

2012年12月22日

---

## 確率論と数理物理学\*1

---

原 隆

九州大学数理学研究院

e-mail: [hara@math.kyushu-u.ac.jp](mailto:hara@math.kyushu-u.ac.jp)  
<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/>

(「原隆 九大」で検索)

\*1 2012年12月22日, 福岡数理の翼

## 概要

確率論における極限定理（大数の法則，中心極限定理）は非常に一般に成り立つ，普遍性の高いものです．この講義では，まずこのような極限定理を吟味します．次に，中心極限定理から理解できるランダムウォークの世界を覗いてみます．最後に，これらの極限定理を更に発展させたものが，物理（統計力学）における臨界現象などで普遍的に見られる（ようである）ことを概観し，数学と物理の接点の一つを紹介します．

# 目次

---

1	はじめに：考える問題	3
1.1	記号の約束と「オーダー」の概念 . . . . .	6
2	コイン投げの数理：大数の法則と中心極限定理	7
2.1	実際にやってみました . . . . .	7
2.2	少し計算する. $N$ 回のうちに $m$ 回表になる確率は? . . . . .	8
2.3	$N$ が大きくなったら? I. 大数の法則 . . . . .	20
2.4	$N$ が大きくなったら? II. 中心極限定理 . . . . .	22
2.5	大数の法則の“証明” . . . . .	26
2.6	中心極限定理の“説明” . . . . .	36
2.7	この章のまとめ . . . . .	46
3	ランダムウォーク	47
3.1	1次元単純ランダムウォーク . . . . .	47
3.2	高次元単純ランダムウォーク . . . . .	52

3.3	3章のまとめ . . . . .	56
4	臨界現象へ	57
4.1	自己回避ランダムウォーク (SAW) . . . . .	58
4.2	パーコレーション . . . . .	62
4.3	磁石のモデル (スピン系) . . . . .	67
4.4	まとめ：臨界現象の特徴 . . . . .	71

# 1 はじめに：考える問題

---

- ・「確率」はもはや日常用語 — 「今日の降水確率は...」
- ・初歩ではいろいろな確率を計算することに重きが置かれる。

しかし、この講義では**確率に潜む規則性**を探る。

特に、たくさんの試行を繰り返した場合の結果を予言する**大数の法則**、**中心極限定理**などにまず、焦点を当てる。

その後、ランダムウォークに進み、物理の世界とのつながりを見つけ、物理の世界で普遍的に見られる「**臨界現象**」に少しだけ触れる。

確率の絡んだ現象の例：

- a. 物理や化学の実験では「測定には**誤差**が付き物だから何回か測定して測定値の平均をとるように」と教わる。この根拠は何なのだろう？
- b. ある学校の一学年の男子をとりだし、身長を測定してその結果をヒストグラムにした（横軸に身長、縦軸にその身長の人が何人くらいいるかを書く）。その結果はなだらかなベルのようなカーブになるだろう。これは身長に限らない — 体重についても似たようなグラフが出るだろう。

またこの学年の生徒の数学の期末テストの成績についても、似たような結果になるかもしれない。何が原因でこうなるのか？

- c. **拡散現象**. 容器に臭素の結晶と空気を入れ、密閉して放置すると、だんだんと臭素が容器中に拡がっていく。これを拡散現象と言うが、臭素の色がついた部分は、時間とともにどのように拡がっていくだろうか？
- c'. **ブラウン運動**. たばこの煙などを顕微鏡で見ると、煙の粒子がフラフラと動いているのが見える。煙の粒子に空気の分子がいろいろな方向からぶつかって、不規則な運動をしているのだが、この粒子は時間とともに、どのように動いていくだろうか？
- c''. **気体の密度**. 空気は酸素と窒素の分子からできている。これらの分子は熱運動で激しく動いているはずだが、気体の密度はいつも一定に見える。これはなぜか？
- d. **株価の変動**. 株価は日によって（又、同じ日のうちでも時間によって）不規則に動いている。非常に不規則に見えるのだが、ある程度ならして見ると、何らかの規則性が見えるようにも思う。
- e. **溶媒中の高分子**. DNA のように鎖状になった高分子を溶媒に入れると、高分子は周りの溶媒の分子との熱運動でいろいろと形を変え、ある

程度クシャクシャにまるまった形になる。このとき、高分子の長さ  
と高分子の拡がり（丸まった高分子の端から端までの長さ）には、  
どのような関係があるか？

f. **統計力学の臨界現象**。磁石を熱していくとある温度 ( $T_c$ ) 以上では磁石  
ではなくなる。  $T_c$  付近ではどんな現象が見られるのか？実は、このよ  
うな現象は磁石に限らず、いろいろな物質で見られるものである。

a と b は「大数の法則」「中心極限定理」という確率論の重要な定理、

c と d は確率論の**ランダムウォーク（ブラウン運動）**

e, f は統計力学の**未解決問題**の一つ — ランダムウォークや中心極限定理  
と密接な関連。

この講義では上のような現象を理想化・単純化した状況を考えることで、  
このような現象がなぜ見られるのか、その一般的原理を理解（？）するこ  
とを目的とします。

## 1.1 記号の約束と「オーダー」の概念

---

不等号： $a \leq b$  は  $a \leqq b$  と、 $a \geq b$  は  $a \geqq b$  と同じ意味。

和の記号： $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$  を  $\sum_{i=1}^n a_i$  と書く。

$N \rightarrow \infty$ ：「 $N$  が限りなく大きくなる極限」の概念：

「 $N$  がどんどんと限りなく大きくなる」ことを数学では

「 $N$  が無限大（の極限）に行く」と言い、 $N \rightarrow \infty$  と書く。

「オーダー」の概念：

$f(N)$  を正の整数  $N$  の関数とする（例： $f(N) = N^2$ ,  $f(N) = \frac{2}{N}$ ）。  
 $N$  が大きくなっていったときに  $f(N)$  がどのくらいの速さで大きく（小さく）なるか、その主要部分を取り出して、「オーダー」という。

$f(N) = N^2$ ,  $g(N) = 5N^2$ ,  $h(N) = N^2/10$  は  $N^2$  のオーダー。  
 $p(N) = 2e^N$ ,  $q(N) = 10e^N$  は  $e^N$  のオーダー



## 2 コイン投げの数理：大数の法則と中心極限定理

10円玉を何回も投げた時，そのうちのどのくらいが表になるか？

直感：そりゃあ，投げた回数の半分くらいは表でしょ？ → 本当かな？

### 2.1 実際にやってみました

名古屋大学で2003年の夏に，高校生向け（約70人）に公開講座をしました．その際，実際に4回，コインを投げてもらいました．その結果（ $n$ 回表になった人は何人か）は以下の通り．

表の出た回数	0	1	2	3	4
その人数	10	18	20	18	3
人数／全人数	0.143	0.257	0.300	0.257	0.043

4回とも表であった人も，4回とも裏だった人もいます．これだけでは規則性はあまり見えていません．

## 2.2 少し計算する. $N$ 回のうちに $m$ 回表になる確率は?

計算しよう. 条件  $A$  が実現される確率を  $\mathbb{P}[A]$  と書く. 例えば

$\mathbb{P}[\text{コインを一回投げた結果が表}]$  は文字通り「コインを一回投げた結果が表」である確率のこと.

確率変数 (ランダムな数)  $X_i$  を定義する ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ):

$$X_i = \begin{cases} 1 & i \text{ 回目が表の時} \\ 0 & i \text{ 回目が裏の時} \end{cases} \quad (2.1)$$

1回目からの結果を並べて  $(X_1, X_2, X_3, X_4)$  などと書く.

例えば, 1回目から4回目まで表だけが出るのは  $(1, 1, 1, 1)$ .

$(1, 1, 0, 1)$  は3回目だけが裏で残りは表, の場合を表す.

**2つの重要な仮定**の下で, 確率を計算しよう.

**1つ目の仮定：**  $\mathbb{P}[\text{コインを1回投げた結果が表}] = p.$

ここで  $p$  は  $0 < p < 1$  なる決まった数. (普通は  $p = 1/2$ )

上の仮定はコインを一回投げた場合の確率を言っているだけで、2回以上投げた場合にどうなるかには新しい仮定が必要.

**2つ目の仮定：独立性**  $i$  回目の結果と  $j$  回目の結果の間には何の影響力も働いていない ( $i \neq j$  の場合).  $X_j$  で書くと ( $\epsilon, \eta = 0, 1$ ),

$$\mathbb{P}[X_i = \epsilon \text{ かつ } X_j = \eta] = \mathbb{P}[X_i = \epsilon] \mathbb{P}[X_j = \eta] \quad (2.2)$$

要するに、こちらでコイン投げの結果をコントロールできないということ. 同様の仮定を3回以上の結果についても要求する. (100回表が続いても、次に表の確率は上の  $p$ )

$\mathbb{P}[X_i = 1] = p, \mathbb{P}[X_i = 0] = 1 - p$  を代入して書き直すと

$$\mathbb{P}[X_1 = \epsilon_1, X_2 = \epsilon_2, \dots, X_N = \epsilon_N] = p^{(\text{表の回数})} (1 - p)^{(\text{裏の回数})} \quad (2.3)$$

となる。要するに、表が出る確率は  $p$ 、裏が出る確率は  $1 - p$  で、それを表と裏の回数分だけかければ良い。

では「 $N$  回投げたときに  $m$  回表が出る」確率は？  $N$  回中の表の回数：

$$S = S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N = \sum_{i=1}^N X_i = (\text{表の出た回数}) \quad (2.4)$$

を定義しておく。

$N = 1$  の時は仮定そのもので

$$\mathbb{P}[S_1 = 1] = p, \quad \mathbb{P}[S_1 = 0] = 1 - p \quad (2.5)$$

$N = 2$  の時、

$$\mathbb{P}[S_2 = 2] = p^2, \quad \mathbb{P}[S_2 = 0] = (1 - p)^2 \quad (2.6)$$

は両方とも表, 両方とも裏の場合である.  $S_2 = 1$  には,  $(1, 0)$  (初めに表, 次に裏) と  $(0, 1)$  (初めが裏, 次に表) の2通りの出方があり, どちらも確率は  $p(1 - p)$ . この2通りを足して,

$$\mathbb{P}[S_2 = 1] = 2p(1 - p) \quad (2.7)$$

$N = 3$  も同様に計算できる. 全部表, 全部裏は良いとして,  $S_3 = 2$  の場合を考えると, 110, 101, 011 の3通りの出方があり, それぞれの確率は  $p^2(1 - p)$ . 従って (全部表や全部裏, の場合も書くと),

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_3 = 3] &= p^3, & \mathbb{P}[S_3 = 2] &= 3p^2(1 - p), \\ \mathbb{P}[S_3 = 1] &= 3p(1 - p)^2, & \mathbb{P}[S_3 = 0] &= (1 - p)^3 \end{aligned} \quad (2.8)$$

では一般に 「 $N$  回投げて  $m$  回表」の確率は? 何通りの出方があるか  
→ 「 $N$  個の結果の中で丁度  $m$  個だけ  $X_i = 1$  となる」なり方の個数.  
これを  $N$  個から  $m$  個をとる組み合わせの数とって,  ${}_N C_m$  で表す.

上から  ${}_3C_3 = {}_3C_0 = 1$ ,  ${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$  などがわかった. 一般には

$${}_N C_m = \frac{N!}{m!(N-m)!} \quad (2.9)$$

である. ここで

$$N! = N \times (N-1) \times (N-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 \quad (N \text{ の階乗})$$

最終的に

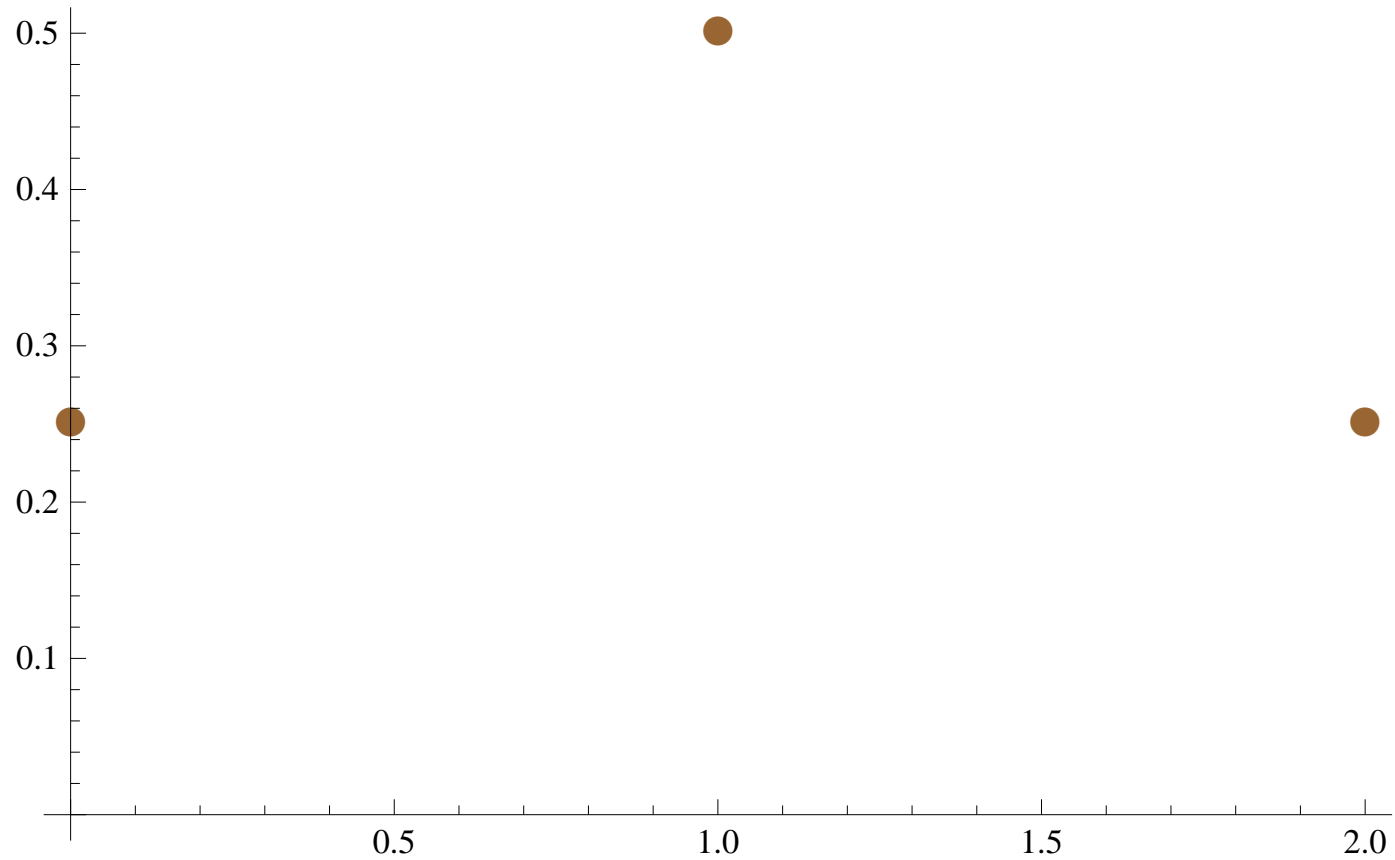
$$\mathbb{P}[S_N = m] = {}_N C_m p^m (1-p)^{N-m} \quad (2.10)$$

