対しては $\left| \frac{d}{dJ} f_\Lambda(J) \right|$ が $2d$ を超えることを意味する (詳細は以下に)。これは

(3.5.8) に矛盾するので、あり得ない。つまり、 $f_\infty(J)$ は $J = J_c$ で連続であり、無限体積での帯磁率 $\chi(J)$ は $J \nearrow J_c$ で発散する。

(上で省略した部分の説明) 上の議論は一見、微分と極限の順序を交換しているように見えるから、もう少し詳しく説明しておこう。 $f_\infty(J)$ が $J = J_c$ で不連続ということを具体的に、

$$\lim_{J \rightarrow J_c - 0} f_\infty(J) = \alpha > 0 \quad (3.5.9)$$

と表してみる³⁶。 $f_\infty(J)$ が広義減少であるから、これは特に全ての $J < J_c$ に対して $f_\infty(J) \geq \alpha > 0$ であることを意味する。さて、 $\lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} f_\Lambda(J) = f_\infty(J)$ であるから、十分大きな Λ をとると、 $J = J_c - \frac{\alpha}{8d}$ および $J = J_c + \frac{\alpha}{8d}$ において $|f_\Lambda(J) - f_\infty(J)| < \frac{\alpha}{8d}$ を満たさせることができる。これは具体的に書くと

$$f_\Lambda\left(J - \frac{\alpha}{8d}\right) > \alpha - \frac{\alpha}{8d} = \frac{7\alpha}{8d} \quad \text{かつ} \quad f_\Lambda\left(J + \frac{\alpha}{8d}\right) < \frac{\alpha}{8d} \quad (3.5.10)$$

ということであるから、特に

$$f_\Lambda\left(J - \frac{\alpha}{8d}\right) - f_\Lambda\left(J + \frac{\alpha}{8d}\right) \geq \frac{3\alpha}{4d} \quad (3.5.11)$$

を意味している。しかし、

$$f_\Lambda\left(J + \frac{\alpha}{8d}\right) - f_\Lambda\left(J - \frac{\alpha}{8d}\right) = \int_{J - \alpha/(8d)}^{J + \alpha/(8d)} dJ \frac{d}{dJ} f_\Lambda(J) \quad (3.5.12)$$

に注意すると、(3.5.8) と (3.5.11) は矛盾することがわかる、というわけ。(省略部分の補足終わり) \square

3.5.2 相関距離の定義と基本的性質

この節では、相関距離 ξ を定義し、その基本的性質を述べる。相関距離とは、 $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ を 1-軸方向の単位ベクトルとして

$$\frac{1}{\xi} := - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \langle \varphi_0 \varphi_{ne_1} \rangle \quad (3.5.13)$$

という極限で定義する ξ のことである。この極限が存在することと基本的性質は以下の命題で与えられる。

命題 3.5.2 イジングモデルや φ^4 モデルについては、(3.5.13) で定義される ξ は区間 $[0, \infty]$ に存在する (0 や ∞ の可能性もある)。更に、任意の x に対して、

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \leq \langle \varphi_0^2 \rangle \exp\left(-\frac{\|x\|_\infty}{\xi}\right) \quad (3.5.14)$$

も成立する。ただし、 $\|x\|_\infty \equiv \max_j |x_j|$ 。

定義通り、 ξ は $\langle \varphi_0 \varphi_{ne_1} \rangle$ の距離 n による減衰を特徴づける量であるが、上の定理により、 $e^{-n/\xi}$ が上界になっていること、および座標軸上にない点に対しても ξ が減衰距離の目安を与える事がわかる。

Proof. スペクトル表示 (3.2.17) によれば、2点関数は

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle = \int d\rho(\lambda, \vec{q}) \lambda^{|x^{(1)}|} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \quad (3.5.15)$$

と表現できていた。特に、 $x = ne_1$ ($n \geq 0$) に対しては

$$\langle \varphi_0 \varphi_{ne_1} \rangle = \int d\rho(\lambda, \vec{q}) \lambda^n = \int d\tilde{\rho}(\lambda) \lambda^n \quad (3.5.16)$$

³⁶ f_∞ が広義減少であるから、 $\lim_{J \rightarrow J_c - 0}$ の極限は存在するはずである

である。二番目の等式では、 \bar{q} での積分を行った結果を $d\bar{\rho}(\lambda)$ と書いた。

さて、 $d\bar{\rho}$ の台の上限を α と書こう。測度 $d\rho(\lambda, \bar{q})$ の台は $[0, 1] \times [-\pi, \pi]^{d-1}$ の中に入っているので、 $0 \leq \alpha \leq 1$ である。 $(\alpha = 0$ は異なる点での2点関数が恒等的にゼロになってしまう事を意味するので、 $J > 0$ である限りはあり得ない。以下、 $\alpha > 0$ の場合を考える。)

すると、(3.5.16)から直ちに2点関数の上界

$$\langle \varphi_0 \varphi_{ne_1} \rangle = \int d\bar{\rho}(\lambda) \lambda^n \leq \alpha^n \int d\bar{\rho}(\lambda) = \alpha^n \langle \varphi_0^2 \rangle \quad (3.5.17)$$

が得られる(最後のところでは(3.5.16)から得られる $\langle \varphi_0^2 \rangle$ の表式を用いた)。

一方、 $\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle$ の下界については、以下のように議論する。 $\epsilon > 0$ を非常に小さく選ぶ。 α が $d\bar{\rho}$ の下限である事から

$$c_\epsilon := \int_{\alpha-\epsilon}^{\alpha} d\bar{\rho}(\lambda) \quad (3.5.18)$$

は正のはずである。従って、(3.5.16)から2点関数の下界として

$$\langle \varphi_0 \varphi_{ne_1} \rangle = \int d\bar{\rho}(\lambda) \lambda^n \geq \int d\bar{\rho}(\lambda) (\alpha - \epsilon)^n = c_\epsilon (\alpha - \epsilon)^n \quad (3.5.19)$$

が得られる。(3.5.17)と(3.5.19)から

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \langle \varphi_0 \varphi_{ne_1} \rangle}{n} \leq \log \alpha \quad \text{かつ} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \langle \varphi_0 \varphi_{ne_1} \rangle}{n} \leq \log(\alpha - \epsilon) \quad (3.5.20)$$

が導かれるが、 $\epsilon > 0$ はいくらでも小さく取れるので、 $\epsilon \downarrow 0$ とすれば、 \limsup と \liminf が一致することがわかる。つまり、(3.5.13)の極限の存在が示された。

また、上の議論から $-\log \alpha = 1/\xi$ 、つまり $\alpha = e^{-1/\xi}$ であることがわかる。これと(3.5.17)を組み合わせると、

$$\langle \varphi_0 \varphi_{ne_1} \rangle \leq \exp\left(-\frac{n}{\xi}\right) \quad (3.5.21)$$

が得られる。最後に Messenger-Miracle-Solé 不等式の帰結(3.2.5)として $\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \leq \langle \varphi_0 \varphi_{\|x\|_\infty e_1} \rangle$ であることを用いると、(3.5.14)が証明される。□

3.5.3 χ と ξ の比較, および ξ の発散

この節では χ と ξ の比較を行い、その結果として、 $J \uparrow J_c(d)$ で ξ が発散することを示す。主結果は以下の通りである。

定理 3.5.3 $J < J_c(d)$ では ξ は有限である。更に、 $J \uparrow J_c(d)$ につれて、 ξ は発散する。

(定理の前半部分についての注) J_c は「 $\chi < \infty$ となっているような J の上限」として定義したので、「 $J < J_c$ で $\chi < \infty$ 」であるのは定義から保証されている。しかし $J < J_c$ で ξ が有限であるか否かは自明ではない。定理の前半部分は、 $J < J_c$ では実際に $\xi < \infty$ であることを保証している。

Proof. 定理の前半部分の証明が少し厄介なので、後半部分から行く。

(3.5.14)の上界

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \leq \langle \varphi_0^2 \rangle e^{-\|x\|_\infty / \xi} \quad (3.5.22)$$

の両辺を x について和をとると、

$$\chi \leq \langle \varphi_0^2 \rangle \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{-\|x\|_\infty / \xi} \leq c_d \langle \varphi_0^2 \rangle \xi^d \quad (3.5.23)$$

が得られる (c_d は d のみによる定数). $\langle \varphi_0^2 \rangle$ が J_c の近傍で有界である事は 3.3 節の議論からすぐに従う. χ は $J \uparrow J_c$ に際して発散するので, 上から直ちに, ξ も発散せざるを得ない事がわかる. 但し上で注意したように, この議論は ξ が $J < J_c$ でも無限大であった可能性は排除しないので, 定理の前半部分が必要となる.

前半部分を, Simon の不等式 (3.2.7) を用いて証明する. ℓ を大きな整数として, 原点を中心とした一辺 $2\ell + 1$ の超立方体を考え, これを Simon の不等式での S とする. また, 記号を簡単にするため, S のすぐ内側の (S から距離 $1/2$ の) 点の集合を ∂S^{in} , S のすぐ外側の (S から距離 $1/2$ の) 点の集合を ∂S^{out} と書く — 要するに, ∂S^{in} とは $\|u\|_\infty = \ell$ である点の全体, ∂S^{out} とは $\|u\|_\infty = \ell + 1$ である点の全体である. すると Simon の不等式は

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \leq \sum_{\substack{u \in \partial S^{\text{in}}, v \in \partial S^{\text{out}} \\ |u-v|=1}} J \langle \varphi_0 \varphi_u \rangle \langle \varphi_v \varphi_x \rangle \leq J \sum_{\substack{u \in \partial S^{\text{in}}, v \in \partial S^{\text{out}} \\ |u-v|=1}} \langle \varphi_0 \varphi_u \rangle \times \max_{v \in \partial S^{\text{out}}} \langle \varphi_v \varphi_x \rangle \quad (3.5.24)$$

となる. ここで命題 3.4.1 の証明と同様に, 右辺にでている \max の中身について同様の評価を繰り返す. これは少なくとも

$$N := \left\lfloor \frac{\|x\|_\infty}{\ell + 1} \right\rfloor \quad (3.5.25)$$

で決まる N 回は行う事ができる. 最後に残る $\langle \varphi_v \varphi_x \rangle$ のような期待値は, 命題 3.4.1 の証明と同様に, $\langle \varphi_0^2 \rangle$ で押さえてしまうと, 結果的に

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \leq \langle \varphi_0^2 \rangle \left[J \sum_{\substack{u \in \partial S^{\text{in}}, v \in \partial S^{\text{out}} \\ |u-v|=1}} \langle \varphi_0 \varphi_u \rangle \right]^N \leq \langle \varphi_0^2 \rangle \left[Jd \sum_{u: \|u\|_\infty = \ell} \langle \varphi_0 \varphi_u \rangle \right]^N \quad (3.5.26)$$

が得られる. 最後のところでは, 大括弧の中身を (本当は v と u は S の隅の方以外では 1 対 1 対応しているのだが, 大盤振る舞いで) v の和の数を d で押さえ, $u \in \partial S^{\text{in}}$ の条件をわかりやすく書き直した.

さて, $J < J_c$ では $\chi < \infty$ であることと, χ を

$$\chi = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\sum_{u: \|u\|_\infty = \ell} \langle \varphi_0 \varphi_u \rangle \right] \quad (3.5.27)$$

と書けることに注目しよう. 有限の χ が上のように ℓ についての和で書けるのだから, 和の中身は $\ell \rightarrow \infty$ ではゼロになる事が必要である. 特に, 十分に大きな ℓ をとれば,

$$Jd \sum_{u: \|u\|_\infty = \ell} \langle \varphi_0 \varphi_u \rangle < \frac{1}{2} \quad (3.5.28)$$

が成立するはずである. このように十分大きな ℓ をとると, (3.5.26) は

$$\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle \leq \langle \varphi_0^2 \rangle \left(\frac{1}{2} \right)^N \quad N := \left\lfloor \frac{\|x\|_\infty}{\ell + 1} \right\rfloor \quad (3.5.29)$$

となる. これは $\langle \varphi_0 \varphi_x \rangle$ が $\|x\|_\infty$ とともに指数函数的に減衰する事を意味する. \square

3.6 まとめ：とりあえずの目標の達成

以上で第一部は終わりである. 格子正則化を用いて連続極限を取る際に, 系を適切にその臨界点に近づけてやれば, 場の理論が構成できる可能性が示された. つまり, (3.1.13) で予告したように

$$S_n(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} S_{n, \Lambda, \epsilon}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \langle \varphi_{x_1} \varphi_{x_2} \cdots \varphi_{x_n} \rangle_{\rho_{\Lambda, \epsilon}} \quad (3.6.1)$$

の極限によって, Schwinger 関数を構成できる事が強く示唆された.