が得られる. さてさて, 名古屋大の公開講座での結果と比較すると

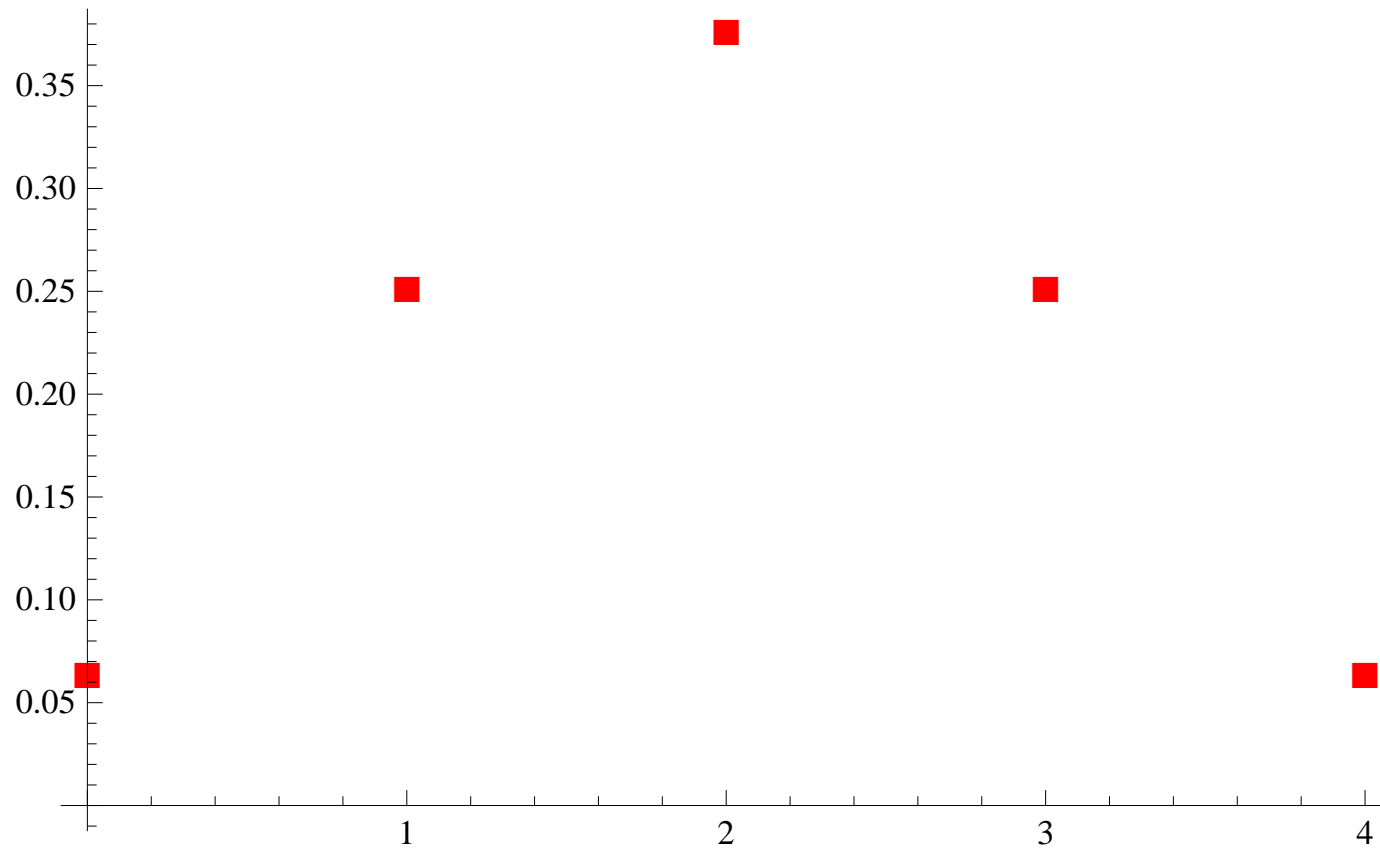
表の出た回数 $m$	0	1	2	3	4
その人数	10	18	20	18	3
人数/全人数	0.143	0.257	0.300	0.257	0.043
確率 $\mathbb{P}[S_4 = m]$	0.0625	0.250	0.375	0.250	0.0625

当たらずといえども遠からず.