この講義では証明まではとても踏み込めないが、この種の定理はいくつか証明されている。実際、Glimm と Jaffe による注意 [14] はなかなか強力で、2点函数がある種の条件を満たしておれば、OS の公理系を満たす³⁷Schwinger 函数が自動的に作れる事を保証する（4点以上の相関函数は、ガウス型不等式による評価で十分）。この Glimm と Jaffe の結果を、この節で今までやって来た事と組み合わせると、(3.6.1) の極限が我々の望むところの、OS の公理系を満たす（ただし、回転対称性については不明）Schwinger 函数を与える事が証明できる。

一見、これは大変素晴らしいことのように思えるが、これだけでは全くもって不十分である。以上は単に OS の公理系を満たす Schwinger 函数の組を与えるだけであって、その組がどのような性質を持っているものかについては何も教えてくれない。2点函数だけは（適切に臨界点に近づける事によって）ある程度望ましいふるまいをしてくれるであろうが³⁸、4点函数などは（Griffiths 第二不等式やガウス型不等式によって2点函数で押さえられている以外は）ほとんどわからない。

であるので、もっともっと詳しい解析が必要となる。以下ではこの目的に使われる二つの大きな道具、くりこみ群の方法と相関不等式による方法を紹介する。

4 くりこみ群の描像

くりこみ群の見方は、統計力学における臨界現象の解析にも、また今日のテーマである構成的場の理論にも、極めて有効なものである—— アイディアをまとめるための描像の提供という意味でも、また実際に厳密な解析を行う際の強力な武器としてでも。そのため、本講義でも、簡単にではあるが、くりこみ群の考え方（ものの見方）に触れる事にした。ただし、くりこみ群は、そのアイディアは明快ではあるが、実際の解析は気が遠くなるほど大変な事が多く、その詳細は講義向きではないと思われる。そこでこの節では厳密さは二の次にして、くりこみ群の考え方だけを述べる事にする。くりこみ群にも様々な流儀があるが、ここではアイディアが一番明快と思われるブロックスピン変換に話を限る。

4.1 Block Spin Transformation (BST) の定義と基本的性質

我々の目的は場の量子論の構成であるが、しばらくは格子上のスピンの話が続く。場の構成については4.3で考える。

4.1.1 BST の定義

ブロックスピン変換 (BST) とは、たくさん（無限個）あるスピン変数を有限個ずつまとめて、その **marginal distribution**³⁹ を見る変換である。もう少し詳しく言うと、(1) 周辺分布 (marginal distribution) を見る変換、(2) スピン変数及び距離のスケール変換、の二つを組み合わせたものをブロックスピン変換という。

(3.1.2) のような、スピン系の期待値を考えよう—— ρ_Λ がスピン変数の確率分布を規定していることは既に注意した。BST とは、以下のような確率密度 ρ_Λ から新しい確率密度 ρ'_Λ への変換 $\mathcal{R}_{L,\theta}$ のことである⁴⁰ (θ は後で決めるパラメーター)。

³⁷ただし、回転対称性は保証されない

³⁸この2点函数のふるまいさえ、それほど自明ではない。幸運にも Messenger-Miracle-Solé 不等式などによって、2点函数の単調性が言えているから、このような希望が持てている

³⁹2つの確率変数 x, y の同時分布密度函数 $\rho(x, y)$ が与えられたとする。 y の分布を問わずに x の分布だけを見るとき、これを ρ に従う x の周辺分布 (marginal distribution) と呼ぶ。具体的には $\rho(x, y)$ を y について積分してしまえばいいわけで結果は $\eta(x) := \int \rho(x, dy)$ で与えられる

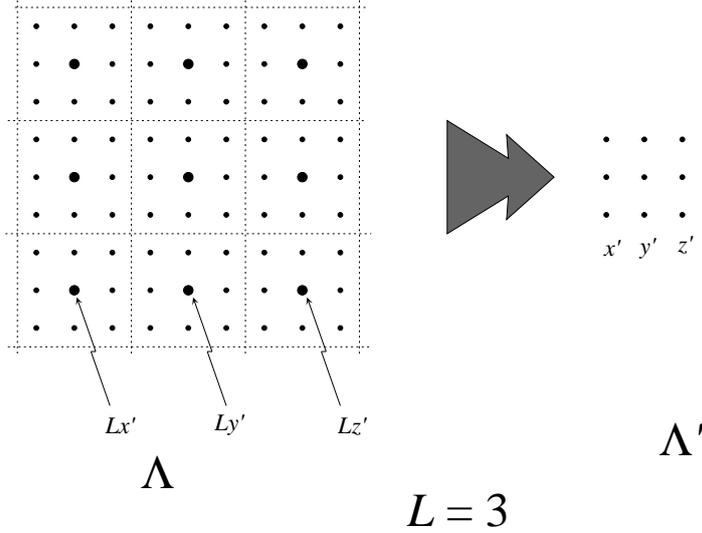
⁴⁰数学的に厳密にやるには有限系で全ての解析をまずやって、最後に無限体積極限をとる。(以下では最初だけはちゃんと書きますが、そのうち、あたかも無限系で考えているかのように書きます。) また、この変換は Λ にも依存するが、余りに添字が多くなるので、 Λ の添字は省略する

まず、元の格子 Λ (1辺 L^N , $N \gg 1$ とする) の点を1辺 L ($L > 1$ は奇数) の超立方体に分け⁴¹, その中心を Lx' ($x' \in \mathbb{Z}^d$) と書く:

$$B_{x'} \equiv \left\{ x \in \mathbb{Z}^d : \|x - Lx'\|_\infty < \frac{L}{2} \right\} \quad (4.1.1)$$

ここで、 Lx' が超立方体の中心で、格子 Λ では Lx' が間隔 L 毎に並んでいる。 x' 自身を集めて集合 Λ' を作る。これは1辺 L^{N-1} の格子になっていて、 x' は \mathbb{Z}^d の元である:

$$\Lambda' \equiv \left\{ x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_\infty < \frac{L^{N-1}}{2} \right\}. \quad (4.1.2)$$



次に新しくできた格子 Λ' 上のスピン変数 $\{\varphi'_{x'}\}_{x' \in \Lambda'}$ を、元のスピン変数と

$$\varphi'_{x'} := L^{-\theta} \sum_{y \in B_{x'}} \varphi_y \quad (4.1.3)$$

の関係にあるように定義する ($\theta \in \mathbb{R}$ は後の解析がうまくいくように選ぶ). この $\{\varphi'_{x'}\}_{x' \in \Lambda'}$ の分布 (密度) は ρ から

$$\rho'(\{\varphi'\}) := (\mathcal{R}_{L,\theta} \rho)(\{\varphi'\}) := \int \rho(\{\varphi\}) \left[\prod_{x' \in \Lambda'} \delta\left(\varphi'_{x'} - L^{-\theta} \sum_{x \in B_{x'}} \varphi_x\right) \right] \left[\prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x \right] \quad (4.1.4)$$

と求められる (δ は δ -関数). ρ から ρ' を与える変換 (または $\{\varphi\}$ のスピン系から $\{\varphi'\}$ のスピン系を与える変換) がブロックスピン変換である.

くり返しになるが数学的にはこれは元のスピン変数の分布 ρ から「ブロックスピン変数」(4.1.3) の周辺分布を得る変換である. (スケール変換はブロックスピンの定義に入っている.)

Remark.

1. BST ではスピン変数の周辺分布をとっているのだから、当然、BST の後の系の自由度は落ちている. 物理の言葉で言うと、ブロックスピン以外の系の自由度を「積分してしまった」ことになっている. これに対応して、元の系が持っていた情報も、かなりの部分が失われてしまっている.
2. スケールの関係について: 上のブロックスピンは、大雑把には $B_{x'}$ の中のスピンの「平均」である. この意味で、BST とはブロック内のスピンの平均の分布を見ているものといえる. ただし、以下の2点、通常の「平均」とは重要な相違がある (スケールの問題).

⁴¹ これまで、格子の一辺の長さを $2L$ (偶数) として来たが、BST を考える場合には一辺を奇数とした方が記述が楽になるので、奇数とした. 概念的にはどちらももちろん、同じである

- (a) ブロックスピン自身は単なる平均ではなく、その大きさを $L^{-\theta+d}$ 倍した後のものである。
- (b) 格子の方を見ると、新しい座標 x' での格子間隔 1 は元の格子での格子間隔 L に相当している。この意味で、距離のスケールも $1/L$ にしてしまっている。
3. θ の値は、 $\theta = d$ が普通の平均に相当する。これは各ブロック内のスピンの個数で割る事に相当する。スピン変数の間の相関が強く、全てが同じような値をとっている場合にはスピンの個数で割るのは自然である。一方、 $\theta = d/2$ は中心極限定理に現れる（独立な確率変数が良い極限定理を持つための）値で、スピンの個数の平方根で割る事に対応する。スピン同士の相関がかなり弱い場合、スピンの個数で割ると割り過ぎで、個数の平方根がちょうど良い。以下で見ると、臨界現象においては θ をこの二つの中間にとった BST が威力を発揮する。これはつまり、臨界点でのスピンの相関は、独立な確率変数のものよりは強いが、スピンがそろっているような場合ほど強くはない、と解釈できる。

4.1.2 BST の基本的性質

1. 半群をなす。

$$\mathcal{R}_{L_2, \theta} \circ \mathcal{R}_{L_1, \theta} = \mathcal{R}_{L_2 L_1, \theta} \quad (4.1.5)$$

逆変換は存在しない（情報が落ちているので仕方ない）。

2. 期待値の間には簡単な恒等式がある。測度 ρ による期待値を $\langle \dots \rangle_\rho$ と書くと、

$$\langle F(\{\varphi'\}_{x' \in \Lambda'}) \rangle_{\rho'(\{\varphi'\})} = \left\langle F\left(\left\{L^{-\theta} \sum_{y \in B_{x'}} \varphi_y\right\}_{x' \in \Lambda'}\right) \right\rangle_{\rho(\{\varphi\})} \quad (4.1.6)$$

左辺から右辺へはブロックスピン変換の定義そのものであるが、この式は右辺から左辺に読むと意味がわかる。つまり、元のスピンの「平均」（右辺の量）は、BST 後の ρ' から左辺のようにして求められる。つまり、スピン変数の「平均」に関する限り、BST を行っても情報を失った事にはならない。

3. もちろん、「平均」の形になっていないもの（例： $\langle \varphi_0 \rangle$ ）についての情報は落ちていくので、正確には求められない。（実は $\langle \varphi_0 \rangle$ に関しては並進不変性を利用して

$$\langle \varphi_0 \rangle = \frac{1}{|\Lambda|} \left\langle \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x \right\rangle \quad (4.1.7)$$

と平均の形になることに注意すると求められる。また、BST を行う際に、期待値に対しても同様の変換を行うことで、平均の形になっていないものでもより細かい議論を重ねる事によって正確に見ることもできるが [12, 13]、ここでは立ち入らない。）

4.1.3 いくつかの用語

くりこみ群の様子を記述するため（主に力学系の）用語をいくつか導入する。

流れ、または軌道： BST を何回も施した結果が作る列、つまり $\mathcal{R}^n \rho$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) を BST の**流れ** (flow) または**軌道**という。

不動点： $\mathcal{R}_{L, \theta^*}$ の作用の下で不変な点 ρ^*

$$\mathcal{R}_{L, \theta^*}(\rho^*) = \rho^* \quad (4.1.8)$$

を BST の**固定点**または**不動点** (fixed point) と呼ぶ。不動点が見えるためには θ をうまくとってやる必要がある（その意味で θ^* と書いた）。

固有摂動： 不動点 ρ^* の近傍での流れの様子に注目しよう。 $\rho = \rho^* + \delta\rho$ または $\rho = \rho^*(1 + \eta)$ と少しずれたものに BST を施した結果を考えてみる。 一般にはこの結果は何でもアリである。 しかし、特に変換の固有ベクトルにあたる「固有摂動」と呼ばれるものを考えると少しは系統だった見方ができる⁴²。 これは、おおよっぱには以下のように定義される。

定義 4.1.1 (固有摂動の物理的“定義”) ρ^* が BST \mathcal{R} の不動点の時、対応する「ハミルトニアン」 \mathcal{H}^* を

$$e^{-\mathcal{H}^*} := \rho^*, \quad \mathcal{R}(e^{-\mathcal{H}^*}) = e^{-\mathcal{H}^*} \quad (4.1.9)$$

で定義する。 この時、

$$\mathcal{R}(e^{-(\mathcal{H}^* + \epsilon f)}) = e^{-(\mathcal{H}^* + \alpha \epsilon f + O(\epsilon^2))}, \quad \alpha \geq 0 \quad (4.1.10)$$

となるような f を考え、これを BST \mathcal{R} の不動点 ρ^* における「固有摂動」と呼ぶ⁴³。 ここで f は（一応任意の） Φ の関数である。 以下ではこの α を $\alpha \equiv L^\kappa$ を書くことが多い ($\kappa \in \mathbb{R}$)。

relevant, irrelevant, marginal operators: 固有摂動を α の値によって以下のように分類する：

$\alpha > 1$	つまり $\kappa > 0$ の時	relevant	
$\alpha = 1$	つまり $\kappa = 0$ の時	marginal	(4.1.11)
$0 \leq \alpha < 1$	つまり $\kappa < 0$ の時	irrelevant	

$\alpha > 1$ の固有摂動は、BST を繰り返すとどんどん大きくなるが、 $\alpha < 1$ のものはどんどん小さくなって最後には大体無視できる（だろう）。 上の用語はこの事情に注目し、BST を繰り返した時にどのくらい重要かを述べたものである。

湧き出しと吸い込み： 不動点 ρ^* のある近傍から出発した flow がすべてその ρ^* に引き寄せられて行くとき、 ρ^* は**吸い込み** (sink) であるという。 逆に、 ρ^* の近傍から出発した flow がすべて離れて行くとき、 ρ^* は**湧き出し** (source) とよぶ。 上に定義した固有摂動の言葉では、全ての固有摂動が $\alpha < 1$ の時に吸い込み、 $\alpha > 1$ の時に湧き出しである。

4.1.4 BST によるものの見方 (概略)

さて、BST は原理的には何回も連続して行え、BST を n 回繰り返したものの結果 $\rho^{(n)} := \mathcal{R}^n \rho$ は元のスピン変数を L^{nd} 個まとめたものの分布を与える。 よって全部のスピン変数の「平均」がどう振る舞うかを見るには、 $\rho^{(n)}$ の ($n \rightarrow \infty$ の極限での) 振る舞いを調べればよい (筈である)。 つまり、BST のもとで確率密度がどのように変換されていくかを考えればスピンの「平均」のふるまいがわかる。

さて、BST のもとで確率密度がどのように変化するか、は BST で規定される (確率密度空間での) **力学系**の問題と捉えられるので、このように系の極限的性質 (今の場合は無限個の確率変数の和の振る舞い) を適当な (スケール) 変換 (今の場合は確率密度に関して周辺分布をとる変換) を用いて調べていくのが、くりこみ群の考え方である。 このように問題を書き換えてしまえば、このくりこみ群変換のもとの 不動点 (fixed point)、その周りでの 流れ (flow) の様子、などが重要になるのは (力学系の問題を考えたことのある人には) 予測できよう。 くりこみ群の提供する描像とは、このようくりこみ群変換のもとの系の振る舞いから、もとの系の振る舞いを理解することに他ならない。

ここで自然な疑問として、**なぜこんなにややこしいことをしてスピン変数の平均の分布を求めなければならぬのか** (一発で確率変数の積分をすれば良いではないか!)、が問題になろう。 そのもつとも単純な答

⁴²これは不動点において BST の接写像を考えることに相当する

⁴³これが一応、固有摂動の定義だが、厳密な事は全く考えていない。 そもそも f はスピン変数の非有界な関数である事が多いから、そのような場合に $O(\epsilon^2)$ にどのように意味を付けるか、など、悩ましい問題は一杯ある

えは、このように段階的に行うとうまくいく（段階的に行わないとうまくいかない）場合がある、ということである。これには変換が「局所的」であることが効いている。

実際にうまく行った例を考えてみると、それらは総て flow の様子が単純な場合である。特に、元々のスピン系は本質的に無限自由度であるにも関わらず、くりこみ変換によって元々のスピン系を本質的に**有限（少数）自由度の力学系に翻訳**できた場合⁴⁴、くりこみ群のアプローチが大変有効になっている。この意味で、「くりこみ群の方法の醍醐味は無限自由度系をうまく有限自由度の力学系に焼き直すところにある」とも言える。

4.2 BST の結果の例

先に進む前に、具体例を少し挙げておく。

4.2.1 自明な例：i.i.d.-系での中心極限定理（CLT）

一番簡単な例として、i.i.d.（identical independent distribution；独立同分布）の確率変数の系を考える。非常によく知られているようにこれはもちろん中心極限定理（の弱いもの）に導かれるのだが、BST の練習としてやってみよう。

考える系としては、(3.1.3) にて $J \equiv 0$ の場合をとればよい：

$$\rho(\Phi) = \prod_x \eta(\varphi_x) \quad (4.2.1)$$

スピン変数が独立なので、格子の構造は問題にならないから、 φ を整数 x で番号づけることにしよう。また、BST としては

$$\varphi'_x := 2^{-\theta} (\varphi_{2x} + \varphi_{2x+1}) \quad (4.2.2)$$

なる「ブロックスピン」の分布をみることにする。(4.1.4) の定義通りやると ($L^d = 2$)、BST の結果は

$$\rho'(\Phi') = \prod_x \eta'(\varphi'_x), \quad \eta'(\varphi') = 2^\theta \int d\varphi \eta(\varphi) \eta(2^\theta \varphi' - \varphi) \quad (4.2.3)$$

という形になることがわかる。つまり（もともとのスピンの分布が直積測度に従っていたので当然ではあるが）一つのスピンの分布を表す測度の変換

$$\eta_{n+1}(\varphi') = 2^\theta \int d\varphi \eta_n(\varphi) \eta_n(2^\theta \varphi' - \varphi) \quad (4.2.4)$$

をとけばよい。畳みみだから Fourier 変換を用いると（この時点で通常の中極限定理の証明になってしまった...）

$$\hat{\eta}_{n+1}(k) = [\hat{\eta}_n(2^{-\theta} k)]^2, \quad \left[\hat{\eta}(k) := \int d\varphi e^{-ik\varphi} \eta(\varphi) \right] \quad (4.2.5)$$

となるので、両辺の対数をとると、

$$g_{n+1}(k) = 2g_n(2^{-\theta} k), \quad [g_n(k) := \log \hat{\eta}_n(k)] \quad (4.2.6)$$

つまり

$$g_n(k) = 2^n g_0(2^{-n\theta} k) \quad (4.2.7)$$

が得られる。

⁴⁴ そのように翻訳できるのは非常に運のいい場合なのか、それとも大自由度系のある程度一般的な性質なのか、は今の所僕にはわからない。特に、世の中には多種多様なカオス系が存在することを考えると、なんの条件も付けない大自由度系ではそう簡単には翻訳できないだろうと言う気もする。しかし、今考えているような強磁性スピン系についてはこのような翻訳が可能であろう（かつカオスは起こらないだろう）と言う漠然とした「感じ」は持っている

後は通常を中心極限定理の証明と同じように解析すると、 η が平均がゼロ、かつ適当に性質のいい分布であるなら、 $\theta = 1/2$ のときに

$$g_n(k) \longrightarrow g_0(0) - \frac{\sigma^2 k^2}{2} \quad \sigma^2 := \langle \varphi; \varphi \rangle \quad (4.2.8)$$

が証明できて、中心極限定理が得られる。

以上はちょっと面白くなかったけども、「BST とはこのように無限自由度を少しずつ束にして取り扱うものである」という一番簡単な例、およびその場合の θ を具体的に求めた例のつもりである。

Remark. 上の議論をフーリエ変換を用いないでやることも大体、できる。少なくとも線形摂動を計算して、ガウス分布が不動点になっている事などは簡単にわかる。

4.2.2 ガウス模型

BST が陽な形で行える例として、ガウス模型を考える。これは 3.1.2 節で見たように、簡単に解けるが、BST の練習のつもりで改めてやってみる。

期待値の恒等式 (4.1.6) は BST 前後の Φ について線型な関係であるから、特に、BST 前の系がガウスであれば BST 後の系もガウスであると言える (Wick の定理がともに成立するので)。ガウス模型は「平均」と「共分散」で決まるから、BST 後のモデルに対してこれらを求めてやれば、BST 後のガウス模型がわかる。ところが、BST に際しての期待値の関係式 (4.1.6) を思い出すと、BST 後のガウス模型の相関関数を、BST 前の相関関数の「平均」として計算することができる。つまり、 ρ' を直接計算する代わりに、共分散 (= 2 点関数) を先に計算し、それから ρ' を逆算しようということである⁴⁵。

実際にこのプログラムを実行すると、3.1.2 節の結果を用いて

$$\begin{aligned} \langle \varphi'_0 \varphi'_x \rangle &= L^{-2\theta} \sum_{\|y\|, \|z-Lx\| < \frac{L}{2}} \langle \varphi_y \varphi_z \rangle \\ &= L^{-(2\theta+d)} \int_{[-\pi L, \pi L]^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik \cdot x}}{\mu + 2J \sum_{j=1}^d \{1 - \cos(k_j/L)\}} \prod_{j=1}^d \left[\frac{\sin \frac{k_j}{2}}{\sin \frac{k_j}{2L}} \right]^2 \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

を得る。これを n -回繰り返すと、

$$\left\langle \varphi_0^{(n)} \varphi_x^{(n)} \right\rangle = L^{-(2\theta+d)n} \int_{[-\pi L^n, \pi L^n]^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik \cdot x}}{\mu + 2J \sum_{j=1}^d \{1 - \cos(k_j/L^n)\}} \prod_{j=1}^d \left[\frac{\sin \frac{k_j}{2}}{\sin \frac{k_j}{2L^n}} \right]^2 \quad (4.2.10)$$

となる。 n 点関数は Wick の定理から求められる (φ 奇数個の期待値はもちろん、ゼロである)。

n 回 BST を施したものの結果 $\rho^{(n)}$ は、上の共分散を与えるようなガウス測度である。つまり、

$$\rho^{(n)}(\Phi^{(n)}) = \frac{1}{Z} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{x,y} \varphi_x^{(n)} \left(A^{(n)} \right)_{x,y} \varphi_y^{(n)} \right] \quad (4.2.11)$$

で、行列 $A^{(n)}$ は、その逆行列が

$$\left[\left(A^{(n)} \right) \right]_{x,y}^{-1} = \left\langle \varphi_0^{(n)} \varphi_x^{(n)} \right\rangle \quad \text{of (4.2.10)} \quad (4.2.12)$$

となるようなものである。

⁴⁵ これはあくまで、ガウス模型だからできることである。本題の φ^4 モデルではそもそも、BST 前の系での 2 点関数等が計算できていない —— だからこそ、BST を用いて解析するのである

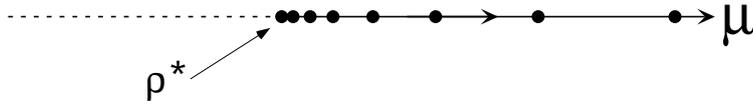


図 6: ガウス模型の場合のくりこみ群の flow. ρ^* が不動点で, ここからの湧き出しが右の方へ向かっている. 図の点々は一回毎のくりこみ変換の結果を表している.

様々な θ の値

次に $\rho^{(n)} \rightarrow \rho^*$ となるにはどのような θ をとるべきか考えてみよう.

$\rho^{(n)} \rightarrow \rho^*$ となるには, $(A^{(n)})$ の逆行列であるところの $\varphi^{(n)}$ の共分散がうまく収束してくれることが必要である. つまり, (4.2.10) が $n \rightarrow \infty$ でうまく収束するような θ を選ぶ必要がある. (4.2.10) において $|x| = O(1)$ と思って, つまり $|k| \leq O(1)$ の範囲の積分を重んじて $n \rightarrow \infty$ とすると,

$$\langle \varphi_0^{(n)} \varphi_x^{(n)} \rangle \approx L^{-(2\theta-d)n} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik \cdot x}}{\mu + J|k|^2 L^{-2n}} \prod_{j=1}^d \left[\frac{2 \sin \frac{k_j}{2}}{k_j} \right]^2 \quad (4.2.13)$$

となる. これが良い極限を持つには:

Case (1) $\mu > 0$ の時: $\theta = \frac{d}{2}$ ととると,

$$\langle \varphi_0^{(n)} \varphi_x^{(n)} \rangle \approx \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik \cdot x} \prod_{j=1}^d \left[\frac{2 \sin \frac{k_j}{2}}{k_j} \right]^2 \quad (4.2.14)$$

これは BST を何回もやると, どんどん高温側の不動点 (i.i.d に相当) に近づいていくことを示す (図 6 参照).

Case (2) $\mu = 0$ の時: $\theta = \frac{d+2}{2}$ ととると

$$\langle \varphi_0^{(n)} \varphi_x^{(n)} \rangle \approx \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik \cdot x}}{J|k|^2} \prod_{j=1}^d \left[\frac{2 \sin \frac{k_j}{2}}{k_j} \right]^2 \quad (4.2.15)$$

で不動点が見え, メデタシメデタシ. これは連続理論での 2 点関数

$$C_{\text{cont}}(0, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik \cdot x}}{J|k|^2} \quad (4.2.16)$$

を $0, x$ 中心, 一辺 1 の超立方体で平均したものになっている.

最後に, $\mu > 0$ の系に対して無理矢理 $\theta = \frac{d+2}{2}$ の BST を行うとどうなるか?

$$\langle \varphi_0^{(n)}; \varphi_x^{(n)} \rangle \approx \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik \cdot x}}{\mu L^{2n} + J|k|^2} \prod_{j=1}^d \left[\frac{2 \sin \frac{k_j}{2}}{k_j} \right]^2 \quad (4.2.17)$$

つまり, μ が μL^{2n} になったように見える. ガウス型不動点 (ρ^*) の周りの流れの様子 (不動点からのわき出し) が見えている (図 6 参照).

4.2.3 φ^4 モデル

φ^4 モデルに対して BST を行うのは, なかなか大変である. この節では詳細には全く立ち入らず, BST の結果の概略を述べる.

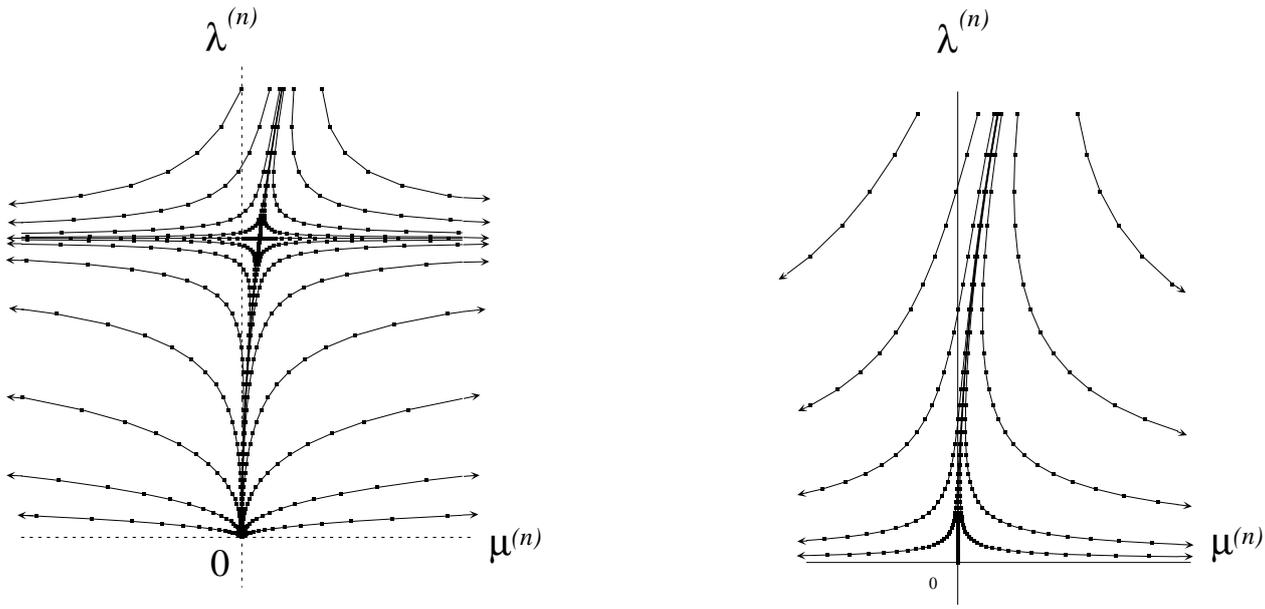


図 7: φ^4 系のくりこみ変換の flow の模式図. 左側が $d < 4$, 右側が $d > 4$ の場合である. 図の点々は一回毎のくりこみ変換の結果を表している. ただし, この図の中で厳密にできているのはごくわずかで, 第一象限の中の横軸に非常に近い部分だけである.

ガウス模型の場合, BST を行った後もガウス模型であった. そのため, 確率測度は (4.2.11) に現れている行列 $A^{(n)}$ で完全に規定された. 残念ながら, φ^4 模型に対しては, 同様の結果は成立しない. つまり, BST を一回行っただけで, φ^4 以外の項も, どんどん現れてくるのである (しかも困った事に, ある程度離れたスピン同士の相互作用も現れてくる). つまり, BST を一回行っただけなのだが, その結果は極めて汚いものになる.

しかし, 少なくとも λ が小さい場合には, BST 後の系も, ある程度は φ^4 的なもので書けることがわかっている. つまり, $\rho^{(n)}$ は大体, φ^4 型で書けるのだ⁴⁶. この φ^4 系を (3.1.6) のようにしてパラメーター $\lambda^{(n)}$ と $\mu^{(n)}$ を用いて表す事にすると, $\mu^{(n)}, \lambda^{(n)}$ の様子は大体, 図 7 のようになる. 系の次元 d が 4 より大きいかわ小さいかで定性的な振る舞いが異なることに注意.

4.3 場の理論におけるくりこみ群：くりこみ群と連続極限 (effective theory としての意味)

以上の準備の下に, 場の理論の構成をくりこみ群の見方から考えてみよう.