$p = \frac{1}{2}$  の場合の  $\mathbb{P}[S_N = m]$  を計算したグラフが下図  
(0)  $N = 2$

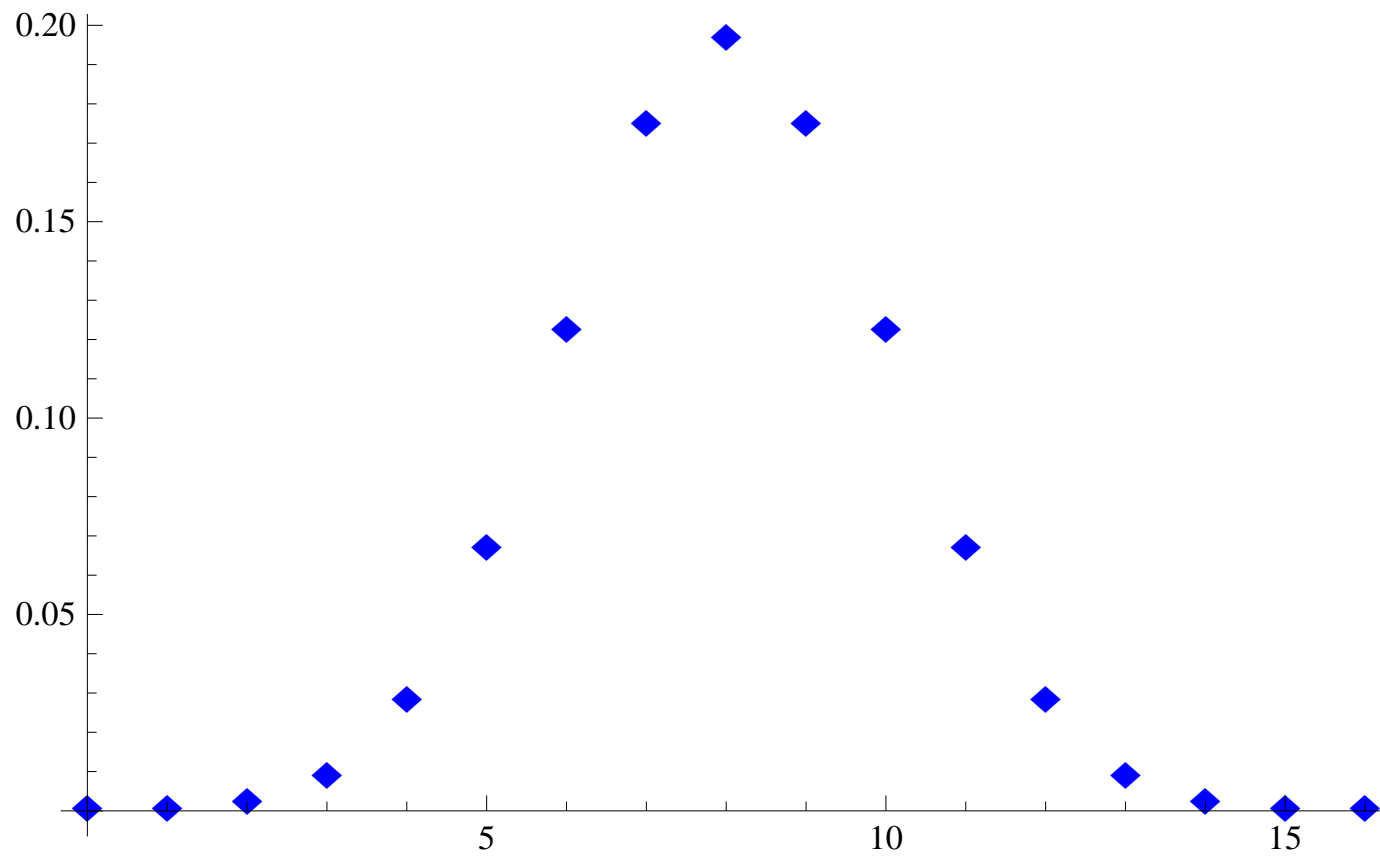


$N = 4$

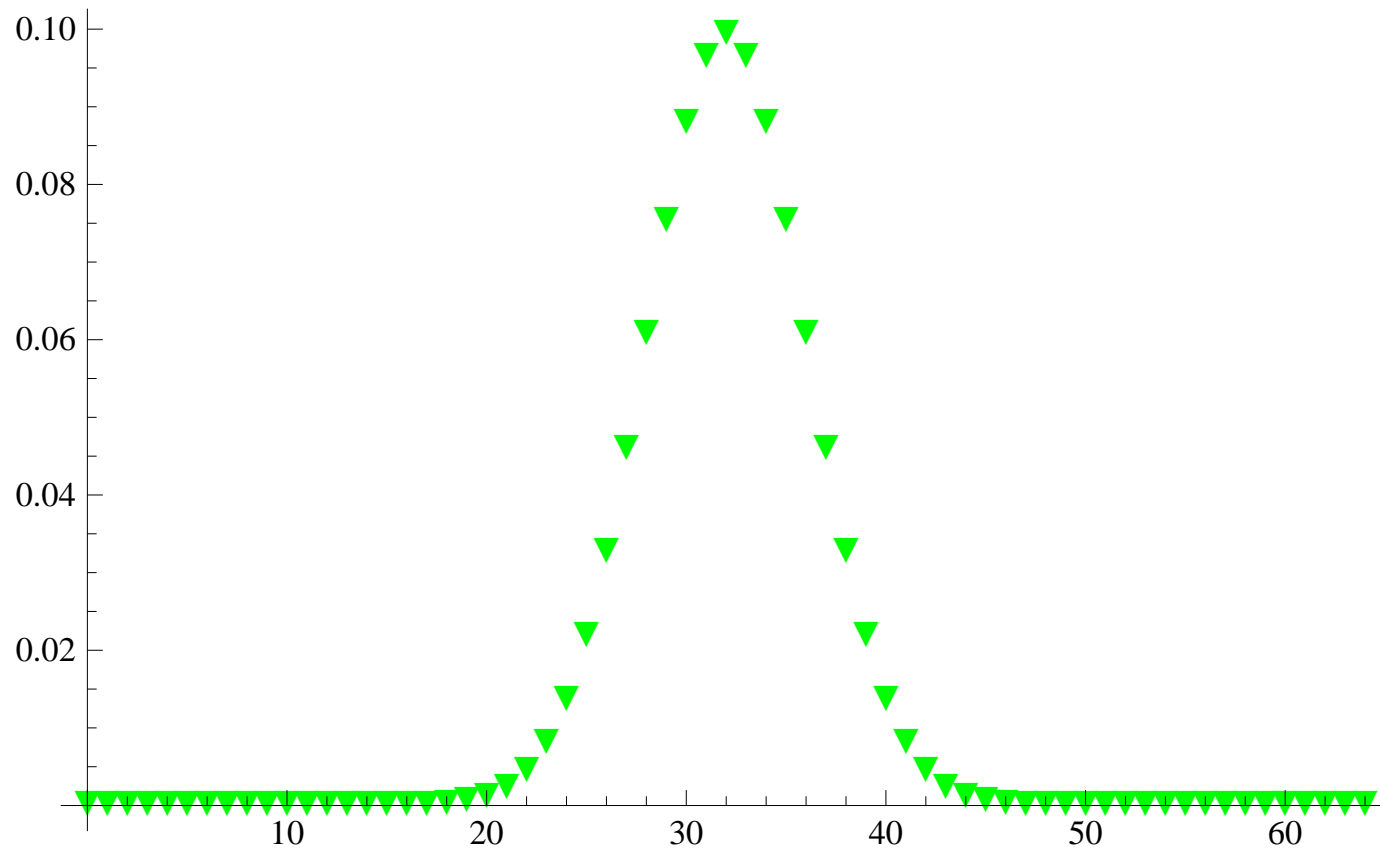




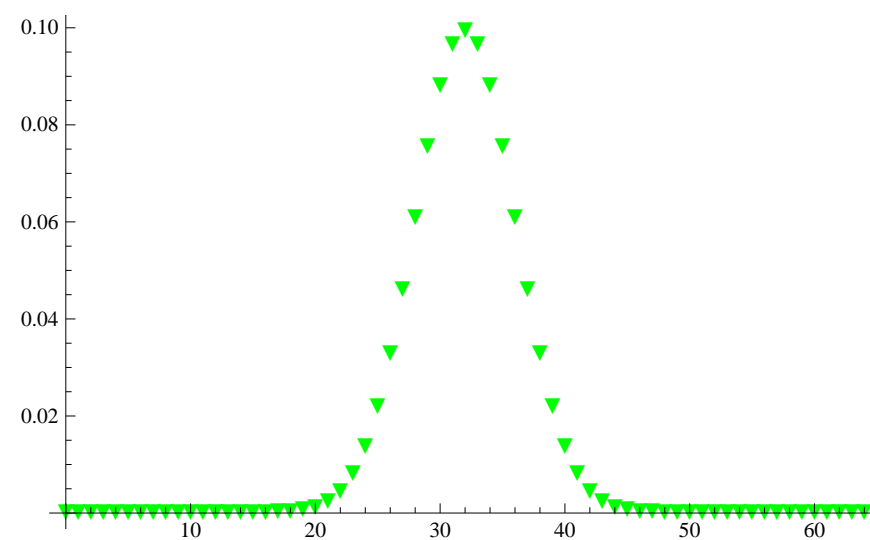
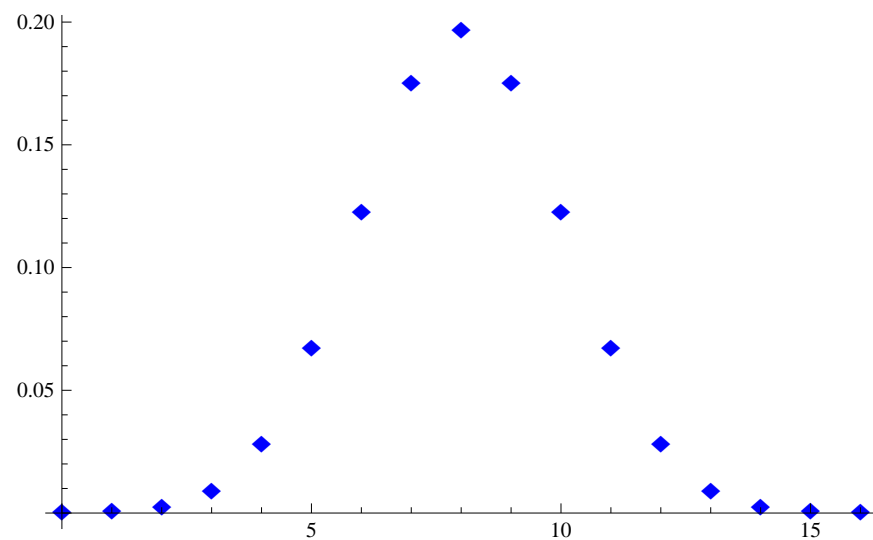
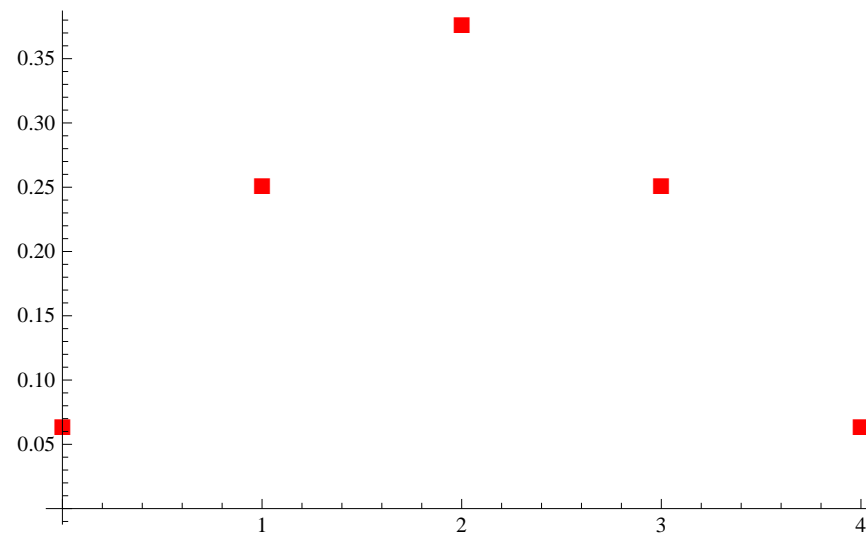
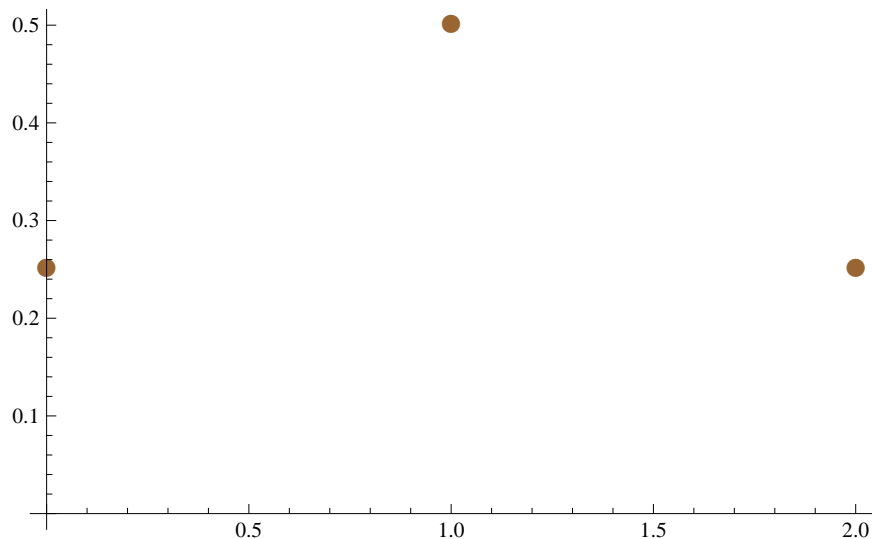
$N = 16$



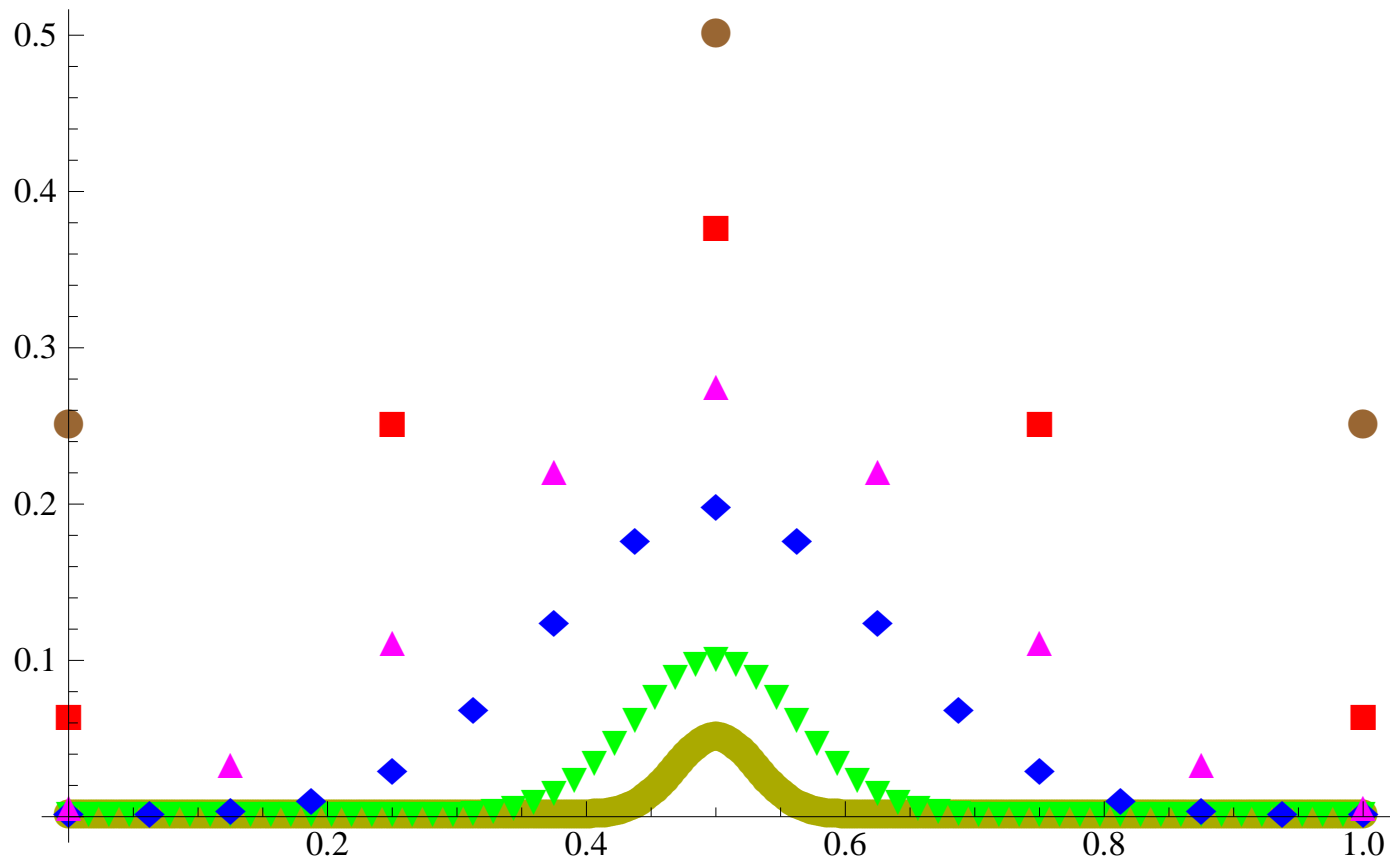
$N = 64$



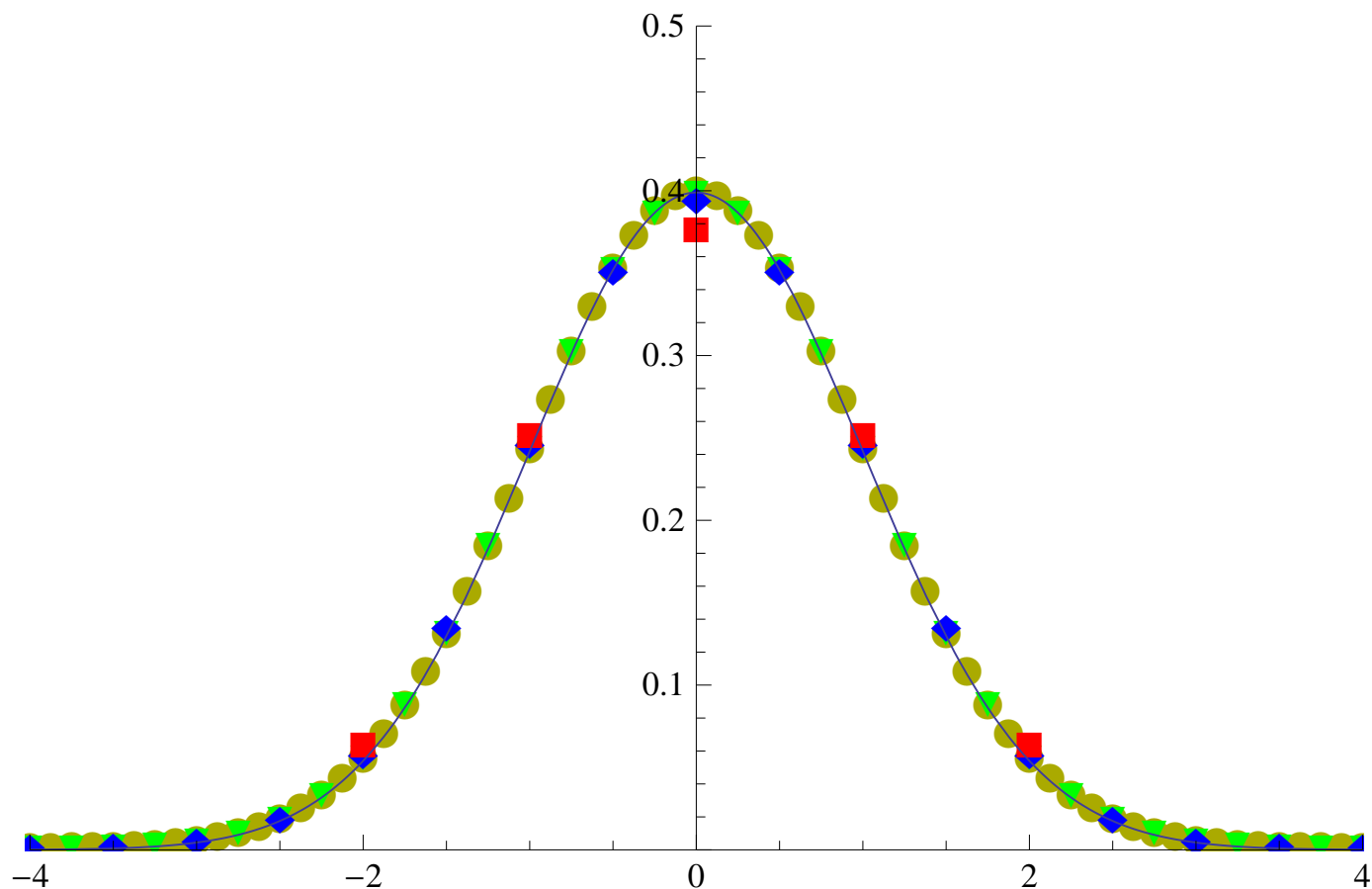
(1)  $N = 2, 4, 16, 64$  のそれぞれを横軸が  $m$ , 縦軸は  $\mathbb{P}[S_N = m]$  で描いたもの:



(2) この4つ, および  $N = 8$  と  $N = 256$  を重ねて描くと (横軸は  $m/N$ )



(3) 上のグラフを，中心を原点にし，縦軸，横軸もうまく伸び縮みさせると：



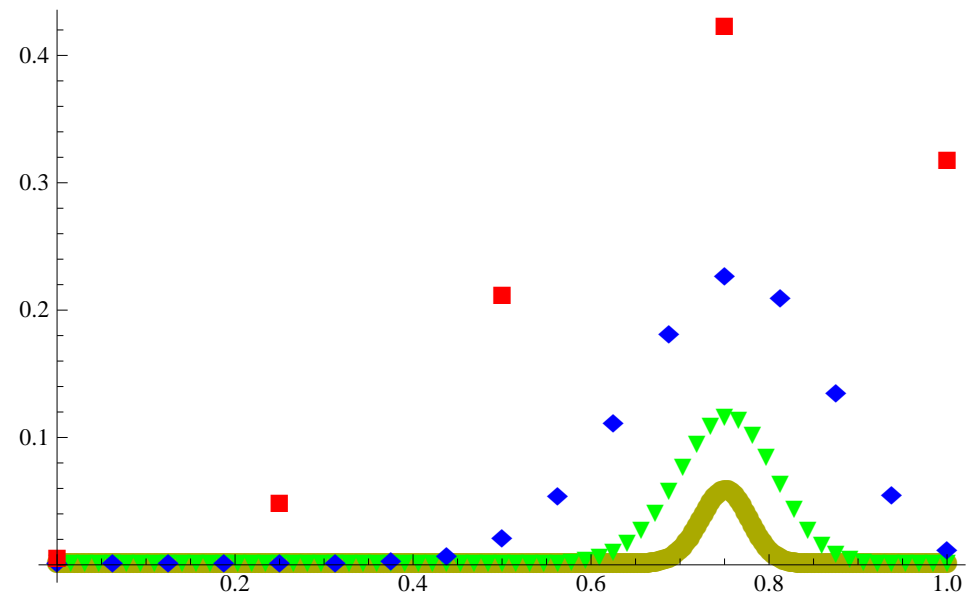
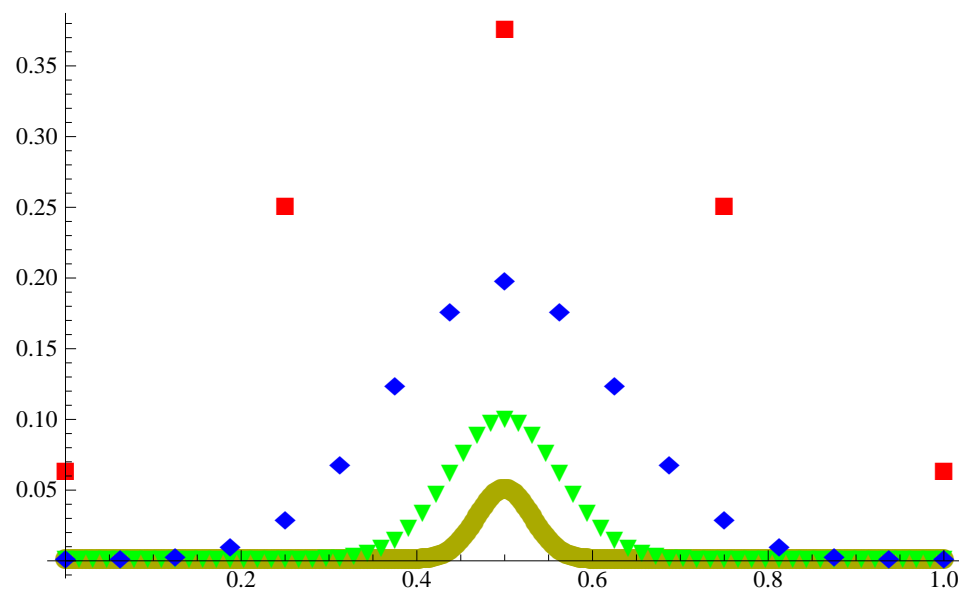
見事に，同じ曲線上に乗りそうだ。何らかの規則性がある？

## 2.3 $N$ が大きくなったら？ I. 大数の法則

前節の結果：

$$\mathbb{P}[\text{コインを } N \text{ 回投げて } m \text{ 回が表}] = {}_N C_m p^m (1-p)^{N-m} \quad (2.11)$$

下図左が  $p = 1/2$ , 下図右が  $p = 3/4$  ( $N = 4, 16, 64, 256$ ) :



横軸は  $\frac{S_N}{N}$ .  $N$  を大きくすると,  $\frac{S_N}{N}$  の分布が  $p$  のところに集中.

背後にある定理は：

**大数の弱法則**：表の出る確率が  $p$  であるコインを  $N$  回投げたときに表の出る回数を  $S_N$  と書く ( $\frac{S_N}{N}$  が表の出る割合)。このとき、「 $\frac{S_N}{N}$  が  $p$  からずれる確率」は  $N$  が無限大になるとゼロに近づく。もっと詳しく言うと、勝手な正の数  $a$  に対して、

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_N}{N} - p\right| > a\right] \leq \frac{p(1-p)}{a^2 N} \quad (2.12)$$

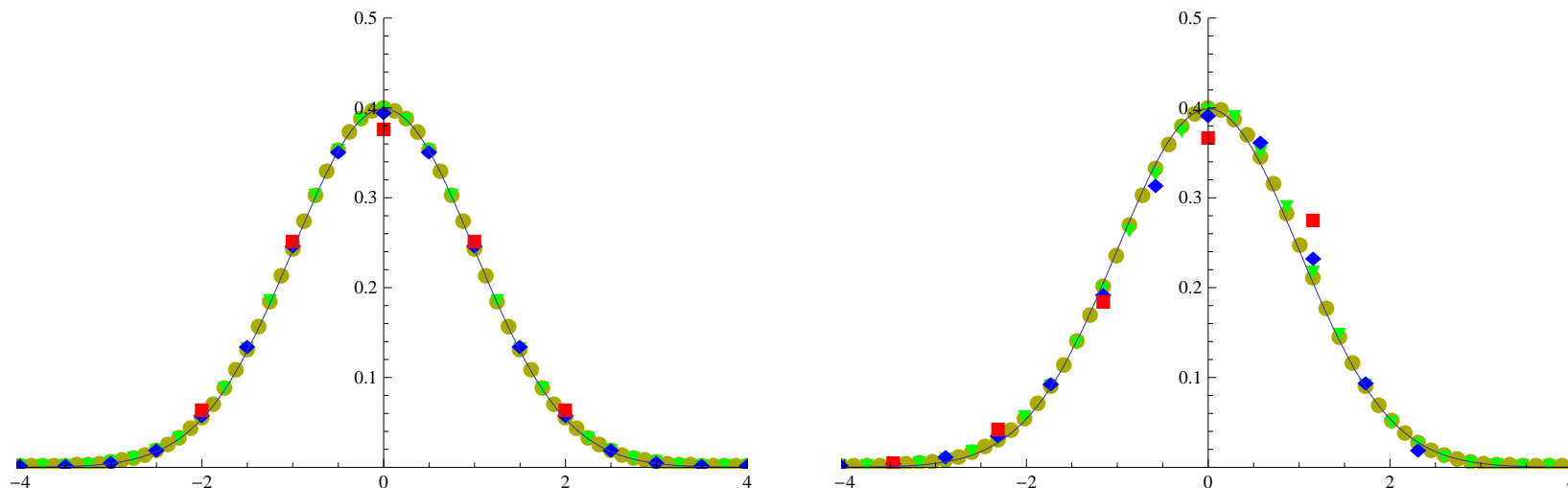
が成り立つ。

この定理の心： $N$  が大きくなるにつれ、 $\frac{S_N}{N}$  が  $p$  に近づいていく。

**注意**： $p$  に近づかない例外はいつもあるが、例外の確率は、 $N \rightarrow \infty$  ではゼロになる ( $N \rightarrow \infty$  では例外の割合がゼロ！)。

## 2.4 $N$ が大きくなったら？ II. 中心極限定理

2.2節のグラフを少し手直しすると (左は  $p = \frac{1}{2}$ , 右は  $p = \frac{3}{4}$ )



4色は  $N = 4$  (赤),  $16$  (青),  $64$  (緑),  $256$  (黄) の場合の確率.  
実線は  $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  のグラフ

横軸は  $\sqrt{\frac{N}{p(1-p)}} \left( \frac{m}{N} - \frac{1}{2} \right)$ , 縦軸は  $\mathbb{P}[S_N = m] \times \sqrt{p(1-p)N}$ .

$N$  が大  $\longrightarrow$  点が急速に実線のグラフの上に乗って行く.

( $p$  の値が違うのに, 同じ関数  $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  のグラフに近づく!!)



## この背後にあるものは？ → 中心極限定理

**中心極限定理**：コイン投げ（表の確率  $p$ ）で，確率変数（ランダムな数）

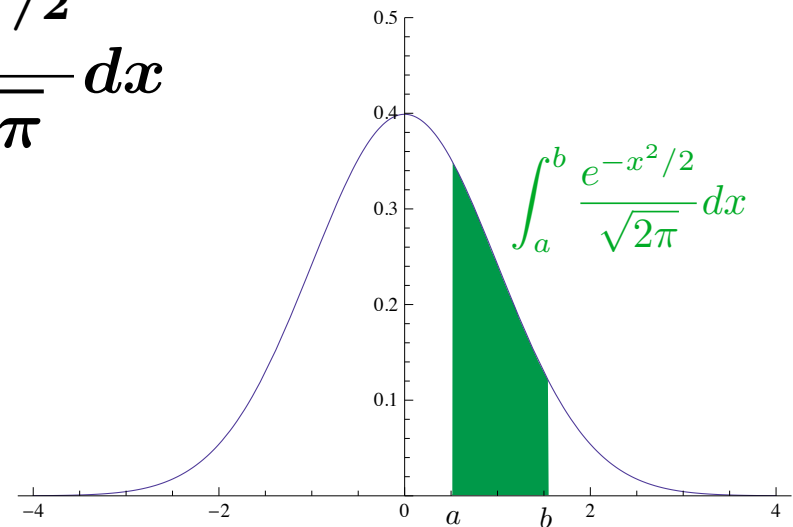
$$Z_N = \frac{S_N - pN}{\sqrt{p(1-p)N}} = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{p(1-p)}} \left( \frac{S_N}{N} - p \right) \quad (2.13)$$

を定義する．  $N$  が大きくなった時，確率  $\mathbb{P}[a \leq Z_N \leq b]$  は，

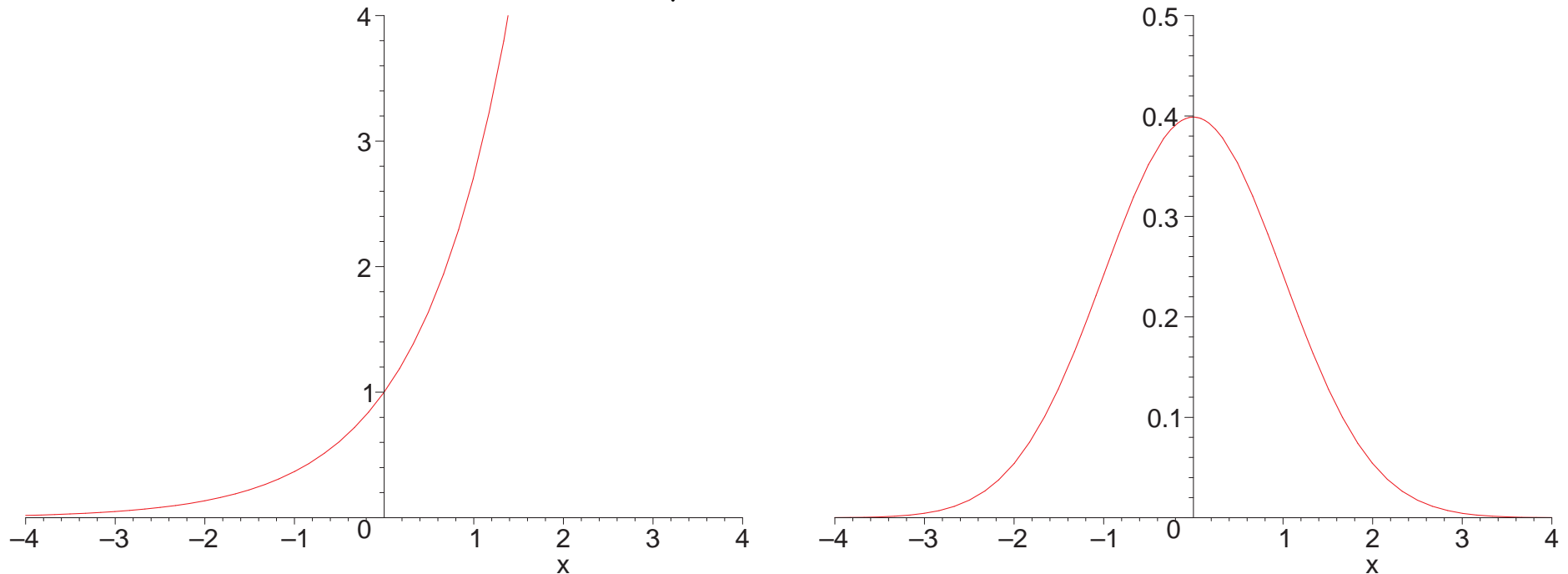
グラフ  $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  と3直線  $x = a, x = b, y = 0$  で

$$\text{囲まれた部分の面積} = \int_a^b \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

に収束する．



- 下図左が  $y = e^x$ , 右が  $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$  のグラフ.