4.3.1 くりこみ群と effective theory

我々の問題は ρ_ϵ の良い取り方であるが, まず問題を逆にして, 与えられた ρ_ϵ が場の理論としてはどのようなものを表すのか, 考えてみる. (勿論, 場の理論としては $\epsilon \downarrow 0$ の極限しか意味がないが, $\epsilon \ll 1$ と思って, 連続極限の近似としての意味を考える.)

⁴⁶驚くべき事に, λ が非常に小さい場合には, BST が厳密に遂行され, ここで述べているような事は証明されている ([12] とその文献を参照)

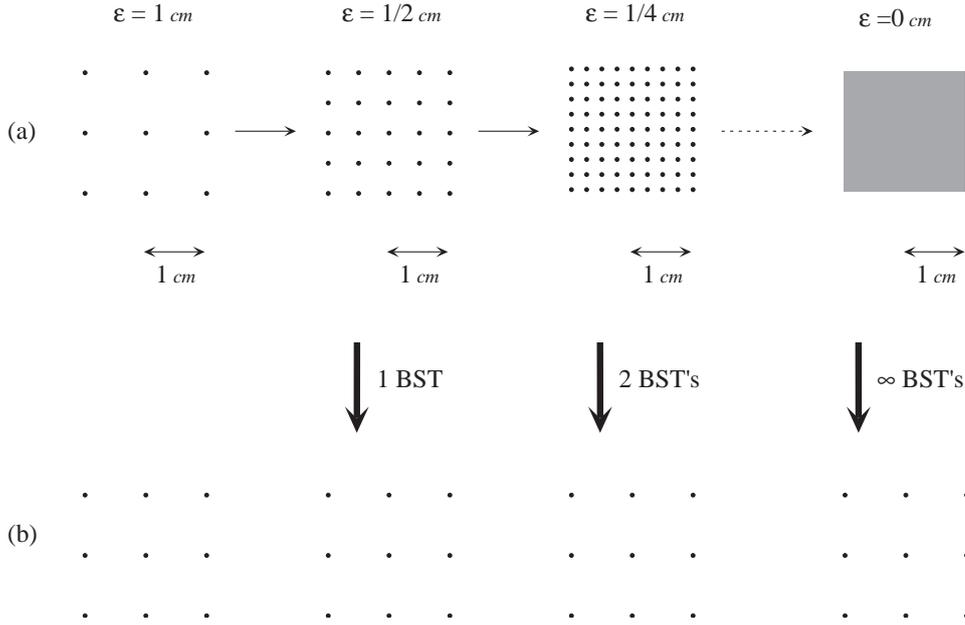


図 8: (a) 格子の極限としての連続時空の構成.

(b) $\epsilon L^N \approx 1$ なる N 回のくりこみ変換を行い, 結果の格子の間隔を 1 にする. (図を書きやすくするため, $L=2$ の BST の場合を書いた.)

まず, ρ_ϵ のスピン系は, (2.2.1) 節あたりのようにして \mathbb{Z}^d の上のもので考えることができる. 目的の連続時空での距離 l は ρ_ϵ のスピン系ではスピンの間隔 l/ϵ に相当する:

$$(1 \text{ 格子間隔}) = (\text{連続の } \epsilon), \quad l|_{\text{cont}} \iff \frac{l}{\epsilon}|_{\text{lattice}}. \quad (4.3.1)$$

ということでもある.

この ρ_ϵ に (ブロックの一辺が L の) BST を n 回やってみよう ($n > 0$):

$$\rho_\epsilon^{(n)} := \mathcal{R}^n \rho_\epsilon. \quad (4.3.2)$$

定義から, $\rho_\epsilon^{(n)}$ のブロックスピンの系では,

$$(n\text{-格子の} 1 \text{ 格子間隔}) = (\text{元の格子の } L^n \text{ 格子間隔}) = (\text{連続の } \epsilon L^n) \quad (4.3.3)$$

が成立する (最後で (4.3.1) を使った). つまり, 連続時空での長さとその n -回 BST をやった後のスピンの世界は

$$l|_{\text{cont}} \iff \frac{l}{\epsilon L^n}|_{n\text{-lattice}} \quad (4.3.4)$$

の関係で結ばれている (図 8 参照).

一般に格子の間隔程度の距離の相関関数の振る舞いを見ることはそんなに難しくないが (そもそも, このくらいしか離れていなければ, 特殊な場合以外は相関関数は $O(1)$ 以下であろう), 格子間隔に比べて非常に大きいところの振る舞いはなかなかわからない (例: スピン系の長距離での振る舞いは系のパラメーターに敏感に依存し, 与えられたパラメーター値の系が臨界点とどのような関係にあるかはなかなかわからない).

場の理論や臨界現象の解析が大変なのは, このように非常に大きい ($\epsilon \downarrow 0$ につれ無限大になる) 距離の振る舞いを見る必要があるからである. ところが, (4.3.3) によると, BST 後の系では, **1 格子間隔が連続時空の距離 ϵL^n に相当**しており, 従って, この距離 ϵL^n のスケールでの振る舞いを見るのには適した理論であると考えられる.

この事情を物理の用語で「 $\rho_\epsilon^{(n)}$ は ϵL^n の距離のスケールでの **effective theory (有効理論)** である」と表現する.

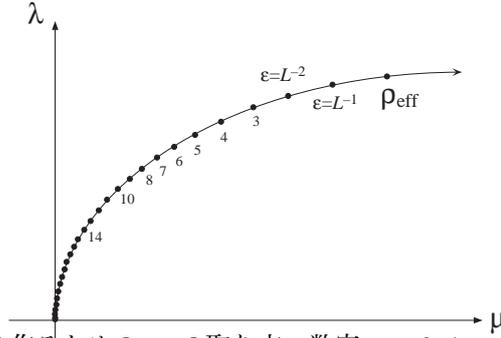


図 9: 連続極限を作るための ρ_ϵ の取り方. 数字 $n = 3, 4, \dots$ は $\rho_{L^{-n}}$ の位置を模式的に表す.

4.3.2 連続極限と effective theory

さて、この観点から連続極限を見てみよう. 我々の見たいのは、あくまで連続時空で $O(1)$ の距離の振る舞いである. (この $O(1)$ は実際には 10^{-15}m などと我々からすれば極微だったりするが、とにかく $\epsilon \downarrow 0$ と比べれば非常に大きく、 ϵ に関して一様に正である). 以下、我々の見たい距離を l と書くことにする.

さて、 ρ_ϵ が与えられたとき、

$$\epsilon L^N \approx 1 \quad \iff \quad N \approx |\log_L \epsilon| \quad (4.3.5)$$

なる N を定め、この N -回だけ BST を行ってみる. (4.3.3) によると、 N -回後のブロックスピンの間隔は丁度 $\epsilon L^N \approx 1$ となる. つまり、 $\rho_\epsilon^{(N)}$ の系は距離のスケール $O(1)$ での effective theory なのである.

これは何を意味するか? 見たい Schwinger 関数 (の格子間隔 ϵ での近似) が

$$S_{n,\epsilon}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \approx \left\langle \varphi_{\tilde{x}_1}^{(N)}, \dots, \varphi_{\tilde{x}_n}^{(N)} \right\rangle_\epsilon^{(N)} \quad (4.3.6)$$

と与えられることを意味する⁴⁷. 今、 \tilde{x}_j が全て $O(1)$ であることを考えると、(4.3.6) の振る舞いは、殆ど $\rho_\epsilon^{(N)}$ の形を見ただけで読みとれる筈である. つまり、与えられた ρ_ϵ の連続時空での振る舞いを見なければ、 $\rho_\epsilon^{(N)}$ を見ればよい.

4.3.3 連続極限の取り方 (ρ_ϵ の選び方)

以上から、欲しい場の理論を作るにはどのように ρ_ϵ を選んだら良いか、が示唆される.

1. 連続極限で望ましい振る舞いをするような effective theory の ρ_{eff} を書き下す.
2. 各 $\epsilon > 0$ に対し、 ρ_ϵ を、 $\rho_\epsilon^{(N)} \approx \rho_{\text{eff}}$ が成立するように選ぶ (N は (4.3.5) で定義).
3. 上のようにとり続けつつ、 $\epsilon \downarrow 0$ とする. 要するに ρ_{eff} からくりこみ群の flow を遡るように ρ_ϵ をとっていけば良い⁴⁸.

模式的に表すと図 9 のようになる (5.1 節で詳しく行う φ_3^4 模型の場合を描いた).

⁴⁷ここはかなりええかげんに書いた. (1) まず右辺の量はブロックスピンの期待値、つまり元のスピンをブロック内で平均したものの期待である. だから、左辺の様な元のスピンの各点での期待値とは一般には等しくない. しかし、よくあるように n -点関数がある程度滑らかであると仮定すると、元のスピンをブロック内で平均する前と後で、そんなに差はないであろう. (2) 右辺のブロックスピンの足は本当は $\tilde{x}_j / (\epsilon L^n)$ の整数部分である. しかし、今は $\epsilon L^N \approx 1$ であることを考え、またいたずらに式を煩雑にするのを避けて、単に \tilde{x}_j と書いた. なお、(2.1.8) の \mathcal{N}_ϵ はここには出てこない. というのも、 \mathcal{N}_ϵ は (4.3.6) が規格化もこめて成立するようにとればよいから. つまり、 $\mathcal{N}_\epsilon = L^{N(d-\theta)} = \epsilon^{\theta-d}$

⁴⁸くりこみ変換には逆はないので「遡り方」は一意的には決まらない. しかし、とにかく場の理論を作れば良いのだから、一通りでも遡り方を見つけたら、それで十分である

4.3.4 可能な連続極限

さて、上のシナリオはいつでも遂行できるとは限らない。(実際、できないからこそ4次元で nontrivial な場の理論が構成できていないのである。後述) その事情をくりこみ群の観点から見てみよう。

前節では連続極限を取る条件が、

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \rho_\epsilon^{(N)} \Big|_{\epsilon L^N \approx 1} = \rho_{\text{eff}} \quad (4.3.7)$$

なるように $\{\rho_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ をとり続けること、と要約された。 $\epsilon \downarrow 0$ であるから、当然 $N \uparrow \infty$ となる訳で、 ρ_{eff} としては左辺の極限の行き先 (つまり、**無限回の BST の後に到達できるもの**) しか許されない。つまり、好き勝手に ρ_{eff} をとって (4.3.7) を要求してもそのような場の理論は構成できない可能性があるわけだ。

くりこみ群の flow の言葉では「無限回の交換の後で到達できるもの」とは、要するに

- ρ^* (交換の不動点) か、または
- ρ^* からの湧き出し上の点

の2とおりに限られる。このように、場の理論として可能なものが、くりこみ群の flow の図を書くことで決定されてしまうことになる。

Remark. 上の一般論を具体的モデルに適用するには注意が必要である。上で ρ^* はくりこみ変換の不動点であればなんでもよく、そこからの湧き出し上の点もすべて許される。つまり上の議論を適用して湧き出し上の点を全てを見つけるには、特定の不動点のまわりだけ見てはダメで、くりこみ変換の flow の**大局的な様子**を見ることが必要である。(ある不動点 ρ_1^* に吸い込まれている flow も、他の不動点 ρ_2^* から湧き出しているかも知れないから、 ρ_1^* の近傍だけ見て「吸い込みだから場の理論が出来ない」と結論づけるのは早計である。) 実際問題としてくりこみ変換の flow の大局的な振る舞いを見るのは大変に難しく、与えられた点が遠くの方の不動点からの湧き出し上にあるかどうかはまず判定できない。この意味で上の判定条件は「この場合には場の理論ができる」という十分条件と捉えるのが無難であろう。(例外もある。 φ_4^4 模型は自由場になると思われている。6節参照。)

このような事情を φ_d^4 模型の場合に書いてみたのが図 10 である。 φ_3^4 型の flow では Gaussian fixed point からの湧き出しを利用して、影をつけた部分全部を ρ_{eff} にとれる (図 10 の (a))。この場合、場の理論の短距離 (UV) と長距離 (IR) の振る舞いは以下になるはずで、かなり豊かな構造が期待できる：

- $\rho_\epsilon \equiv \rho_{\text{WF}}$ (常に ρ_{WF}) とした場合。この際には全ての距離のスケールで ρ_{WF} で表される場の理論になる。
- ρ_G と ρ_{WF} を結ぶ線上の一点 ρ_0 (ただし ρ_0 は ρ_G から離れた点) に ρ_ϵ をとり続けた場合。この時はどのスケールでも ρ_{WF} のように見える。なぜなら、 $\epsilon \downarrow 0$ の極限をとると、どのスケールの ρ_{eff} も ρ_{WF} に収束してしまうから。
- ρ_ϵ を図の $0, 1, 2, \dots$ のようにとった場合 (ϵ が小さくなるに連れて、 $0, 1, 2, 3, \dots$ と遡って G に近づく)。この時は IR (我々のいる巨視的長さ) での振る舞いは0のところにある ρ_{eff} で表されるが、UV に行くにつれて gaussian fixed point (G) に近づくので自由場のように振る舞う (UV asymptotic free)。
- 最後に、 ρ_G と ρ_{WF} を結ぶ線上に ρ_ϵ を、 $\epsilon \downarrow 0$ につれて ρ_G に近づくようにとると、IR では ρ_{WF} 、UV では ρ_G の様にふるまう (UV asymptotic free)。

一方、5次元の φ_5^4 型の flow では Gaussian fixed point が λ -方向には吸い込みであるため、 ρ_{eff} は Gaussian fixed point からの湧き出しの方向 (つまり μ -軸) にしかとれない (図 10 の (b))。これではできる ρ_{eff} はガウス模型の仲間、という事になって、全く面白くない。

勿論、このような結論を出すには上の remark の通り、 $\lambda \rightarrow \infty$ の部分まで調べ、この部分から有限回数で落ちてくることを言う必要がある。この点については6節参照。

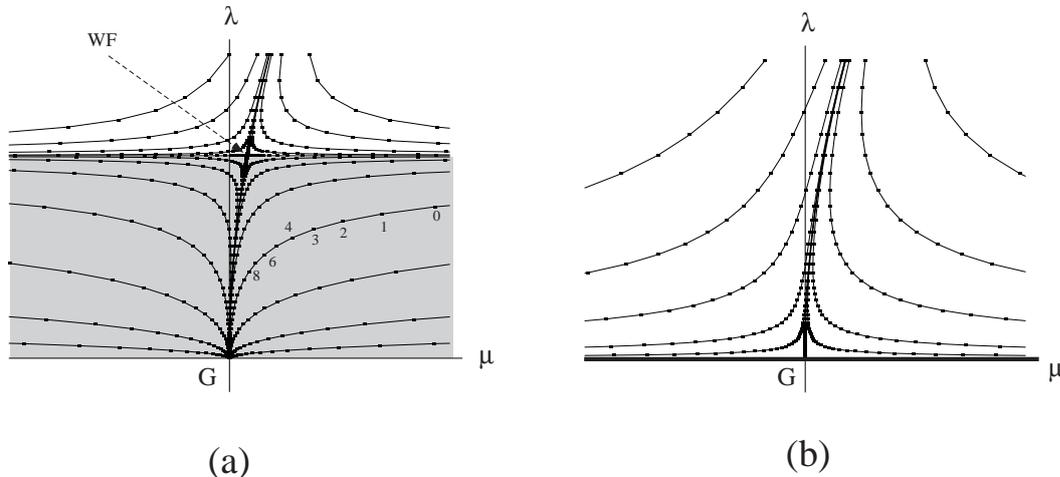


図 10: 場の理論 (ρ_{eff}) として可能な領域. (a) φ_3^4 型の flow では Gaussian fixed point (G) からの湧き出しを利用して、影をつけた部分全部が ρ_{eff} にとれる. $n = 0, 1, 2, \dots$ は 0 のところに ρ_{eff} を作るための, $\epsilon = L^{-n}$ の際の ρ_ϵ の取り方を表す. (b) φ_5^4 型の flow では Gaussian fixed point (G) が λ -方向には吸い込みであるため, ρ_{eff} は Gaussian fixed point からの湧き出しの方向 (つまり μ -軸) にしかとれない. [実際には $\lambda \uparrow \infty$ の部分がどう振る舞っているかわからないと (つまりこの部分に不動点が無いことが言えないと), 上の様な結論は出せないが.]