- 標準正規分布  $z$  とは, 実数の値をとるランダムな変数で, その分布が

$$\mathbb{P}[a \leq z \leq b] = \left( \text{グラフ } y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \text{ と} \right.$$

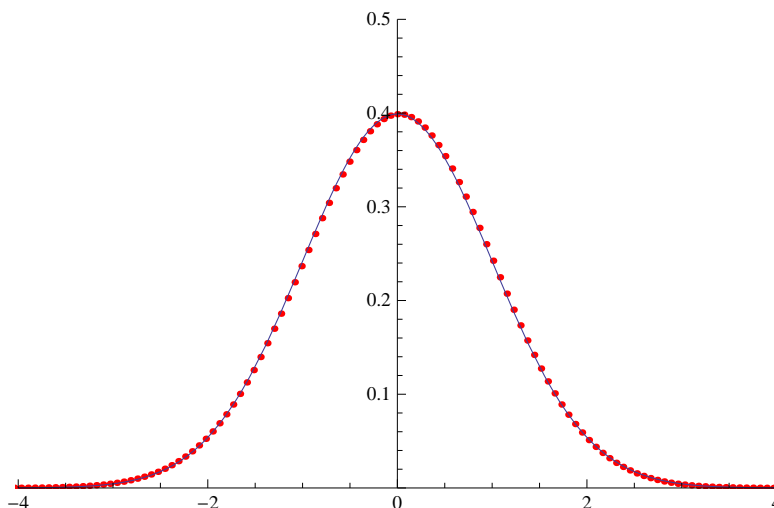
$$\left. \text{3直線 } x = a, x = b, y = 0 \text{ で囲まれた部分の面積} \right) \quad (2.14)$$

で与えられるもの.

以上がコイン投げの問題に対する、一応の数学的な解答 —— 特に我々が直感的に考える「大体半分は表が出るでしょ」の定量的な意味。

「大数の法則」や「中心極限定理」はある種の「**独立な**」現象に関して**普遍的に成り立つ非常に一般的なもの**なので、数学的に非常に美しく、また重要。同時に、この定理はイントロの  $a, b, c''$  の問題の背景を説明してくれる。

(おまけ) ダメ押しで  $p = 0.75$ ,  $n = 1024$  の場合 :



## 2.5 大数の法則の“証明”

---

少し一般に考える：

(新しい問題) コインではなく、サイコロを  $N$  回、転がして、出た目の数の合計を  $S_N$  とする。  $\frac{S_N}{N}$  はどのような値になるだろうか？ (または、どのような分布になるだろうか？)

このように複雑 (面が6つ) になると、単なる計算では難しい。何か良い方法は無いだろうか？

### 2.5.1 (準備) 確率変数, 期待値と分散

---

**確率変数** : 「その値が確率的に決まるような変数」のこと

以下のような表 ( $X$  の分布) を与えると確率変数が定義できる。

確率変数のとりうる値	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
それぞれをとる確率	$p_1$	$p_2$	$p_3$	...	$p_n$

**確率変数の特徴付け**： 確率変数をどのように特徴づければよいか? 上の表のような「分布」では却ってわかりにくいので，期待値と分散を考える。

$X$  の**期待値** (平均値)  $\langle X \rangle$  とは

$$\langle X \rangle = \sum_{i=1}^n p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \cdots + p_n x_n \quad (2.15)$$

また，**分散**とは

$$\text{Var}[X] = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \langle X \rangle)^2 \quad (2.16)$$

$\sqrt{\text{Var}[X]}$  を  $X$  の**標準偏差**と言う。(標準偏差は  $\sigma$  で表すことが多い.)

- 期待値  $\longrightarrow$  だいたい，分布の「**中心**」付近を教えてくれる。
- 標準偏差  $\longrightarrow$  分布の**広がり**の目安

## 2.5.2 期待値と分散の基本的な性質

一般の確率変数  $X, Y$  と勝手な実数  $a$  に対して,

$$\langle X + Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle, \quad \langle aX \rangle = a \langle X \rangle \quad (2.17)$$

$$\text{Var}[aX] = a^2 \text{Var}[X] \quad (2.18)$$

また,  $X, Y$  が**独立**の場合には

$$\langle XY \rangle = \langle X \rangle \langle Y \rangle \quad (2.19)$$

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] \quad (2.20)$$

(注) (2.19)や(2.20)には,  $X, Y$  の独立性が本質的.

これらの性質は複雑な量の期待値や分散を, 簡単な量の期待値や分散に分解して計算する手段を与えてくれる.

### 2.5.3 $S_N$ などの期待値や分散の計算

まず準備として  $X_i$  の期待値と分散を計算すると、定義から

$$\langle X_i \rangle = p, \quad \text{Var}[X_1] = p(1 - p). \quad (2.21)$$

では  $S_N$  の期待値は？ 期待値の線形性 (2.17) をくり返し使うと、

$$\begin{aligned} \langle S_N \rangle &= \langle X_1 + X_2 + X_3 \cdots + X_N \rangle = \langle X_1 \rangle + \langle X_2 + X_3 + \cdots + X_N \rangle \\ &= \cdots = \langle X_1 \rangle + \langle X_2 \rangle + \cdots + \langle X_N \rangle = \sum_{i=1}^N \langle X_i \rangle \end{aligned} \quad (2.22)$$

(2.21) から  $\langle X_i \rangle = p$  なので (2.22) から

$$\langle S_N \rangle = N \langle X_1 \rangle = Np \quad (2.23)$$

が得られる。次に  $S_N$  の分散は？  $X_i$  が独立であるために (2.20) が使える。(2.22) と同じノリで進むと

$$\text{Var}[S_N] = \text{Var}[X_1 + X_2 + \cdots + X_N] = \text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] + \cdots + \text{Var}[X_N] \quad (2.24)$$

となり, (2.21)から  $\text{Var}[X_i] = p(1 - p)$  なので, (2.24)から

$$\text{Var}[S_N] = N \text{Var}[X_1] = Np(1 - p). \quad (2.25)$$

(2.23)は  $S_N$  は大体  $Np$  を中心に分布していること, また(2.25)はその分布の拡がりは大体  $\sqrt{Np(1 - p)}$  くらいであることを示唆.

次に,  $\frac{S_N}{N}$ . これは上の結果を用いると簡単で,

$$\left\langle \frac{S_N}{N} \right\rangle = \frac{1}{N} \langle S_N \rangle = \frac{1}{N} \times Np = p \quad (2.26)$$

が出る. 同様に, (2.18)から

$$\text{Var}\left[\frac{S_N}{N}\right] = \left(\frac{1}{N}\right)^2 \text{Var}[S_N] = \left(\frac{1}{N}\right)^2 \times Np(1 - p) = \frac{p(1 - p)}{N} \quad (2.27)$$

がでる. この2式は  $\frac{S_N}{N}$  の分布の中心が  $p$  付近で, その拡がり

$\sqrt{\frac{p(1 - p)}{N}}$  くらいであることを示唆.



## 2.5.4 大数の弱法則の証明

(チェビシェフの不等式) 期待値と分散が有限である確率変数  $Y$  に対して以下が成立する ( $a$  は勝手な正の数) :

$$\mathbb{P}[|Y - \langle Y \rangle| > a] \leq \frac{\text{Var}[Y]}{a^2} .$$

上の不等式を  $Y = \frac{S_N}{N}$  に対して適用しよう. 単に代入すると

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_N}{N} - \left\langle \frac{S_N}{N} \right\rangle\right| > a\right] \leq \frac{\text{Var}\left[\frac{S_N}{N}\right]}{a^2} \quad (2.28)$$

となる. さっき計算した  $\left\langle \frac{S_N}{N} \right\rangle$  と  $\text{Var}\left[\frac{S_N}{N}\right]$  の値を代入して

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_N}{N} - p\right| > a\right] \leq \frac{\frac{p(1-p)}{N}}{a^2} = \frac{p(1-p)}{a^2 N} \quad (2.29)$$

を得る. (コイン投げに対する証明終わり)

(解釈) 左辺は、「 $\frac{S_N}{N}$  がその期待値  $\langle \frac{S_N}{N} \rangle = p$  から  $a$  以上ずれる確率」.  
右辺は、この確率が、 $N$  が大きくなると  $1/N$  のオーダーで減少していくことを主張。つまり、 $N$  を大きくしても (コインを何回も投げても)、表の出る割合がきっちり  $p$  になるとは言い切れないが、表の出た割合は非常に高い確率で  $p$  の近くに来る、という主張。

さて、上の解析ではコイン投げであることはほとんど使っていない。重要なのは  $\frac{S_N}{N}$  の分散が  $1/N$  のように (大きい  $N$  に対して) 小さくなっていくこと。そこで、上の議論を少し拡張すると、以下の結果になる。

(大数の弱法則) 期待値が  $\mu$ , 分散が  $\sigma^2$  である**独立** (かつ同分布) な確率変数  $X_1, X_2, \dots$  に対して,  $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$  を定義する. このとき,  $\frac{S_N}{N}$  が  $\mu$  からずれる確率は  $N$  が無限大になるとゼロに近づく. もっと詳しくは, 任意の正の数  $a$  に対して,

$$\mathbb{P} \left[ \left| \frac{S_N}{N} - \mu \right| > a \right] \leq \frac{\sigma^2}{a^2 N} \quad (2.30)$$

が成り立つ.

註: 上では  $X_i$  が同分布 (同じ試行の繰り返し) だとしたが, 同分布でない場合にもある程度拡張して成り立つことが, もう少し頑張るとわかる.

## 2.5.5 チェビシェフの不等式の証明

チェビシェフの不等式の証明は、びっくりするくらい簡単。少し一般に考えた方が原理がわかりやすいので、 $a, b$  を勝手な数 ( $a > 0$ ) として

$$\mathbb{P}[|X - b| \geq a] \leq \frac{\langle (X - b)^2 \rangle}{a^2} \quad (2.31)$$

を証明し、最後に  $b = \langle X \rangle$  とする。

確率変数  $X$  は  $x_i$  の値を確率  $p_i$  でとるとする ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ )。

$\langle (X - b)^2 \rangle$  の表式から出発し、 $i$  の和を  $|x_i - b| \geq a$  を満たすものに限定すると、和の値は小さくなる（和の中身が非負なので、足す項が減れば和は減る）：

$$\langle (X - b)^2 \rangle = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - b)^2 \geq \sum_{i: |x_i - b| \geq a} p_i (x_i - b)^2 \quad (2.32)$$

最後の和では、 $|x_i - b| \geq a$ を満たす*i*についてのみ和をとる。ところが、右辺の和の中身はいつでも  $(x_i - b)^2 \geq a^2$  なので、この和は  $a^2$  以上のものの足し算。従って和の値は「 $a^2 \times$  (和の個数)」よりも大きい：

$$\geq \sum_{i:|x_i-b|\geq a} p_i a^2 = a^2 \sum_{i:|x_i-b|\geq a} p_i \quad (2.33)$$

ところが、この右辺の和は、 $|x_i - b| \geq a$  なる  $x_i$  の実現確率を足しているのだから、 $\mathbb{P}[|X - b| \geq a]$  そのものだ：

$$= a^2 \mathbb{P}[|X - b| \geq a]. \quad (2.34)$$

両辺を  $a^2$  で割ると(2.31)を得る。また、 $b$  は何でも良かったので特に  $b = \langle X \rangle$  ととると、チェビシェフの不等式になる。□

## 2.6 中心極限定理の“説明”

少し一般の形で定理を述べます。

独立かつ同分布な確率変数  $X_1, X_2, \dots$  を考える。  $X_1$  の期待値  $\mu = \langle X_1 \rangle$ ，標準偏差  $\sigma = \sqrt{\text{Var}[X_1]}$  を用いて確率変数

$$S_N = \sum_{j=1}^N X_j, \quad Z_N = \frac{S_N - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \quad (2.35)$$

を定義すると、 $N$  が無限大になるとき、 $Z_N$  は標準正規分布に“収束”する。特に、 $N$  が無限大になる極限では、確率  $\mathbb{P}[a \leq Z_N \leq b]$  は、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}[a \leq Z_N \leq b] = \int_a^b \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \quad (2.36)$$

をみます。

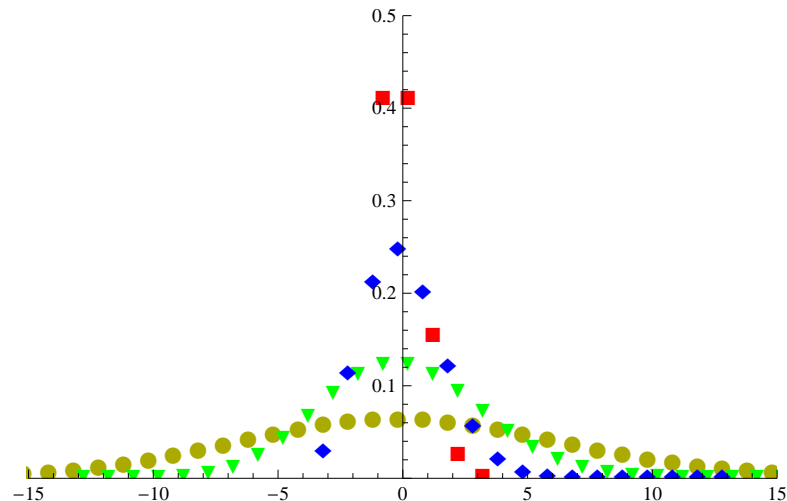
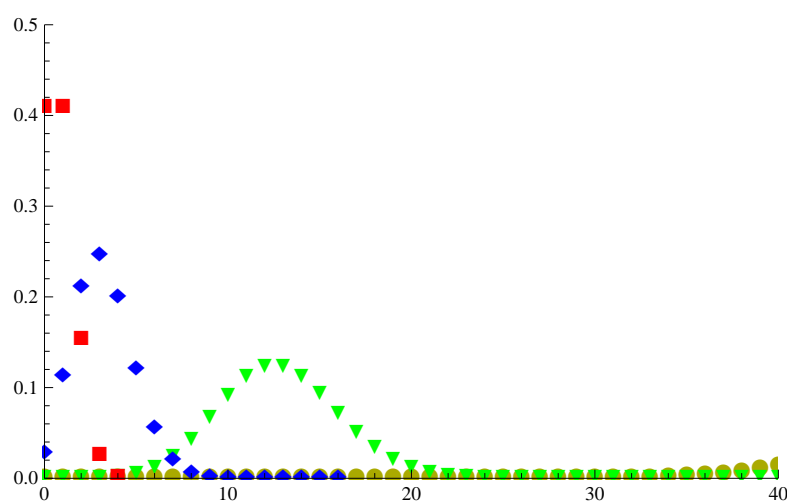
大数の法則と同じく，中心極限定理も**非常に広い範囲で成り立つ**定理。  
以下では質問に答える形で，この定理についての説明を与える。