5 場の理論の構成の実際 —— φ_3^4 理論

この節では, 3次元での φ^4 型の場の理論の構成を概観する.

5.1 くりこみ群による解析 (アイディアのみ)

ここでは, くりこみ群のアイディアを用いて, 3次元 φ^4 モデルを構成することを, もう少し具体的に考えてみる. 厳密な話ではなく, アイディアの説明であるが, ここで述べる事は厳密に遂行可能である.

5.1.1 φ_3^4 -モデルの構成: $\mu_\epsilon, \lambda_\epsilon$ のとりかた

図 10 の (a) に例示した ρ_ϵ の取り方を具体的に書き下してみよう. (以下, くりこみ変換の recursion を簡単にするため, φ^2 の項の係数を $\mu + O(\lambda)$ とうまくとって— Wick ordering して—考える.)

くりこみ変換の recursion は

$$\lambda' = L\lambda\{1 + O(\lambda)\}, \quad \mu' = L^2\mu - c_1\lambda^2 - c_2\mu\lambda + O(\lambda^3, \mu^3) \quad (5.1.1)$$

の形になる. ここで厳密には上の c_1, c_2 は定数ではなく, くりこみ変換の回数 n によるが, $n \uparrow \infty$ では定数に行くので, 簡単の為, 定数のようにして以下, 扱う.

我々の目的は, 格子間隔 ϵ の時の出発点 $\lambda_\epsilon, \mu_\epsilon$ を, N 回後の effective couplings が $[N \equiv -\log_L \epsilon]$

$$\mu_\epsilon^{(N)} \approx \mu_{\text{eff}} [\approx 0.1], \quad \lambda_\epsilon^{(N)} \approx \lambda_{\text{eff}} [\approx 0.0001] \quad (5.1.2)$$

なるようにとることである.

このためには、ともかく (5.1.1) を解く必要がある⁴⁹。ただ、我々は (5.1.2) を要請したいので、この $\lambda^{(N)}$ から出発して (5.1.1) を k の小さい方に向かって解いてやろう。 $\lambda^{(k)} \ll 1$ ならば

$$\lambda^{(k)} = L^{-1} \lambda^{(k+1)} \{1 + O(\lambda^{(k)})\} = L^{-1} \lambda^{(k+1)} \{1 + O(\lambda^{(k+1)})\} \quad (5.1.3)$$

であるので、 $\lambda^{(N)} = \lambda_{\text{eff}}$ から出発すると

$$\lambda^{(k)} \approx \lambda^{(N)} L^{-(N-k)} \prod_{\ell=k+1}^N \{1 + O(\lambda^{(\ell)})\} \quad (5.1.4)$$

となり、これから直ちに $\lambda^{(k)} \leq \lambda^{(N)} (L/2)^{-(N-k)}$ を得て、これを更に (5.1.4) に代入することで、結局

$$\lambda^{(k)} \approx \lambda_{\text{eff}} L^{-(N-k)} \{1 + O(\lambda_{\text{eff}})\} \quad (5.1.5)$$

を得る。特に

$$\lambda_{\epsilon} = \lambda^{(0)} \approx \lambda_{\text{eff}} L^{-N} \{1 + O(\lambda_{\text{eff}})\} \approx \epsilon \lambda_{\text{eff}} \{1 + O(\lambda_{\text{eff}})\} \quad (5.1.6)$$

ととれば良いことがわかる。

次に μ に進む。やはり逆に解く精神で、

$$\begin{aligned} \mu^{(k)} &= \frac{\mu^{(k+1)} + c_1 (\lambda^{(k)})^2 + O(\lambda^3, \mu^3)}{L^2 - c_2 \lambda^{(k)}} \\ &\approx \frac{1}{L^2} \mu^{(k+1)} + \frac{c_1}{L^2} \lambda_{\text{eff}}^2 L^{-2(N-k)} + c_2 \lambda_{\text{eff}} \{1 + O(\lambda_{\text{eff}})\} L^{-(N-k)} \mu^{(k+1)} + O(\lambda^3, \mu^3) \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

と書き直し (2 段目では (5.1.5) を用いた), $\zeta^{(k)} := \mu^{(k)} L^{2(N-k)}$ を導入すると、

$$\zeta^{(k)} = \zeta^{(k+1)} \left[1 + c_2 \lambda_{\text{eff}} \{1 + O(\lambda_{\text{eff}})\} L^{2-(N-k)} \right] + \frac{c_1}{L^2} (\lambda_{\text{eff}})^2 + O(L^{-(N-k)}) \quad (5.1.8)$$

となる。これより、

$$\zeta^{(k)} = \zeta^{(N)} + \sum_{\ell=k}^{N-1} \left[\zeta^{(\ell+1)} c_2 \lambda_{\text{eff}} \{1 + O(\lambda_{\text{eff}})\} L^{2-(N-k)} + \frac{c_1}{L^2} (\lambda_{\text{eff}})^2 \right] \quad (5.1.9)$$

を得た。これより ($\zeta^{(N)} = \mu^{(N)} = \mu_{\text{eff}}$) いつも $\zeta^{(k)} \approx \mu_{\text{eff}} + O(\lambda_{\text{eff}}^2 (N-k))$ であるとわかり、従って結局、和の第一項は N, k に関して一様に有限で、

$$\zeta^{(k)} = \mu_{\text{eff}} + O(\lambda_{\text{eff}}) + \frac{c_1}{L^2} \lambda_{\text{eff}}^2 (N-k) \quad (5.1.10)$$

であることがわかる。実は上の $O(\lambda_{\text{eff}})$ の項は $O(\mu_{\text{eff}} \lambda_{\text{eff}} + \lambda_{\text{eff}}^2)$ とまで評価できるが、ここでは立ち入らない。

ともかく、これから最終的に

$$\begin{aligned} \mu_{\epsilon} &= \mu^{(0)} = L^{-2N} \zeta^{(0)} = L^{-2N} \mu_{\text{eff}} + L^{-2N} O(\mu_{\text{eff}} \lambda_{\text{eff}} + \lambda_{\text{eff}}^2) + L^{-2-2N} c_1 \lambda_{\text{eff}}^2 N \\ &= \epsilon^2 [\mu_{\text{eff}} + O(\mu_{\text{eff}} \lambda_{\text{eff}} + \lambda_{\text{eff}}^2) + c_1 L^{-2} \lambda_{\text{eff}}^2 |\log_L \epsilon|] \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

と言う結果が得られた。

結論： $\mu_{\epsilon}, \lambda_{\epsilon}$ は

$$\lambda_{\epsilon} = \epsilon \lambda_{\text{eff}} \{1 + O(\lambda_{\text{eff}})\} \quad (5.1.12)$$

$$\mu_{\epsilon} = \epsilon^2 [\mu_{\text{eff}} + O(\mu_{\text{eff}} \lambda_{\text{eff}} + \lambda_{\text{eff}}^2) + c_1 L^{-2} \lambda_{\text{eff}}^2 |\log_L \epsilon|] \quad (5.1.13)$$

ととれば、お目当ての φ^4 理論が構成できるはずである。

⁴⁹ 厳密にはくりこみ変換の途中であらわれる φ^6 項などのために、この漸化式よりも複雑なものを扱う必要がある。以下では要点を説明するためにこのように単純化したものを考える

5.1.2 ϕ_3^4 -モデルの構成：パラメーターの取り方の解釈（連続時空でのパラメーターでは？）

さて、上の取り方を普通の場合の理論の言葉で解釈してみよう。 ϕ_3^4 は超くりこみ可能であるから、くりこみ項が具体的に書き下せる。特に発散を含むのは質量のくりこみだけで、それも1ループ（の2次発散）と2ループ（の対数発散）のみのはず。実際にこうなっているかどうかを見てみよう。（実は、今は φ^4 項をWick orderingした形で考えているので、1ループの発散は自動的にキャンセルされてでてこない。）

ρ_ϵ を与えるハミルトニアン \mathcal{H}_ϵ は

$$\mathcal{H}_\epsilon = \frac{1}{4} \sum_{|x-y|=1} (\varphi_x - \varphi_y)^2 + \sum_x \left[\frac{\mu_\epsilon}{2} \varphi_x^2 + \frac{\lambda_\epsilon}{4!} : \varphi_x^4 : \right] \quad (5.1.14)$$

であるから、(5.1.12)の情報を用いて、これを連続の場合の理論の変数で書き直してみよう。この際、場の規格化には注意する必要がある。つまり、この統計系から場の理論を作るには(2.1.8)のように規格化因子 \mathcal{N}_ϵ を適当に選んで

$$S_\epsilon(0, \tilde{x}) := \mathcal{N}_\epsilon^2 \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_{\rho_\epsilon} \quad (5.1.15)$$

とするわけである⁵⁰。このようにとった場合、「くりこまれた場」に相当するものは $\tilde{\varphi}(\tilde{x}) := \mathcal{N}_\epsilon \varphi_x$ であって、連続時空の書き方をしたいのならこの $\tilde{\varphi}(\tilde{x})$ を用いる必要がある。

そこで、まず、この \mathcal{N}_ϵ をどうとるべきか考える。これは簡単である。と言うのも、上の ρ_{eff} の選び方は、

$$S_\epsilon(0, \tilde{x}) \approx \langle \varphi_0^{(N)} \varphi_{\tilde{x}}^{(N)} \rangle_{\rho_\epsilon^{(N)}} \quad (5.1.16)$$

ととった場合、(規格化も含めて)2点関数などがうまく行くようにしたものであった((4.3.6)参照)。ブロックスピン変換の定義から

$$\langle \varphi_0^{(N)} \varphi_{\tilde{x}}^{(N)} \rangle_{\rho_\epsilon^{(N)}} \approx L^{2(d-\theta)N} \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_{\rho_\epsilon} \quad (5.1.17)$$

の関係があるから、(5.1.15)–(5.1.17)より直ちに

$$\mathcal{N}_\epsilon = L^{(d-\theta)N} = L^{N/2} = \epsilon^{-1/2} \quad (5.1.18)$$

を得る（勿論、 $d=3, \theta=(d+2)/2$ を用いた）。結局、 ρ_ϵ の中の φ とくりこまれた場 $\tilde{\varphi}$ の関係は

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}) := \epsilon^{-1/2} \varphi_x \quad (5.1.19)$$

となった。

後は(5.1.12)、(5.1.19)、及び積分と和の関係 $\int = \epsilon^{-d} \sum_x$ などを用いて(5.1.14)を書き直す。結果は

$$\begin{aligned} Z_B &:= \mathcal{N}_\epsilon^{-2} \epsilon^{2-d} = 1 \\ \mu_B &:= \mathcal{N}_\epsilon^{-2} \epsilon^{-d} \mu_\epsilon = \epsilon^{-2} \mu_\epsilon = \mu_{\text{eff}} + O(\mu_{\text{eff}} \lambda_{\text{eff}} + \lambda_{\text{eff}}^2) + c_1 L^{-2} \lambda_{\text{eff}}^2 |\log_L \epsilon| \\ \lambda_B &:= \mathcal{N}_\epsilon^{-4} \epsilon^{-d} \lambda_\epsilon = \epsilon^{-1} \lambda_\epsilon = \lambda_{\text{eff}} \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

を用いて

$$\mathcal{H}_\epsilon \approx \int d^3 \tilde{x} \left[\frac{Z_B}{2} \nabla \{ \tilde{\varphi}(\tilde{x}) \}^2 + \frac{\mu_B}{2} \tilde{\varphi}(\tilde{x})^2 + \frac{\lambda_B}{4!} : \tilde{\varphi}(\tilde{x})^4 : \right] \quad (5.1.21)$$

となるのがわかる。これは丁度、通常の場合の理論での結論（wave functionと相互作用定数の無限大のくりこみは必要なく、質量の対数的くりこみがある）と勿論一致している。

以上、「超くりこみ可能」の場合を考えたので、ある意味であまりありがたみがわからなかったかも知れない（普通の場合の理論の「くりこみ理論」の方がよほど簡単なので、わざわざくりこみ群を用いる必要はない）。ただ、ここでやったことは原理的には「くりこみ可能」な場合でも(4.3節の考えに基づいて)実行できる。これがくりこみ群の強みである。

⁵⁰このあたり、 $\tilde{x} = \epsilon x$ として使っている。また、簡単のために2点関数だけを書く

5.2 相関不等式による解析

前節ではくりこみ群の考え方による構成法を紹介した。ここでは Brydges, Fröhlich, Sokal [6] による, 相関不等式を用いた構成法を紹介する。これは Glimm と Jaffe によって提案されたシナリオが, 非常に簡単に遂行できる⁵¹ という意味で貴重な例である (ただし時間の関係で, この講義では概略の紹介に留める)。

5.2.1 モデルの定義と Schwinger-Dyson 方程式

モデルの定義から始める。が, その前に重要な注意, 連続極限をとって行く時の便宜上, 格子の点として $\epsilon\mathbb{Z}^d$ を用いる。しかしこれまでの約束とは異なり, この 5.2 節では, **単なる x, y などで $\epsilon\mathbb{Z}^d$ の点を表す事にする**。(これまで $\epsilon\mathbb{Z}^d$ の点は \tilde{x}, \tilde{y} などと書いていた。) この理由は決してタイプするのが面倒だからではなく — 実際以下式の大半は \tilde{x} などで一旦はタイプした — \tilde{x} などの添字がたくさん出てきて数式が読みにくくなるからである。

我々の出発点は φ^4 モデルで, その測度 ρ_ϵ が⁵²

$$d\rho_\epsilon = \exp\left[\frac{J_\epsilon}{2} \sum_{|x-y|=\epsilon} \varphi_x \varphi_y - \sum_{x \in \epsilon\mathbb{Z}^d} \left\{ \frac{\lambda_\epsilon}{4!} \varphi_x^4 + \frac{\mu_\epsilon}{2} \varphi_x^2 \right\}\right] \cdot \prod_x d\varphi_x \quad (5.2.1)$$

で与えられるものとする。また, 2点 Schwinger 関数の候補として

$$S_{x,y}^{(\epsilon)} = S_{2,\epsilon}(x, y) = \langle \varphi_x \varphi_y \rangle_\epsilon \quad (5.2.2)$$

をとる⁵³。もちろん, $J_\epsilon, \mu_\epsilon, \lambda_\epsilon$ は ϵ の関数として適切に調節しながら $\epsilon \downarrow 0$ とする。

この方法の武器の一つはスケルトン不等式 (3.2.9)–(3.2.11) であって, これは右辺の λ を λ_ϵ にした形で成立する。

もう一つの武器は 2点関数に対する Schwinger-Dyson 方程式であり, 次の形をしている:

$$S_{x,y}^{(\epsilon)} = C_{x,y}^{(\epsilon)} - (\mu_\epsilon - 2dJ_\epsilon - M_\epsilon) \sum_z C_{x,z}^{(\epsilon)} S_{z,y}^{(\epsilon)} - \frac{\lambda_\epsilon}{6} \sum_z C_{x,z}^{(\epsilon)} \langle \varphi_z^3 \varphi_y \rangle_\epsilon \quad (5.2.3)$$

ここで M_ϵ は後からうまく決める正の定数, $C^{(\epsilon)}$ は以下のように与えられるガウス模型の 2点関数である⁵⁴:

$$C_{x,y}^{(\epsilon)} = \int_{[-\pi/\epsilon, \pi/\epsilon]^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\epsilon^d e^{ik \cdot (x-y)}}{M_\epsilon + 2J_\epsilon \sum_{j=1}^d \{1 - \cos(\epsilon k_j)\}} \quad (5.2.4)$$

5.2.2 スケルトン方程式と組み合わせた結果

さて, 上の Schwinger-Dyson 方程式の右辺には, C, S 以外に $\langle \varphi_z^3 \varphi_y \rangle_\epsilon$ が現れていて, これがわからないと, この方程式は解析できない。 $\langle \varphi_z^3 \varphi_y \rangle_\epsilon$ が左辺にくるような Schwinger-Dyson 方程式も書き下せるが, 今度は右辺に φ の 6 次の項が出てくる。この 6 次の項に対する Schwinger-Dyson 方程式の右辺には 8 次の項がでて... となって, これではどこまで行っても話が閉じない。

そこでスケルトン方程式が登場する。(ややこしいので, 以下ではところどころ ϵ の添字は省略するが, すべて同じ ϵ で考えている。) 問題の 4 次の項を

$$\langle \varphi_z^3 \varphi_y \rangle_\epsilon = u^{(4)}(z, z, z, y) + 3 \langle \varphi_z \varphi_y \rangle_\epsilon \langle \varphi_z^2 \rangle_\epsilon \quad (5.2.5)$$

⁵¹ φ_3^4 はそれまでも構成されていたが, その計算は非常に大変であった。[6] には, 彼らの新しい構成法を評して "... the construction of the superrenormalizable φ_3^4 model can be made so simple that it could be taught in a first-year graduate course ..." とある。実際にこの夏の学校をまるまる 3 コマ使えば可能だと思う

⁵² 厳密にはまず, 有限体積の定義から出発すべきだが, 無限体積極限が簡単に取れることは 3.3 節で既に見てある。なので形式的に無限体積での表式から始めた

⁵³ この節では, 2点関数を足 x, y を持った行列のように思うと便利なので, この節に限り, 2点関数 $S_{2,\epsilon}(x, y)$ を $S_{x,y}^{(\epsilon)}$ と書く

⁵⁴ 連続極限をとる事を見越して, $\epsilon \downarrow 0$ の極限がうまく行くような変数でフーリエ変換を書いた。この後, J_ϵ などをもっと ϵ で表すようにする

$$\begin{aligned}
x \text{ --- } y &\leq x \text{ } y - x \text{ --- } \blacksquare y - \frac{\lambda}{2} x \text{ --- } \bigcirc y + \frac{\lambda^2}{6} x \text{ --- } \bigcirc y \\
x \text{ --- } y &\geq x \text{ } y - x \text{ --- } \blacksquare y - \frac{\lambda}{2} x \text{ --- } \bigcirc y + \frac{\lambda^2}{6} x \text{ --- } \bigcirc y - \frac{\lambda^3}{4} x \text{ --- } \bigcirc y
\end{aligned}$$

図 11: Schwinger-Dyson 方程式にスケルトン不等式を用いた結果. 実線は 2 点函数 $S^{(\epsilon)}$ を, 点線は $C^{(\epsilon)}$ を表す. ラベルがついていない頂点については和をとる.

と書いて, $u^{(4)}$ にスケルトン不等式 (3.2.10)–(3.2.11) を用いよう. 結果は

$$S_{x,y}^{(\epsilon)} \leq C_{x,y}^{(\epsilon)} - (\mu_\epsilon - 2dJ_\epsilon - M_\epsilon) \sum_z C_{x,z}^{(\epsilon)} S_{z,y}^{(\epsilon)} - \frac{\lambda_\epsilon}{2} \sum_z C_{x,z}^{(\epsilon)} S_{z,z}^{(\epsilon)} S_{z,y}^{(\epsilon)} + \frac{\lambda_\epsilon^2}{6} \sum_{z,w} C_{x,z}^{(\epsilon)} \{S_{z,w}^{(\epsilon)}\}^3 S_{w,y}^{(\epsilon)} \quad (5.2.6)$$

および

$$\begin{aligned}
S_{x,y}^{(\epsilon)} &\geq C_{x,y}^{(\epsilon)} - (\mu_\epsilon - 2dJ_\epsilon - M_\epsilon) \sum_z C_{x,z}^{(\epsilon)} S_{z,y}^{(\epsilon)} - \frac{\lambda_\epsilon}{2} \sum_z C_{x,z}^{(\epsilon)} S_{z,z}^{(\epsilon)} S_{z,y}^{(\epsilon)} + \frac{\lambda_\epsilon^2}{6} \sum_{z,w} C_{x,z}^{(\epsilon)} \{S_{z,w}^{(\epsilon)}\}^3 S_{w,y}^{(\epsilon)} \\
&\quad - \frac{\lambda_\epsilon^3}{4} \sum_{u,v,w} C_{x,v}^{(\epsilon)} \{S_{v,u}^{(\epsilon)}\}^2 \{S_{u,w}^{(\epsilon)}\}^2 S_{v,w}^{(\epsilon)} S_{w,y}^{(\epsilon)} \quad (5.2.7)
\end{aligned}$$

である. 式を見ていてもよく分からないが, ファインマンダイアグラムで書けば, そこそこ理解できそうな格好をしている (図 11 参照).

5.2.3 パラメーターの決定 (くりこみ処方)

さて, (5.2.6) と (5.2.7) は, $S^{(\epsilon)}$ と $C^{(\epsilon)}$ に関する方程式である. このうち, $C^{(\epsilon)}$ は (5.2.4) で定義したものであるから (うまく M_ϵ や J_ϵ を決めれば) 良い極限に行く可能性がある (少なくとも, これは我々がコントロールできる). $S^{(\epsilon)}$ の方が未知函数であって, これを詳しく知りたい.

$S^{(\epsilon)}$ はこれらの不等式の両辺に現れているので, 一見すれば, この不等式から何かを得るのは難しそうに見える. しかし, **もしも右辺第二項が小さいならば**, それ以外の項は λ_ϵ の 1 次以上であるから⁵⁵, ある程度は小さい事が期待される. もしそうだとすれば, これらの不等式は結局のところ,

$$(\text{??}) \quad S_{x,y}^{(\epsilon)} \approx C_{x,y}^{(\epsilon)} \quad (\text{??}) \quad (5.2.8)$$

を意味する事になるのではないだろうか? もちろん, これがうまく行くためには, 右辺の第 3 項以降が小さい事が必要だが, それは $C^{(\epsilon)}$ が良い函数なら大丈夫かもしれない.

というわけで, うまくパラメーターを調節してやれば, (5.2.6) と (5.2.7) から (5.2.8) のような結論が得られる可能性がある. この意味でこれらの不等式には意味がありそうだ.

これから, 以上の期待を実現するように, パラメーターを決める.

- $C^{(\epsilon)}$ が $\epsilon \downarrow 0$ で良い極限を持つための条件から始める. (5.2.4) を良く眺めると, まず, 分子の ϵ^d を分母の M_ϵ で打ち消す必要があることわかる

$$M_\epsilon = \epsilon^d m_{\text{phys}}^2 \quad (5.2.9)$$

ここで m_{phys} は正の定数 (物理的意味は, この φ の表す粒子の質量).

⁵⁵すぐ後で見ると, ここはそんなに甘くない. 下手すると $\epsilon \downarrow 0$ で発散してしまうので, 見かけ上 $O(\lambda)$ でも注意が必要である. 以下ではこの点も考慮して, 変な発散がでないように μ_ϵ をうまく決める

- さらに, J_ϵ は, その後ろの $1 - \cos(\epsilon k_j)$ と併せて, やはり ϵ^d のオーダーであるべきである. つまり,

$$J_\epsilon = \epsilon^{d-2} \quad (5.2.10)$$

- 次に, λ_ϵ については, (この理論が超くりこみ可能であること — 結合定数 λ のくりこみは必要ないこと — をこっそりヒントにして) 摂動論から示唆される

$$\lambda_\epsilon = \epsilon^d \lambda \quad (5.2.11)$$

を採用する. ここで $\lambda > 0$ は小さいけども正の定数.

- 最後に μ_ϵ であるが, これには注意が必要である. 不等式 (5.2.6) と (5.2.7) の右辺第 2,3,4 項は大まかに言って, すべて $C^{(\epsilon)}$ と $S^{(\epsilon)}$ の畳み込みの形をしている — $S_{z,z}^{(\epsilon)}$ が定数であることも考慮すると, 第 2 項と第 3 項は完全に畳み込みである. また, 第 4 項は完全には畳み込みではないものの, $z \approx w$ と思えば畳み込みになる. (なぜ $z \approx w$ と思いたいかというと, $\{S_{z,w}^{(\epsilon)}\}^3$ が $|z-w|$ に関してある程度早く減衰すると期待されるから.) そこで, この第 4 項を $z=w$ として近似して, 第 2 項, 第 3 項と合わせて丁度消えるように, μ_ϵ を選んでみよう. つまり, 第 4 項を (λ_ϵ^2 は略)

$$\sum_{z,w} C_{x,z}^{(\epsilon)} \{S_{z,w}^{(\epsilon)}\}^3 S_{w,y}^{(\epsilon)} = \sum_z C_{x,z}^{(\epsilon)} S_{z,y}^{(\epsilon)} \times \sum_w \{S_{0,w}^{(\epsilon)}\}^3 + \sum_{z,w} C_{x,z}^{(\epsilon)} \left[\{S_{z,w}^{(\epsilon)}\}^3 - \delta_{z,w} \sum_w \{S_{0,w}^{(\epsilon)}\}^3 \right] S_{w,y}^{(\epsilon)} \quad (5.2.12)$$

と分解して前半部分を (5.2.6) の第 2, 第 3 項と組み合わせるのだ. 実際にやってみると, この第一項と (5.2.6) の第 2, 第 3 項はすべて $C^{(\epsilon)} * S^{(\epsilon)}$ の形にまとめられて

$$\left\{ -(\mu_\epsilon - 2dJ_\epsilon - M_\epsilon) - \frac{\lambda_\epsilon}{2} S_{0,0}^{(\epsilon)} + \frac{\lambda_\epsilon^2}{6} \sum_w \{S_{0,w}^{(\epsilon)}\}^3 \right\} \times \left(C^{(\epsilon)} * S^{(\epsilon)} \right)_{z,y} \quad (5.2.13)$$

となる. そこで, この項ができるだけ消えるように

$$\mu_\epsilon = 2dJ_\epsilon + M_\epsilon - \frac{\lambda_\epsilon}{2} C_{0,0}^{(\epsilon)} + \frac{\lambda_\epsilon^2}{6} \sum_w \{C_{0,w}^{(\epsilon)}\}^3 \quad (5.2.14)$$

ととる (右辺に $S^{(\epsilon)}$ が出て来て欲しくないので, $S^{(\epsilon)}$ はすべて $C^{(\epsilon)}$ で置き換えた;最終的には $S^{(\epsilon)} \approx C^{(\epsilon)}$ を期待しているので, 事がうまく運ばばこれで良いはず).

このように定数を決めた後の不等式 (5.2.6) と (5.2.7) は

$$S_{x,y}^{(\epsilon)} - C_{x,y}^{(\epsilon)} \leq -\frac{\lambda_\epsilon}{2} \{S_{0,0}^{(\epsilon)} - C_{0,0}^{(\epsilon)}\} \left(C^{(\epsilon)} * S^{(\epsilon)} \right)_{x,y} + \frac{\lambda_\epsilon^2}{6} \sum_{z,w} C_{x,z}^{(\epsilon)} \left[\{S_{z,w}^{(\epsilon)}\}^3 - \delta_{z,w} \sum_w \{C_{0,w}^{(\epsilon)}\}^3 \right] S_{w,y}^{(\epsilon)} \quad (5.2.15)$$

および

$$S_{x,y}^{(\epsilon)} - C_{x,y}^{(\epsilon)} \geq (\text{上の右辺}) - \frac{\lambda_\epsilon^3}{4} \sum_{u,v,w} C_{x,v}^{(\epsilon)} \{S_{v,u}^{(\epsilon)}\}^2 \{S_{u,w}^{(\epsilon)}\}^2 S_{v,w}^{(\epsilon)} S_{w,y}^{(\epsilon)} \quad (5.2.16)$$

となる. 今度は, もし $S^{(\epsilon)} \approx C^{(\epsilon)}$ であっても 矛盾はない. $\epsilon \downarrow 0$ で発散しそうなところは μ_ϵ をうまくとって消してあるので, (少なくとも通常の摂動論で計算すると) 不等式の右辺は実際に $O(\lambda)$ である可能性が高い.