- グラフの横軸はなぜ，あのように伸び縮みさせるのか？（関連質問）なぜ上のように  $Z_N$  を定義するのか？
- グラフの縦軸はなぜ，あのように伸び縮みさせるのか？（関連質問）なぜ確率が面積で表されるのか？
- このように伸び縮みさせるとなぜ，あの曲線に行くのか？（関連質問）  
極限で出てくる実数のグラフ  $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  はどのような原理で決まるのか？

これらの質問に完全に答えるには大学程度の知識が必要なので，以下では部分的な解答を試みる。

## 2.6.1 $Z_N$ はなぜ、このように決めるのか？

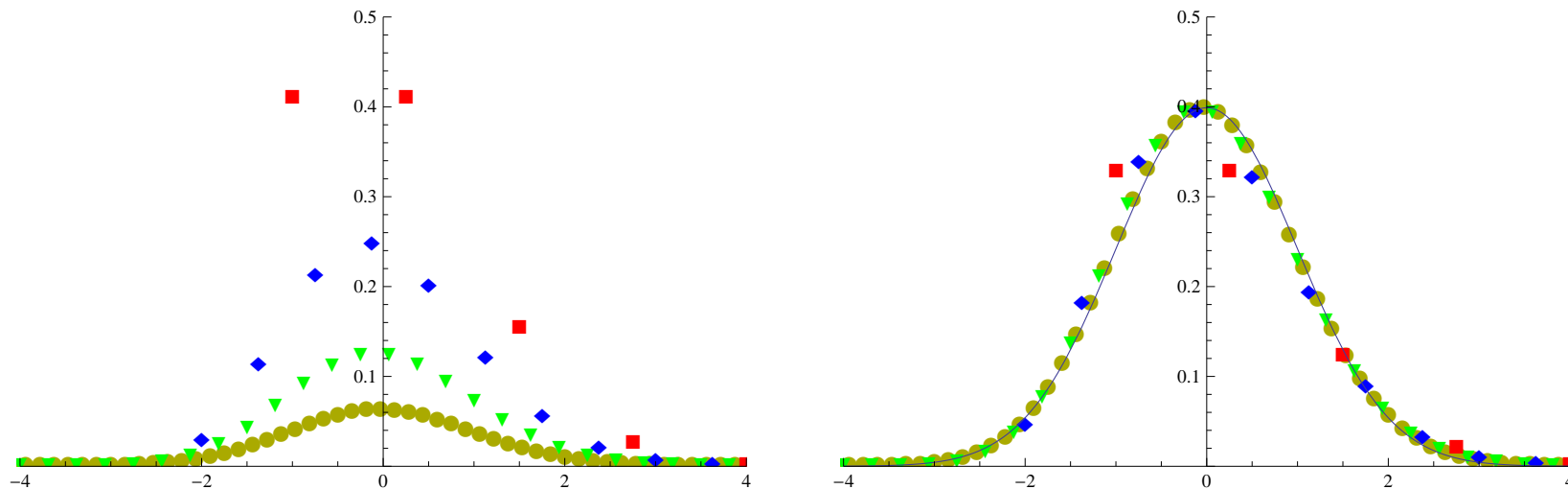
グラフをいろいろと伸び縮みさせる過程を見せよう ( $p = 1/5$  の場合) :



(1) 左上の図：横軸は  $m$ ，縦軸は  $\mathbb{P}[S_N = m]$ . 黄色 ( $N = 256$ ) は図の範囲外 (右側) に分布の中心がある ( $Np = 51.2$ ).

(2) 右上の図：横軸は  $m - pN$ ，縦軸は  $\mathbb{P}[S_N = m]$ .  $S_N$  の期待値 ( $Np$ ) の位置を中心に持ってくるように各曲線を平行移動した. 分布の中心は大体そろったが,  $N$  が大きくなるにつれて高さは低く, 幅は広がっている.





(3) 左上の図：横軸は  $(m - pN) / \sqrt{p(1 - p)N}$ ，縦軸は  $\mathbb{P}[S_N = m]$ 。(2) のグラフを横軸方向に  $1 / \sqrt{p(1 - p)N}$  に縮めた。幅はどの  $N$  でも同じようになってきたが，高さがそろっていない。

(4) 右上の図：横軸は  $(m - pN) / \sqrt{p(1 - p)N}$ ，縦軸は  $\mathbb{P}[S_N = m] \times \sqrt{p(1 - p)N}$ 。(3) のグラフを縦方向に引き延ばしました。これで漸く，高さも幅もそろうようになった。実線は  $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  のグラフ。

最終段階の (4) のグラフを表現したのが中心極限定理。

まず、(1) から (2) への変換は大数の法則から理解できる。  $\frac{S_N}{N}$  が  $p$  の周りに集中してるので、  $S_N$  そのものを見てたら分布の中心は右の方へ動いてしまう。これを打ち消すように、分布の中心 ( $Np$ ) を常にグラフの中心にするように平行移動しただけ。

(2) から (3) は？ (2) のグラフでは分布の中心は  $y$ -軸だが、  $N$  とともに幅が大きくなったのでこれを縮めたい。どのくらい縮めればよいか？

確率変数  $X$  の拡がりの目安は  $\sigma = \sqrt{\text{Var}[X]} = \sqrt{p(1-p)N}$  だ (2.5.1節)。つまり、  $S_N$  の拡がりが  $N$  とともに  $\sigma = \sqrt{p(1-p)N}$  くらいで増えていく。これを打ち消すように  $\sigma$  で横軸を割ってやれば幅が大体一定の分布ができるだろう。これが (2) から (3) への変換の理由。

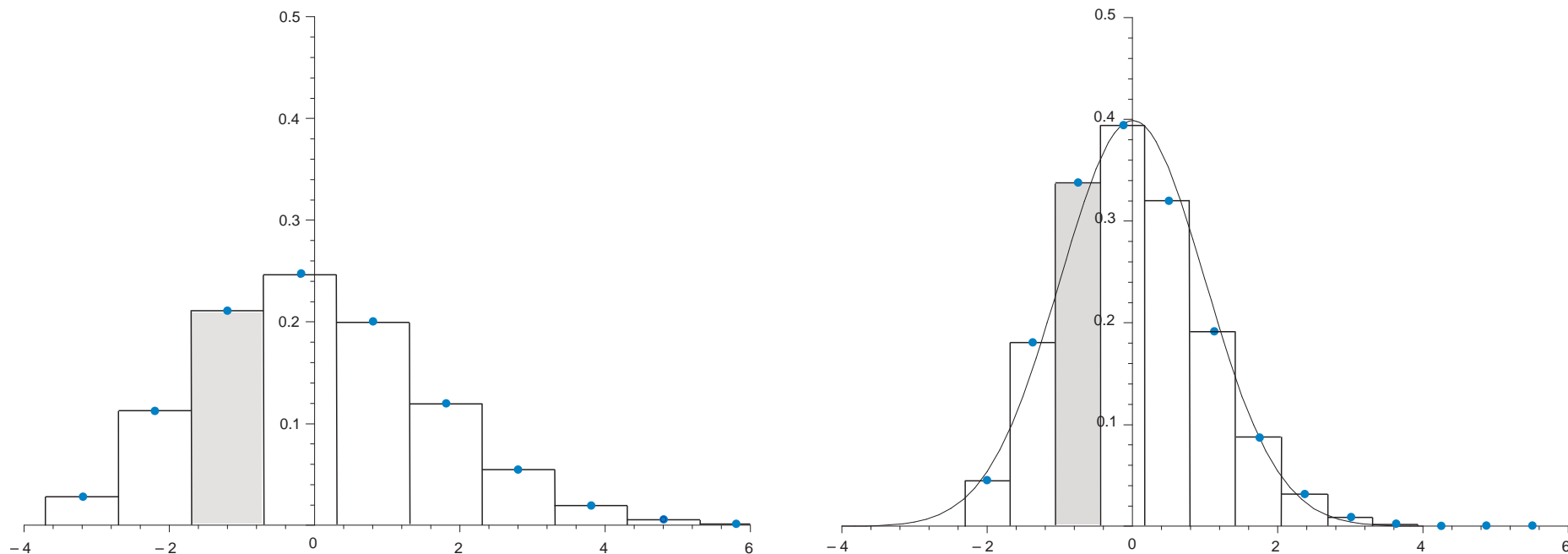
なお、この2つの変換を続けてやることは

$$Z_N = \frac{S_N - Np}{\sqrt{p(1-p)N}} = \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \times \frac{S_N - Np}{\sqrt{N}} \quad (2.37)$$

を定義するのと同じで、これが  $Z_N$  の定義の理由。ここで分子の  $S_N - Np$  は (1) から (2) への平行移動を、分母の  $\sqrt{p(1-p)N}$  は (2) から (3) への横軸方向の縮めを表している。

最後に (3) から (4) の変換は？ → **確率が曲線の下での面積で与えられるように決めている。**

まず、確率とグラフの下での面積の関係を  $N = 16$  を例にとって考えよう。



左： $\mathbb{P}[S_N = m]$  のグラフ，横軸は  $m - Np$ 。先の(2)そのものだが，各  $m$  での  $\mathbb{P}[S_N = m]$  の値のみならず，それぞれの  $m$  の周りに幅1の短冊をとって，ヒストグラムのようにした —  $\mathbb{P}[S_N = m]$  の値はそれぞれの  $m$  のところにある長方形の面積そのものである。

この考えに基づくと、( $A < B$  は勝手な整数) 確率

$$\mathbb{P}[A \leq S_N - Np \leq B] = \sum_{m=A}^B \mathbb{P}[S_N = m] \quad (2.38)$$

は左図の折れ線と  $x$ -軸の間の、 $x = A - \frac{1}{2}$  から  $x = B + \frac{1}{2}$  の部分の面積である。

右図は左図を、「横軸は  $1/\sqrt{p(1-p)N}$  だけ縮め、縦軸は  $\sqrt{p(1-p)N}$  倍に引き延ばした」もの。横軸を縮めたのと同じ割合だけ縦軸を引き延ばしているのがミソで、こうすると、左側に出ている長方形(短冊)のそれぞれは(横が縮んだ分だけ縦が伸びたから)、面積が同じ対応する短冊に移る。

従って、(2.38)を表す面積は、確率

$$\mathbb{P}\left[\frac{A}{\sqrt{p(1-p)N}} \leq Z_N \leq \frac{B}{\sqrt{p(1-p)N}}\right] = \sum_{m=A}^B \mathbb{P}[S_N = m] \quad (2.39)$$

とも書けるが、これは右図の折れ線と  $x$ -軸の間の、 $x = \frac{A-1/2}{\sqrt{p(1-p)N}}$  から  
 $x = \frac{B+1/2}{\sqrt{p(1-p)N}}$  の部分の面積だ。

右の短冊の頂点（青点）は  $N$  が大きくなるにつれて実線のグラフの上に乗っていく。また、短冊の幅もどんどん小さくなっていく。 $N$  が大きくなった極限では (2.39) の面積は実線のグラフ  $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  のグラフと  $x$ -軸の間の部分の面積に近づきそうだ。これが中心極限定理で  $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  のグラフの下の面積が出てくる理由。また縦軸を伸ばす割合は、この面積の解釈ができるように「**横軸を縮めた分を打ち消すように引き延ばす**」ことで決められていたのだ。

註：ここでは横軸を縮める割合と縦軸を伸ばす割合が丁度同じだったが、これは実は  $S_N$  のとりうる値がたまたま間隔 1 で分布していたための、幸運な事情。元々の確率変数のとりうる値が間隔  $a$  で分布していたなら、上で説明した「確率と面積」の解釈を少し変更する必要がでて、縦軸の引き延ばしは  $\sqrt{p(1-p)N}/a$  にすべきであることがわかる。

## ~~2.6.2 なぜ、あの曲線に“収束”するのか？~~

このような変換をしたものがなぜ、 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  の曲線に近づくのか — この曲線はどうやって決まるの？

大学3年程度の数学（例えば次の2.6.3節で紹介している「特性関数の方法」）を駆使すれば完全な答えを与えられるが、高校では少し無理。 → 僕のweb page の参考資料をご覧ください。

### ~~2.6.3 中心極限定理の証明は実際にはどうするのか？（お話しだけ）~~

中心極限定理の実際の証明方法について、お話しだけ。

(1)  $\mathbb{P}[S_N = m]$  の具体形がわかっているならこれが  $N$  を大きくしたときにどのような値に近づくか、腕力で計算してみる。「**スターリングの公式**」と言うものを使ってガリガリ計算するとできるが、かなり大変。複雑な問題はこの方法ではほとんど絶望的。

(2) 通常、大学の数学での証明は「**特性関数**」と言うものを使う。非常にエレガントで、かつ、適用範囲も大変に広い。良いことづくしだが、高校レベルでは少し無理。

(3) 確率変数の分布を特徴づけるには、高次の**モーメント**を全部計算すれば（大体）十分（大学の数学の知識より）。従って、 $Z_N$  の高次のモーメントを計算し、これが標準正規分布の高次のモーメントに収束していく（ $N$  が大きくなると）ことを示す手もある。

(4) 統計力学や情報理論などで使われる「**エントロピー**」を使う方法もあります（最近の発展）。

## 2.7 この章のまとめ

---

- 話題の中心は  $N$  個の**独立な確率変数の和**  $S_N$ .
- 個々の確率変数の期待値を  $\mu$ , 標準偏差を  $\sigma$  とする.
- **独立性のおかげで**  $\text{Var}[S_N]$  が大体  $N$  くらいになる, つまり
- $N$  この独立な確率変数の和は  $\sqrt{N}$  くらいのバラツキをもっている
- **大数の法則** がなりたつ. つまり,  $N$  個の確率変数の平均  $S_N/N$  は,  $N$  が大きいときには,  $\mu$  に大体, 等しい.
- **中心極限定理** もなりたつ. つまり  $(S_N - N\mu)$  の大きさは  $\sqrt{N}$  のオーダーである.
- 二つの定理は非常に**普遍的**に成り立つ.

しつこいが, **独立性の仮定**が本質的である.



### 3 ランダムウォーク

---

この節では統計力学への橋渡しとして、ランダムウォークを考える。

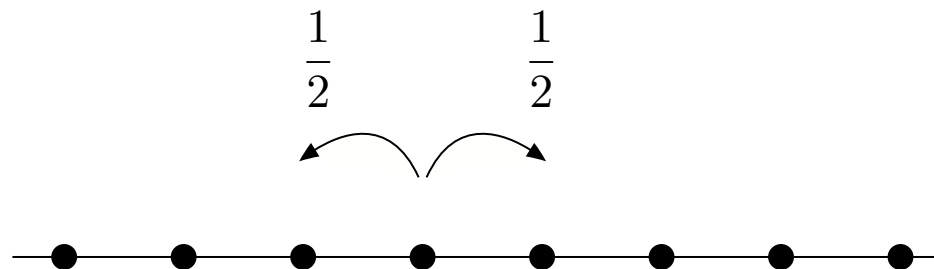
#### 3.1 1次元単純ランダムウォーク

---

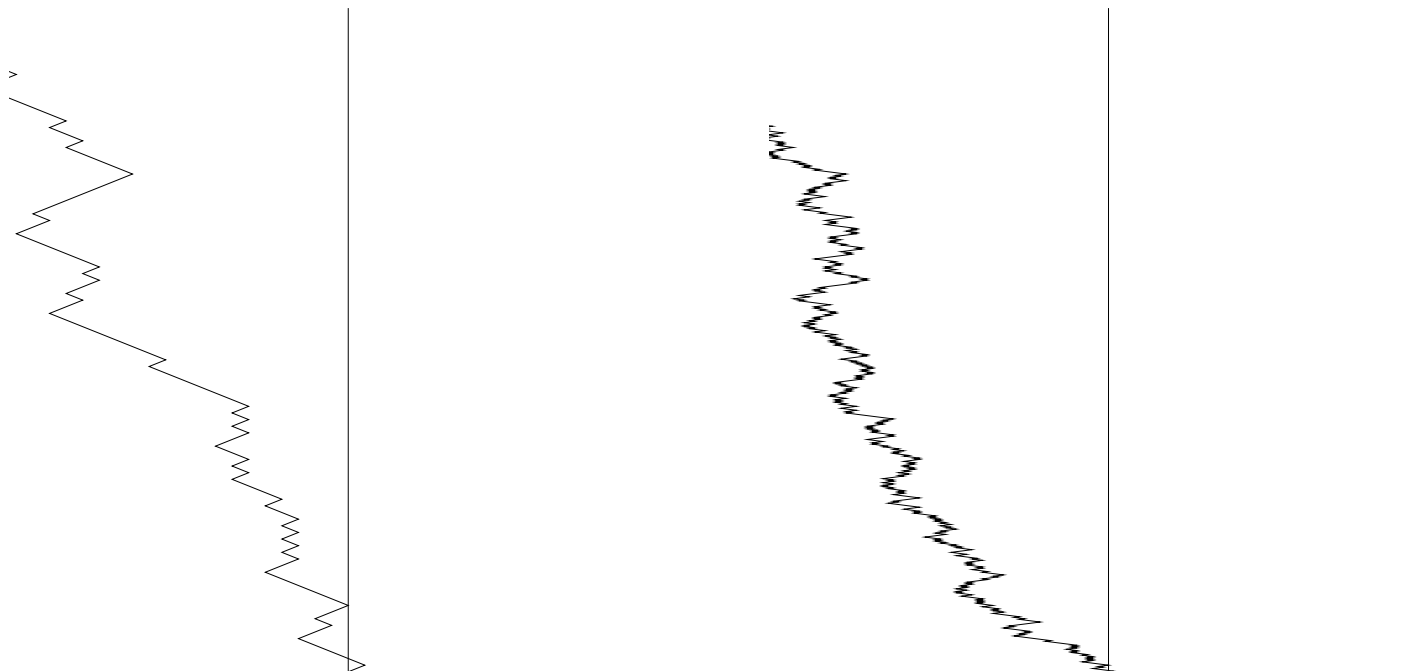
以下のような問題を考える：

人が数直線上の原点にいる。コインを投げ、結果が表なら数直線の正の方向（右）に一歩進む；結果が裏なら、負の方向（左）に一歩進む。一歩進んだ後は今いる地点を出発点にしてコインを投げて進むことをくり返す。これを  $N$  回くり返したとき、この人はどの付近にいるだろうか？

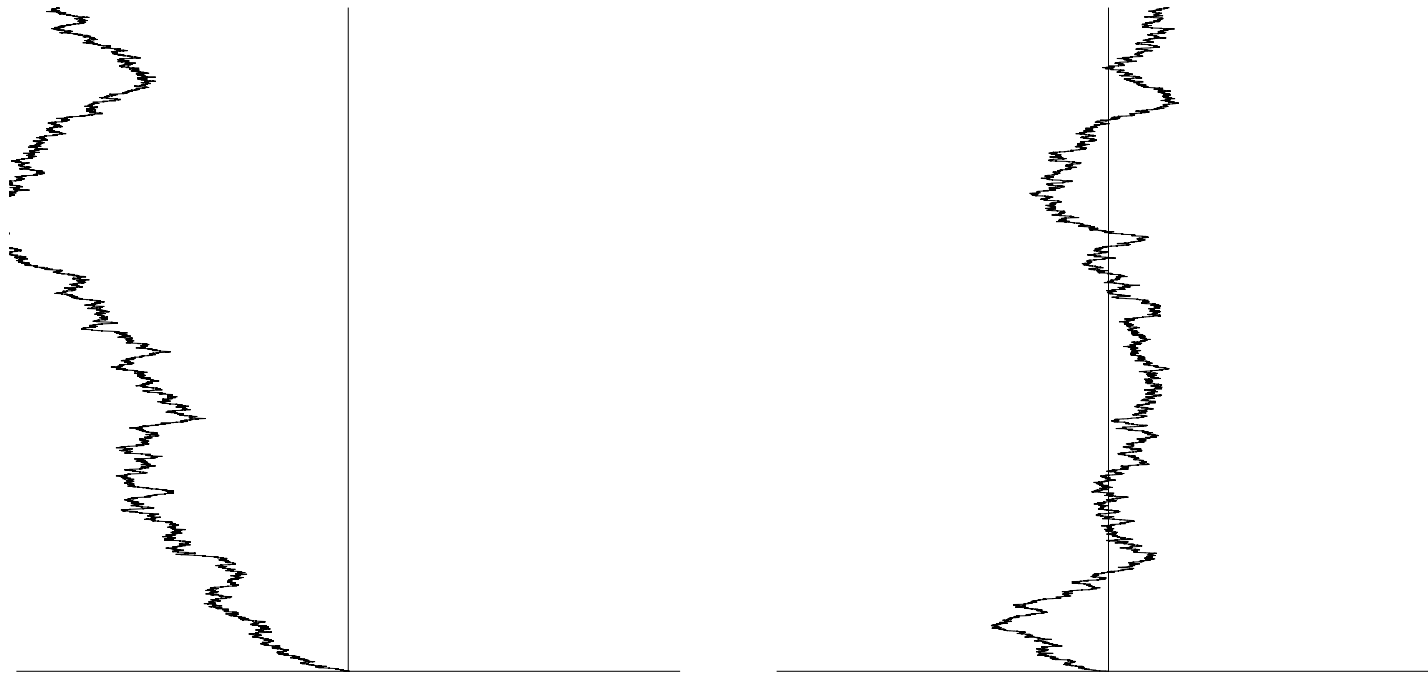
このような運動は **1次元単純ランダムウォーク**（または酔歩）と呼ばれる。



1次元ランダムウォークの例（横軸は点の位置，縦軸は歩数；図示している範囲は縦軸は0から $N$ ，横軸は $\pm 2\sqrt{N}$ .）：



全歩数が  $N = 10^2, 10^3$  steps の場合，



全歩数が  $N = 10^4, 10^5$  steps の場合.

以下のように考えると, 今までの大数の法則や中心極限定理から直ちに答えが得られる. まず,  $i$  歩めの数直線上の動きを  $X_i$  で表す:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{(右に動いたとき)} \\ -1 & \text{(左に動いたとき)} \end{cases} \quad (3.1)$$

すると,  $\mathbb{P}[X_i = 1] = \mathbb{P}[X_i = -1] = \frac{1}{2}$ . かつ,

$X_i$  と  $X_j$  は独立なはず. そして,  $N$  歩めの位置は  $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$ .

この単純ランダムウォークの問題は, **コイン投げとほとんど同じ**. 違いは

- (1)  $X_i = 0, 1$  の代わりに  $X_i = -1, +1$  となっていること,
- (2) 今回は  $N$  歩後の位置  $S_N$  そのものに興味があること,

の2つだけ. (1) の違いにより, 今回は

$$\langle X_i \rangle = 0, \quad \text{Var}[X_i] = 1 \quad (3.2)$$

大数の弱法則の証明 ((2.25) 付近) を思い出すと, 直ちに

$$\langle S_N \rangle = 0, \quad \text{Var}[S_N] = N \quad (3.3)$$

と結論できる.

今の場合の  $\text{Var}[S_N]$  の意味は？  $\langle S_N \rangle = 0$  だから，分散の定義から

$$N = \text{Var}[S_N] = \langle |S_N|^2 \rangle \quad (3.4)$$

$|S_N|$  は  $N$  歩後の位置の，原点からの距離そのものだから，上の分散には「**原点からの距離の2乗の平均**」という意味がつく（このため，この量を**平均2乗変位** (mean square displacement) とよぶ). つまり，(3.3)や(3.4)は「**原点からの距離の2乗の平均は  $N$  である**」と言っている. 距離の2乗の平均が  $N$  だから，**距離そのものの平均は大体  $\sqrt{N}$**  と思っても良いだろう — **Einstein の関係式**.

(注意) 起こりにくい事が起こってしまうこと (例: コインがすべて表, ウォークは  $N$  まで行く) はいつもある. しかし「典型的」な場合には，原点から  $\sqrt{\text{Var}[S_N]} = \sqrt{N}$  くらい (これ以内) の距離のところにいる，と期待される. 要するに，表と裏が入り交じって出たために，**原点付近で行きつ戻りつ**した結果， $\sqrt{N}$  くらいまでしか行けないのだ.

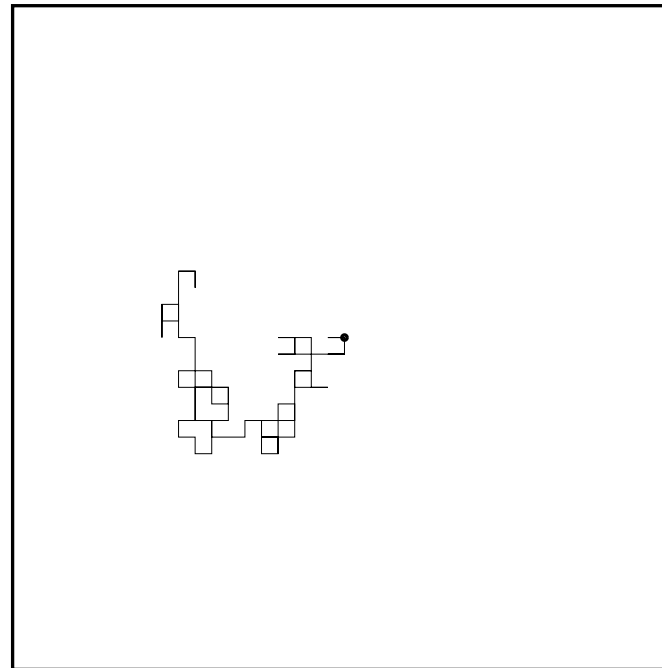
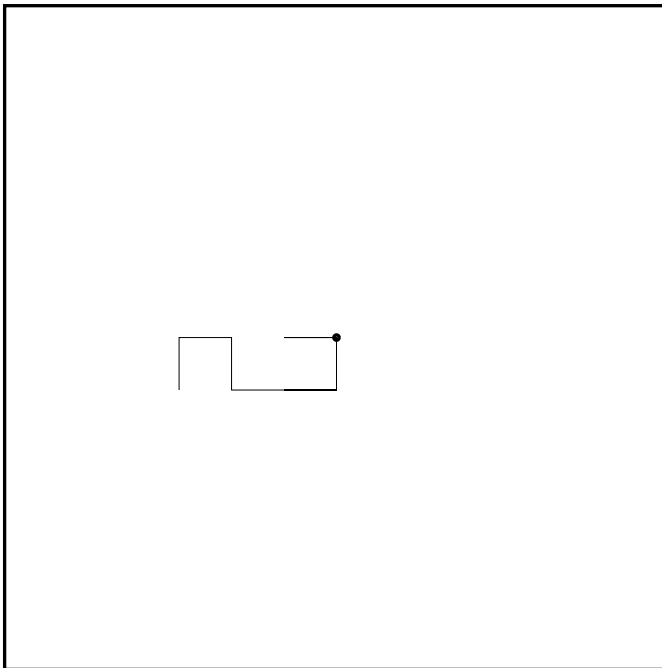
## 3.2 高次元単純ランダムウォーク