5.2.4 不等式を解く

以上の議論を厳密に行って $S^{(\epsilon)} \approx C^{(\epsilon)}$ を証明するため, Brydges, Fröhlich, Sokal は以下のように巧妙に議論した. まず, $S_{x,y}^{(\epsilon)}$ と $C_{x,y}^{(\epsilon)}$ の差を計るため, 格子 $\epsilon\mathbb{Z}^d$ 上の関数 $f(x)$ に対して, 以下のノルムを定義す

る⁵⁶ :

$$\|f\| := \|f\|_1 + \|f\|_\infty = \epsilon^d \sum_x |f(x)| + \sup_x |f(x)| \quad (5.2.17)$$

そして、以下の命題を証明する :

命題 5.2.1 上で決めたようにパラメーターをとる. $E_{x,y}^{(\epsilon)} := S_{x,y}^{(\epsilon)} - C_{x,y}^{(\epsilon)}$ に対して, ある適当な非負の係数をもった多項式 P_1, P_2, P_3 を用いて

$$\|E^{(\epsilon)}\| \leq \sum_{n=1}^3 \lambda^n P_n(\|E^{(\epsilon)}\|) \quad (5.2.18)$$

と押さえる事ができる. さらに P_1 は定数項を持たない. なお, この多項式 P_1, P_2, P_3 は ϵ に依存しない形で選ぶ事ができる (これがミソ).

(証明のアイデア) 上の不等式 (5.2.15) と (5.2.16) の両辺の $\|\cdot\|$ をとり, 右辺には $S^{(\epsilon)} = C^{(\epsilon)} + E^{(\epsilon)}$ を代入して, ひたすらノルムの計算を行う. こうすると右辺には $C^{(\epsilon)}$ と $E^{(\epsilon)}$ しか出てこないし, $C^{(\epsilon)}$ の具体的表式もあるから, (ちょっとしんどいけど) 計算は可能だ. \square

命題 5.2.2 上で決めたようにパラメーターをとる. ある (小さな) 正の数 λ_0 と正の定数 c_1 が存在して, $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ である限り,

$$\|S^{(\epsilon)} - C^{(\epsilon)}\| = \|E^{(\epsilon)}\| \leq c_1 \lambda^2 \quad (5.2.19)$$

がなりたつ. c_1 の値は ϵ にはよらない.

(証明のアイデア) ここが非常に巧妙なところだ. λ_0 を, 命題 5.2.1 の多項式を用いて,

$$\sum_{n=1}^3 \lambda_0^n P_n(2) \leq 1 \quad (5.2.20)$$

となるようにとってみよう. もし $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ なら命題 5.2.1 によって

$$\|E^{(\epsilon)}\| \leq 2 \quad \implies \quad \|E^{(\epsilon)}\| \leq 1 \quad (5.2.21)$$

がなりたつ. つまり, $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ なら $\|E^{(\epsilon)}\|$ の値は区間 $(1, 2]$ には存在できないことがわかった.

さて, $\epsilon > 0$ を固定して考えると, $\|E^{(\epsilon)}\|$ は λ の連続関数である. 更に, $\lambda = 0$ ではゼロである. λ をゼロから増やして行くと, $\|E^{(\epsilon)}\|$ は正になるだろう. しかし (5.2.21) により, $\lambda \leq \lambda_0$ である限りは, その値は 1 を超える事はない. よって $\lambda \leq \lambda_0$ である限り

$$\|E^{(\epsilon)}\| \leq \sum_{n=1}^3 \lambda^n P_n(1) \leq c_0 \lambda^2 \quad (5.2.22)$$

が出る. (最後のところでは P_1 が定数項を持たない事を用いた. また P_n が ϵ によらないので, c_0 も ϵ によらない.) \square

5.2.5 連続極限の存在とその評価

ここまでくれば簡単だ. 命題 5.2.2 は ϵ について一様な評価であるから, $\epsilon \downarrow 0$ に際しても, この評価は成立したままである. $C^{(\epsilon)}$ の方は $\epsilon \downarrow 0$ に際して良い函数に行く (ように我々はパラメーターをとった). 従って, この良い函数 $C^{(\infty)}$ とかなり近いところに $S^{(\infty)}$ が存在することがわかる ($\|S^{(\infty)} - C^{(\infty)}\| \leq c_0 \lambda^2$).

さらに, $u^{(4)}$ に対するスケルトン不等式を用いれば, 摂動論で予言されるように $u^{(4)} < 0$ が言える. これがゼロでないから, 連続極限は自由場ではない. つまり, 相互作用のある場の理論が作れた事になる.

⁵⁶並進対称性のおかげで, $S^{(\epsilon)}$ も $C^{(\epsilon)}$ も, その引数の差だけの一変数函数であるので, このノルムで十分

6 Triviality の問題 —— φ_d^4 理論 ($d \geq 4$)

最後に、場の理論の「構成」ではないが、関連した非常に面白い問題、 φ^4 の triviality の問題を考える。

6.1 φ_d^4 の Triviality とは？

φ^4 型の場の理論は、ガウス場の次に簡単な場の理論のモデルとして、場の理論の教科書には必ず載っているものである。もちろん、これを厳密に解析する事は（この講義のテーマでもあるように）なかなか難しいが、厳密でないレベルでは、いわゆる「摂動論」を用いて近似計算を行う事ができる。この摂動論の計算も、たいていの場の理論の教科書には練習問題として載っているものである。

さて、摂動論の結果は大まかに次のようにまとめられる⁵⁷。

- 摂動計算を行うと、色々と発散がでてくる。この発散を「くりこみ理論」によって除去し、意味のある答えを得ようとするのだが、
- $d > 4$ では理論は「くりこみ不可能」であって、意味のある摂動計算を作るのは難しい。
- $d < 4$ では理論は「超くりこみ可能」であって、有限個 (λ^2 のオーダーまで) のくりこみ項を加えると摂動論がうまく展開できる。結果は相互作用のある理論である。
- $d = 4$ では理論は「くりこみ可能」であって、3種類 (λ の次数で言えば無限次まで) のくりこみ項により、摂動論がうまく展開できる。結果は相互作用のある理論である。

一見これでうまく行ったように思えたのだが、 $d = 4$ の結果は正しくないのでは？という見方が1970年代から一般的になった。特に

これまでに説明して来たような格子正則化によって、 d 次元格子上の φ^4 モデルを考え、その高温相からの連続極限として⁵⁸Schwinger 関数を定義して場の理論を構成した場合、 $d \geq 4$ ではできてくる理論はすべて「相互作用のない」もの、つまり自由場かそれらの重ね合わせであろう

ということが段々と信じられるようになってきた。摂動論（+くりこみ理論）ではちゃんと相互作用のある場の理論ができるという結果が得られているだけに、これは由々しき問題である⁵⁹。

これが（少し狭い意味での） φ^4 理論の triviality である⁶⁰。

以下ではこの triviality について、くりこみ群を用いたものの方と相関不等式を用いた解析を少し紹介する。

6.2 相関不等式による解析

以下、相関不等式を用いた解析を紹介する。

⁵⁷以下の箇条書きはある程度の知識がある人のためのものである。これがわからなくても、以下の話には困らない

⁵⁸「高温相からの」連続極限とは、これまでも考えて来たように、 φ^4 スピン系のパラメーターは系が高温相にあるように保ちつつ、連続極限をとる事を意味する。もちろん、この場合、極限では（これまで通り）臨界点に無限に近づいて良い

⁵⁹もちろん、ここに何か矛盾がある訳ではない。摂動論+くりこみ理論は数学的には全くのナンセンスと言っても良いから、この予想が正しくても、それは単に「そのような無茶苦茶な計算を信じてはいけません」という教訓がえられるだけである。とはいえ、大抵の「物理学者の」理論は、数学的には無茶苦茶に見えても、結果は正しい事が多い。その意味で、このように摂動論が破綻する事は、非常に興味深い例と言える

⁶⁰Triviality は「自明性」と訳される事も多いが、ここでの trivial は数学での「自明」の意味では、もちろん、ない。なので、この講義では自明性という言葉は避けて、triviality を使う

6.2.1 Step 1. 相互作用の有無の判定を、連結 4 点関数の条件に帰着する

まず、「相互作用のある、ない」をはっきりさせよう⁶¹。

何度か述べたようにガウス場（自由場）の理論は全ての次元で存在するが、これは面白くない。というのも Wick の定理 (3.1.26) によって $2n$ 点関数が 2 点関数の積の和で ($n \geq 2$)

$$S_{2n}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{2n}) = \sum_p \prod_{j=1}^n S_2(\tilde{x}_{p(j)}, \tilde{x}_{p(j+n)}) \quad (6.2.1)$$

のように書いてしまうからである（ここで p は 1 から $2n$ までの添字をふたつずつのペアに分ける全ての分け方について和をとる）。この場合、(本来、この場が表すはずの) 粒子の散乱などが一切起こらない理論になっている。逆に (6.2.1) が全ての $n \geq 2$ と、すべての (互いに等しくない) 点 $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{2n}$ で成り立つならば、この理論は (一般化された) ガウス場の理論と同等であり、「相互作用がない」ことになる。

そこで、相互作用があるかどうかは、 $2n$ 点関数そのものではなく、(6.2.1) が全ての $n \geq 2$ と、すべての (互いに等しくない) 点 $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{2n}$ で成り立つか否かで判断することとする。

さて、上の判断基準は「すべての」 $n \geq 2$ で成り立つかどうかということで、これが本当に成り立つか否かを調べるのがそこそこ大変に思える。ところが⁶²1975年に Newman が、上の判断をするためには、4 点関数だけを見れば十分である事を証明した。Newman の定理を述べるために、(3.1.11) の $u^{(4)}$ の連続時空版として

$$\begin{aligned} u_{\text{cont}}^{(4)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4) &:= S_4(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4) - S_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) S_2(\tilde{x}_3, \tilde{x}_4) \\ &\quad - S_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_3) S_2(\tilde{x}_2, \tilde{x}_4) - S_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_4) S_2(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

を定義し、やはり**連結 4 点関数**と呼ぶ。このとき、Newman の定理は以下を主張する [19]：

命題 6.2.1 これまでに述べて来たように、 φ^4 モデルまたはイジングモデルから連続極限をとって Schwinger 関数を得たとせよ。ただし、連続極限は系が「高温相」にあるように保ちつつ、とる。このとき、もし連結 4 点関数が恒等的にゼロならば、つまり

$$u_{\text{cont}}^{(4)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4) \equiv 0 \quad (6.2.3)$$

ならば、この理論は一般化されたガウス場である。

これで連結 4 点関数を解析すれば、その理論が trivial かどうか判定できる事になった⁶³。これは我々の問題を (少なくとも心理的には) 大幅に簡単にしてくれる。

6.2.2 Step 2. 「くりこまれた結合定数」の導入

この小節では**無次元のくりこまれた結合定数 (dimensionless renormalized coupling constant)** g_{ren} という量を用いて、連結 4 点関数を解析する方法を紹介する⁶⁴。

この量は Schwinger 関数を用いて

$$g_{\text{ren}} := (m_{\text{phys}})^d \times \frac{- \int d^d \tilde{x}_1 \int d^d \tilde{x}_2 \int d^d \tilde{x}_3 u_{\text{cont}}^{(4)}(0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)}{\left[\int d^d \tilde{x} S_2(0, \tilde{x}) \right]^2} \quad (6.2.4)$$

⁶¹以下、本来はミンコフスキー空間で話をすべきだが、OS の再構成定理によってミンコフスキー空間には戻れる場合を考慮するので、ユークリッド空間での Schwinger 関数で議論する

⁶²後述の相関不等式を用いる方法で直接示す事も可能だが

⁶³実は Newman の定理には続きがある「4 点、6 点、8 点などの高次の連結相関関数のどれか一つがゼロであれば、他の連結相関関数も全てゼロになり、理論は一般化されたガウス場になる」。この続きまで用いれば、連結 4 点関数だけを見れば良い事が結論できる

⁶⁴この量が使えらる範囲は少し狭いが、解析のアイデアはより簡単なので、まずはこちらを紹介する

として定義されるものである。ここで m_{phys} とは、連続時空での「質量」に相当する量で、その定義は

$$m_{\text{phys}} := - \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\log S_2(0, \ell \mathbf{e}_1)}{\ell} \quad (6.2.5)$$

である —— (3.5.13) では格子系 (1 格子間隔を単位にした) 相関距離を定義したが、ここでは連続時空での (我々の世界での単位を元にした) 距離でもって、(3.5.13) の類似物を考えた。ただし、 m_{phys} は相関距離そのものではなく、その逆数に相当している。また、 $m_{\text{phys}} > 0$ ならば (6.2.4) の分母の積分も有限であろうから、そのような場合には g_{ren} はきちんと定義できていると期待できる。なお、Lebowitz の不等式 (3.2.3) から、 g_{ren} は非負であることを注意しておく。

さて、 g_{ren} の良いところは、連続時空をとる前の格子系での対応物があり、それがかなり扱いやすい形になっている事である。今、連続極限をとるちよつと手前で、 g_{ren} に対応する量を書き下してみよう。格子間隔を ϵ とし、 ϵ 依存性も込めて、その量を $g_{\text{ren}, \epsilon}$ と表す事にする。これは格子間隔 ϵ での Schwinger 函数 $S_\epsilon(\cdot)$ と、この格子での相関距離で表す事ができる。

相関距離については、これまで何回もでてきた $\tilde{x} = \epsilon x$ の関係から⁶⁵

$$m_{\text{phys}} \epsilon \xi = 1 \quad (6.2.6)$$

の関係がある。

また、相関函数については、単に $S_{2n, \epsilon}(\cdot)$ の極限が $S_{2n}(\cdot)$ であるから

$$\int d^d \tilde{x} S_2(0, \tilde{x}) \quad \text{は} \quad \epsilon^d \sum_x S_{2, \epsilon}(0, \tilde{x}) = \epsilon^d \sum_x \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_\epsilon \quad (6.2.7)$$

であると、また

$$\int d^d \tilde{x}_1 \int d^d \tilde{x}_2 \int d^d \tilde{x}_3 u_{\text{cont}}^{(4)}(0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \quad \text{は} \quad e^{3d} \sum_{x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}^d} u_\epsilon^{(4)}(0, x_1, x_2, x_3) \quad (6.2.8)$$

と思うべきである —— ここで ($\tilde{x}_j = \epsilon x_j$ の了解の下で)

$$\begin{aligned} u_\epsilon^{(4)}(0, x_1, x_2, x_3) &= \langle \varphi_0 \varphi_{x_1} \varphi_{x_2} \varphi_{x_3} \rangle_\epsilon - \langle \varphi_0 \varphi_{x_1} \rangle_\epsilon \langle \varphi_{x_2} \varphi_{x_3} \rangle_\epsilon \\ &\quad - \langle \varphi_0 \varphi_{x_2} \rangle_\epsilon \langle \varphi_{x_1} \varphi_{x_3} \rangle_\epsilon - \langle \varphi_0 \varphi_{x_3} \rangle_\epsilon \langle \varphi_{x_1} \varphi_{x_2} \rangle_\epsilon \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

は (3.1.11) で定義した連結 4 点函数であり、連続時空での $u^{(4)}$ の対応物である。

これらの関係式を (6.2.4) に代入すると、 ϵ のべきは分母で綺麗にキャンセルして

$$g_{\text{ren}, \epsilon} = \frac{- \sum_{x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}^d} u_\epsilon^{(4)}(0, x_1, x_2, x_3)}{(\xi_\epsilon)^d \left[\int d^d \tilde{x} \langle \varphi_0 \varphi_x \rangle_\epsilon \right]^2} = \frac{-\bar{u}^{(4)}}{(\chi_\epsilon)^2 (\xi_\epsilon)^d} \quad (6.2.10)$$

となる。最後のところでは分母の和は既に出てきた格子系の帯磁率に他ならないことを用い、分子の和を $\bar{u}^{(4)}$ と略記した。

さて、この右辺の量は (連続極限等は忘れて) 純粋に格子スピン系での量と解釈できる。さらに都合の良い事に、分母と分子に現れる φ の次数が等しい (共に 4) のので、この量は場の量の規格化にも影響されない。(それを反映して、この量は無次元量になっている。これが名前の由来である)。となると、純粋にスピン系の問題として、臨界点の近傍でこの量がどうなるかを調べれば良くなる。これもかなりの (少なくとも精神的には) 簡単化である。

⁶⁵ ξ そのものは格子間隔を単位にして測るが、考えている系が格子間隔 ϵ に相当するパラメーターを持っている (それだけ臨界点に近い) ことを表現するため、 ϵ の添字をつけ

6.2.3 Step 3. 「くりこまれた結合定数」の解析

さて、このように問題を「くりこまれた結合定数」の解析までは落とし込んだのだが、もちろん、ここから先が真の難関である。実際、これまでに述べたような事は 1975 年頃までに得られていたが、 $g_{\text{ren},\epsilon}$ がきちんと解析されるまでには更に数年を要した。

さて、Lebowitz 不等式 (3.2.3) から $g_{\text{ren},\epsilon}$ は非負なので、これを更に解析するには、 $u^{(4)}$ を下から押さえる有用な不等式が必要である。そのような不等式の最初のものが Aizenman[4, 5] と Fröhlich[9] によって得られた不等式 (3.2.8) である。再掲すると

Proposition 6.2.2 (Aizenman の不等式, Fröhlich の不等式) イジングおよび φ^4 モデルに対しては、(3.2.6) の書き方を用いると

$$u^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq - \sum_z \langle \varphi_{x_1} \varphi_z \rangle \langle \varphi_{x_3} \varphi_z \rangle \left\{ \delta_{z,x_2} + \sum_{z_1} J_{z,z_1} \langle \varphi_{z_1} \varphi_{x_2} \rangle \right\} \left\{ \delta_{z,x_4} + \sum_{z_2} J_{z,z_2} \langle \varphi_{z_2} \varphi_{x_4} \rangle \right\} - (2 \text{ permutations}) \quad (6.2.11)$$

が成り立つ。

これを認めて $g_{\text{ren},\epsilon}$ を計算しよう。まず $u^{(4)}$ の和を計算すると (うるさいから添字 ϵ は略)

$$\begin{aligned} - \sum_{x_2, x_3, x_4} u^{(4)}(0, x_2, x_3, x_4) &\leq 3 \sum_{x_2, x_3, x_4} \sum_z \langle \varphi_0 \varphi_z \rangle \langle \varphi_{x_3} \varphi_z \rangle \left\{ \delta_{z,x_2} + \sum_{z_1} J_{z,z_1} \langle \varphi_{z_1} \varphi_{x_2} \rangle \right\} \\ &\quad \times \left\{ \delta_{z,x_4} + \sum_{z_2} J_{z,z_2} \langle \varphi_{z_2} \varphi_{x_4} \rangle \right\} \\ &= 3(\chi^2 + 4dJ\chi^3 + (2dJ)^2\chi^4) \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

となるので、

$$g_{\text{ren},\epsilon} \leq \frac{3\{\chi^2 + 4dJ\chi^3 + (2dJ)^2\chi^4\}}{\chi^2 \xi^d} = \frac{3\{1 + 4dJ\chi + (2dJ)^2\chi^2\}}{\xi^d} \quad (6.2.13)$$

を得る。 J は連続極限をとって行く際にうまく調節しているはずで、一見、ここから先には行けないように見える。ところが非常に好都合なことに、以下の不等式が鏡映正值性から導かれる [23] :

$$J\chi \leq \text{const.} \xi^2 \quad (6.2.14)$$

(ここで const は次元のみに依存する定数)。これを (6.2.13) の右辺に用いると、奇跡的に J, χ が消えて

$$g_{\text{ren},\epsilon} \leq \frac{3\{1 + 4dJ\chi + (2dJ)^2\chi^2\}}{\xi^d} \leq \frac{3 + c\xi^2 + c'\xi^4}{\xi^d} \quad (6.2.15)$$

を得る (c, c' は次元のみによる正の定数)。

さて、今我々は連続極限をとりたいので、 $\epsilon \downarrow 0$ では、元のスピン系をその臨界点に近づけたい。つまり、 $\xi \uparrow \infty$ となるようにしたい。ところが、 $\xi \uparrow \infty$ の場合、 $d > 4$ なら、上の右辺はゼロに行く。つまり連続極限での g_{ren} はゼロである !!

以上をまとめておこう。

定理 6.2.3 $d > 4$ では連続極限において、くりこまれた結合定数 g_{ren} はゼロである。よって (これまでの議論より) 連続極限は一般化された自由場しかない。(ただし、連続極限をとる際、元のスピン系を常に高温相におく条件の下で証明した事は覚えておこう。)

以上で $d > 4$ の場合 (高温相から臨界点に近づけ、かつ極限の理論の質量が正である、との制約付きではあるが)、 φ^4 スピン系の連続極限は trivial であることが厳密に示された。

6.2.4 4次元での状況は？

肝心の $d = 4$ はどうであろうか？ $d > 4$ が解決されて 30 年以上立つが、未だに未解決のママである。いくつか部分的な結果はあるものの、満足のいく状況にはほど遠い。講義当日はこの辺りの事情にももう少し踏み込みたいと考えている。1992 年時点での状況は⁶⁶ Fernández, Fröhlich, Sokal による書物 [2] の 15.1 節, 15.2 節にある。

6.3 くりこみ群による描像

さて、 φ^4 の triviality はくりこみ群の見方からはどのように理解できるだろうか？

これはなかなか面白い問題であるが、予稿のメ切が来てしまった。ここは最終日に黒板で説明する事にしよう。

なお、[17] では、Hierarchical model という、非常に簡単化されたモデルに対して、くりこみ群の描像を用いて、この限定されたモデルの triviality を示している。

A 簡単かつ不完全な文献案内

いくつかの文献は本文中でも挙げたが、最後に全般的なものを、思いつくままに挙げておく。

- この講義全般の話題に関して、Sokal の博士論文 [23] は一読の価値がある。原は大学院生時代、これを読んで大きな影響を受けた。
- 公理的場の理論については、[24, 26] が標準的な教科書である。また、[3] にも構成論に必要な事が詳しくまとめられている。
- 構成的場の量子論については、上記の [3] がまとまっている。この講義により近い taste のものとして、構成的場の理論および統計力学についての大部の教科書 [2] を奨める。
- 統計力学系の厳密な解析については上記 [2, 3] などを参照。田崎晴明氏と原の共著 [27] も近刊予定である。Simon の本 [1] の第 2 巻はいつ出るのだろうか...
- くりこみ群については、[8] (特に 3,4 章) などを参照。また、[25] はくりこみ群に関する古典的な文献である。

謝辞

この講義ノートの母体となったのは、いくつかの大学での講義ノートです。これらの講義に出席して下さった方、共同研究者の方々、私と議論して下さいました全ての方に感謝します。(言うまでもないことですが、このノートに存在する間違いに関しては、私に全責任があります。) また講義の機会を下さった夏の学校の organizers の方々に感謝いたします。

参考文献

- [1] B. Simon. *The Statistical Mechanics of Lattice Gases. vol.1*. Princeton University Press, Princeton, (1993).
- [2] R. Fernández, J. Fröhlich, and A.D. Sokal. *Random Walks, Critical Phenomena, and Triviality in Quantum Field Theory*. Springer, Berlin, (1992).

⁶⁶今もそんなに状況に違いはないのだが...

- [3] 江沢洋, 新井朝雄. 場の理論と統計力学. 日本評論社, (1988).
- [4] M. Aizenman. Proof of triviality of ϕ^4 field theory and some mean-field features of Ising models for $d > 4$. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. **47**, pp. 1–4, (1981).
- [5] M. Aizenman. Geometric analysis of φ^4 fields and Ising models, Parts I and II. *Commun. Math. Phys.*, Vol. **86**, pp. 1–48, (1982).
- [6] D.C. Brydges, J. Fröhlich, and A.D. Sokal. A new proof of the existence and nontriviality of the continuum φ_2^4 and φ_3^4 quantum field theories. *Commun. Math. Phys.*, Vol. **91**, pp. 141–186, (1983).
- [7] D.C. Brydges, J. Fröhlich, and A.D. Sokal. The random walk representation of classical spin systems and correlation inequalities. II. The skeleton inequalities. *Commun. Math. Phys.*, Vol. **91**, pp. 117–139, (1983).
- [8] H. Ezawa, M. Suzuki, H. Tasaki, and Watanabe. くりこみ群の方法. 岩波, 東京, (1994). 現代の物理学 13.
- [9] J. Fröhlich. On the triviality of φ_d^4 theories and the approach to the critical point in $d \geq 4$ dimensions. *Nucl. Phys.*, Vol. **B200** [FS4], pp. 281–296, (1982).
- [10] J. Fröhlich, R. Israel, E.H. Lieb, and B. Simon. Phase transitions and reflection positivity. I. General theory and long range lattice models. *Commun. Math. Phys.*, Vol. **62**, pp. 1–34, (1978).
- [11] J. Fröhlich, B. Simon, and T. Spencer. Infrared bounds, phase transitions, and continuous symmetry breaking. *Commun. Math. Phys.*, Vol. **50**, pp. 79–95, (1976).
- [12] K. Gawędzki and A. Kupiainen. Massless lattice φ_4^4 theory: Rigorous control of a renormalizable asymptotically free model. *Commun. Math. Phys.*, Vol. **99**, pp. 199–252, (1985).
- [13] K. Gawędzki and A. Kupiainen. Asymptotic freedom beyond perturbation theory. In K. Osterwalder and R. Stora, editors, *Critical Phenomena, Random Systems, Gauge Theories*, Amsterdam, (1986). North-Holland. Les Houches 1984.
- [14] J. Glimm and A. Jaffe. Remark on the existence of φ_4^4 . *Phys. Rev. Lett.*, Vol. **33**, pp. 440–442, (1974).
- [15] R.B. Griffiths. Correlations in Ising ferromagnets II. External magnetic fields. *J. Math. Phys.*, Vol. **8**, pp. 484–489, (1967).
- [16] R.B. Griffiths. Correlations in Ising ferromagnets. III. *Commun. Math. Phys.*, Vol. **6**, pp. 121–127, (1967).
- [17] T. Hara, T. Hattori, and H. Watanabe. Triviality of hierarchical Ising model in four dimensions. *Commun. Math. Phys.*, Vol. **220**, pp. 13–40, (2001).
- [18] A. Messager and S. Miracle-Solé. Correlation functions and boundary conditions in the Ising ferromagnet. *J. Statist. Phys.*, Vol. **17**, pp. 245–262, (1977).
- [19] C.M. Newman. Inequalities for Ising models and field theories which obey the Lee-Yang theorem. *Commun. Math. Phys.*, Vol. **41**, pp. 1–9, (1975).
- [20] K. Osterwalder and R. Schrader. Axioms for Euclidean Green’s functions. *Commun. Math. Phys.*, Vol. **31**, pp. 83–112, (1973).

- [21] K. Osterwalder and R. Schrader. Axioms for Euclidean Green's Functions. II. *Commun. Math. Phys.*, Vol. **42**, pp. 281–305, (1975).
- [22] B. Simon. Correlation inequalities and the decay of correlations in ferromagnets. *Commun. Math. Phys.*, Vol. **77**, pp. 111–126, (1980).
- [23] A.D. Sokal. An alternate constructive approach to the φ_3^4 quantum field theory, and a possible destructive approach to φ_4^4 . *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. **37**, pp. 317–398, (1982).
- [24] R.F. Streater and A.S. Wightman. *PCT, Spin and Statistics, and All That*. Benjamin, (1964).
- [25] K. Wilson and J. Kogut. The renormalization group and the ϵ expansion. *Phys. Rep.*, Vol. **12**, pp. 75–200, (1974).
- [26] ボゴリューボフ, ログノフ, トドロフ. 場の量子論の数学的方法. 東京図書, (1972).
- [27] 田崎晴明, 原隆. 相転移と臨界現象の数理. 共立出版, (近刊予定) .