---

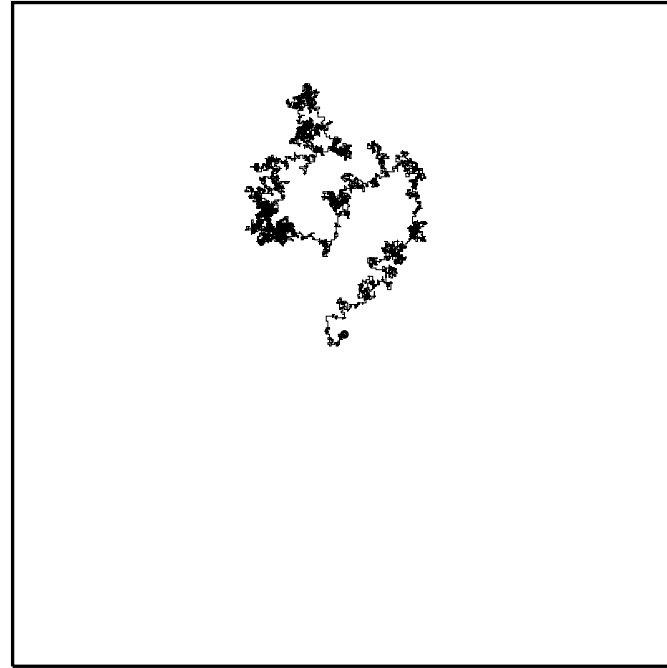
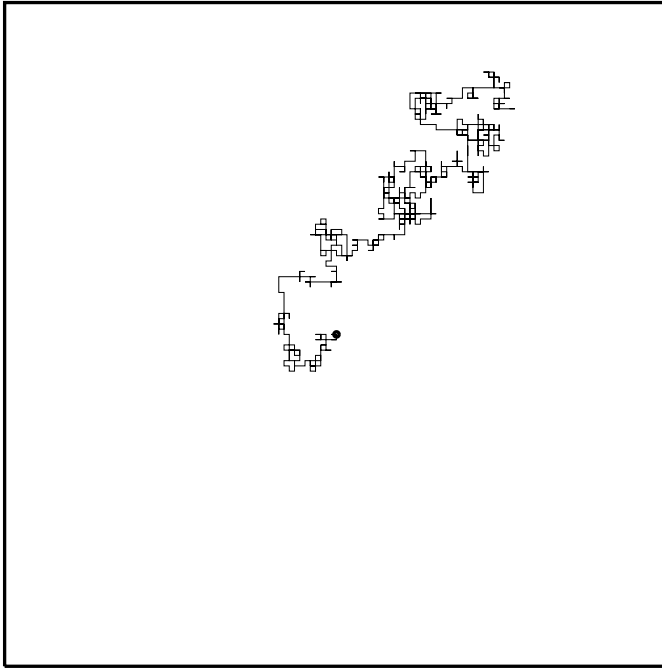
平面上の原点に人がいて、確率  $\frac{1}{4}$  ずつで東西南北の一つの向きに一歩進む。  $N$  歩後にはどの付近にいるか？（2次元単純ランダムウォーク）

2次元ランダムウォークの例：図示の範囲は  $\pm 2\sqrt{N}$  で、原点（出発点）は小さな黒丸。以下、 $N_{\text{step}}$  までの軌跡を表す。

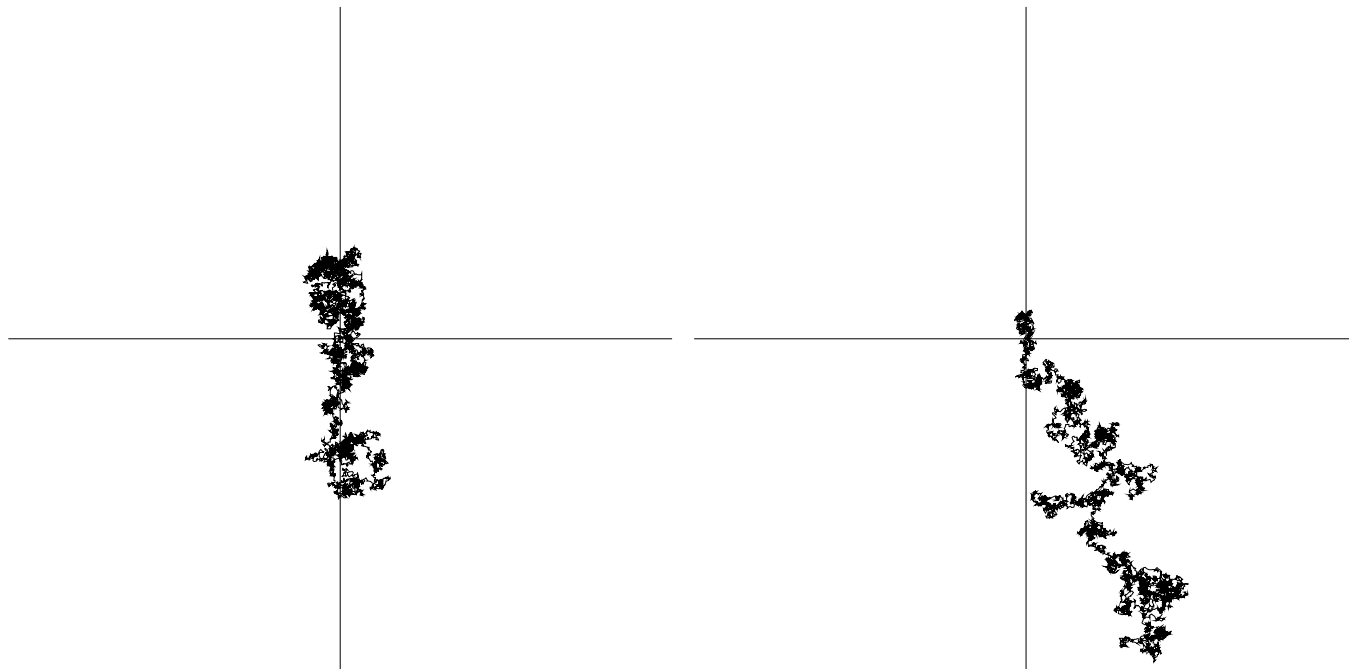
$N = 10, 10^2$



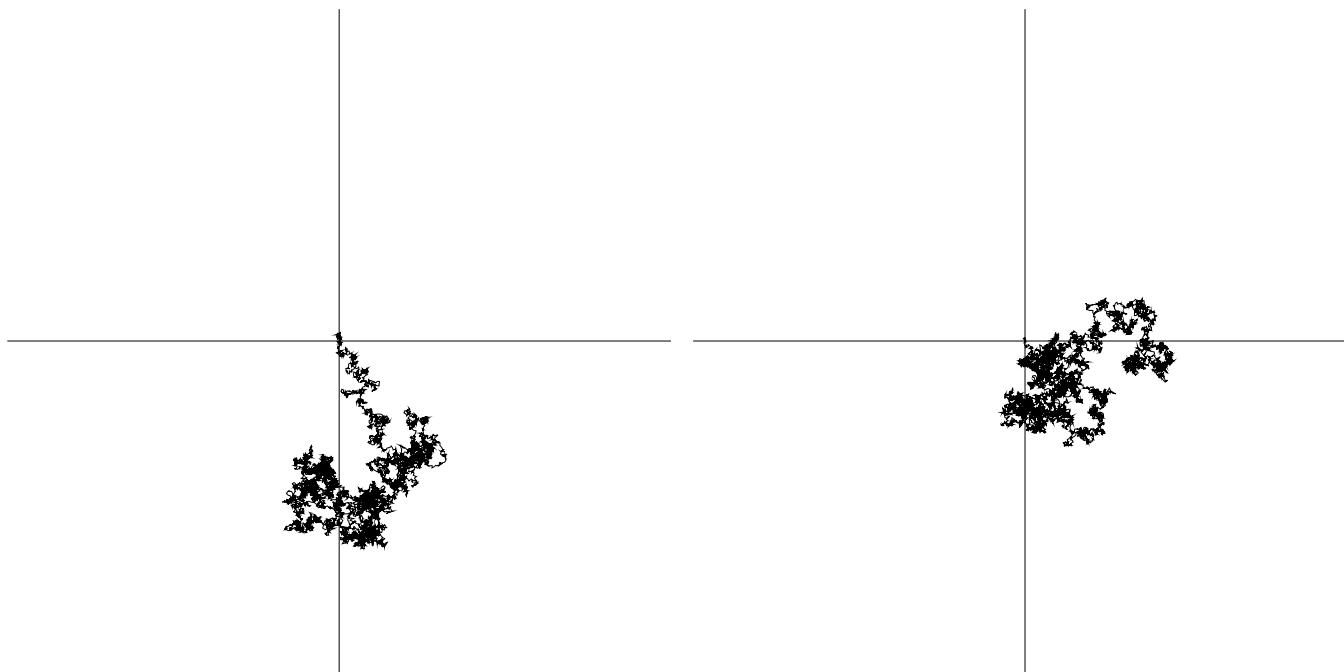
$$N = 10^3, 10^4$$



$N = 10^5, 10^6$



$N = 10^7, 5 \times 10^7$





解析は1次元の時とほとんど同じ（ベクトルの足し算）。特に， $N$  歩目の位置について，1次元と全く同様にアインシュタインの関係式

$$\langle (N \text{ 歩後の原点からの距離})^2 \rangle = N \quad (3.5)$$

が成り立つ。

アインシュタインの関係式，(3.5) は3次元以上の単純ランダムウォークでも成り立つことが容易にわかる。また，ランダムウォークのモデル（この人の進み方）を少々変えても — 例えば，時々2歩分進むことにするとか — 概要は変わらない：この場合は適当な定数  $c$  を用いて

$$\langle (N \text{ 歩後の原点からの距離})^2 \rangle \approx cN \quad (3.6)$$

と書ける。1.1節の言葉で言うと，「平均2乗変位が  $N$  のオーダーである」「 $N$  歩後には，距離  $\sqrt{N}$  くらい離れている」ことはやはり成立。この意味で，ランダムウォークにおけるアインシュタインの関係は，**普遍的に見られる**現象の一つ。イントロの問題  $c$  や  $c'$  のヒントも与える。

### 3.3 3章のまとめ

---

- コイン投げを少し手直しして考えると，単純ランダムウォークの問題が簡単に解ける．
- $N$  歩の後には，大体，出発点から  $\sqrt{N}$  くらいの所にいる  
(Einstein の関係式)
- 以上の結果は考えている空間の次元によらない．  
(また，ランダムウォークの跳び方にも，あまり依存しない．)

(再帰性の問題)

ランダムウォークは，時間が経ったら出発点に戻ってくるか？

## 4 臨界現象へ

---

繰り返しになるが：

- 今までののは、数学的には解決された問題.
- 中心にあったのはたくさんの**独立な確率変数の和**.
- ( $N$  個の確率変数の和を  $S_N$  と書く), **独立性のおかげで  $\text{Var}[S_N]$  が大体  $N$  くらいになる**, つまり
- $N$  **この独立な確率変数の和は  $\sqrt{N}$  くらいのバラツキをもっている**
- 中心極限定理は非常に**普遍的**に成り立つ.

**独立でない場合は大変に難しい！！** 一見なんでもあり.  
そのような場合でも何か普遍的に言えるのか？

**$d$ -次元の正方格子**とは、 $d$ -次元の空間のなかで、座標の各成分が整数値をとっているような点の全体をいう.

$d$ -次元正方格子の点の一つ一つを**サイト**, 隣り合ったサイトのペア (つまり、隣り合ったサイトをつなぐ線分) を**ボンド**という.

## 4.1 自己回避ランダムウォーク (SAW)

今までのランダムウォークは、過去の履歴に関係なく、座標軸の $2d$ 方向にどこでも動けた。空気中の分子の運動などを表すには自然な設定。

しかし、溶液中に長い線のような高分子が入っている場合はどうか？

- 熱運動のため、高分子はギザギザに折曲がりながら、溶液中を漂う  
→ ランダムウォーク的側面
- 高分子を形作っている分子や原子は互いに交わらない — **新しい制約**

**Self-Avoiding Walk (SAW) の問題**：今までのランダムウォークの問題において、「**その軌跡が自分自身と交わってはいけない**」の条件（**自己回避条件**）を付加してみる。そして、 $N$ -ステップのSAWの端から端までがどのくらいの距離になっているか（つまり、平均2乗変位がどのくらいのオーダーか）を考えたい。

「軌跡が自分自身と交わらない」ためには、各ステップが独立ではないため — つまり、自己回避条件のために**独立性が崩れる**。さらに、ウォークが長くなればなるほど、自分の過去も長くなり、それをすべて避けるのは大変。**未解決問題の宝庫**になっている。

- 考えている空間の次元を  $d$ ,
- 原点から出発する  $n$ -ステップの SAW の数を  $c_n$ ,
- $n$ -ステップの SAW の平均二乗変位を  $(l_n)^2$  と書く ( $l_n$  が  $n$ -ステップの平均の拡がり)

単純ランダムウォークの場合,  $c_n = (2d)^n$ ,  $(l_n)^2 = n$ .

ところが, SAW では1次元以外ではこれらの一般式はわかってない.

例えば  $c_n$  は  $d = 2$  で70程度,  $d = 3$  では  $n \leq 40$  程度しか求められていない.

→ 力技の計算では、もう限界。真の数学の出番！

以下は証明されている：

- 次元に依存する定数  $\mu$  があって、 $n \rightarrow \infty$  では  $c_n \approx \mu^n$  と書ける。  
(より正確には、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n)^{1/n} = \mu$ ).
- 更に、 $\mu^n \leq c_n \leq \mu^n e^{n^\alpha}$ . ここで  $\alpha$  は1より小さい定数である

これ以上の一般論はない。例えば、単純ランダムウォークよりも  $l_n$  が大きいはずだが（自分を避けるためには、遠くへ行った方が有利）、これすら証明されていない。現在の予想は以下の通り：

- a. ある定数  $\gamma, \nu$  があって、 $n \rightarrow \infty$  で  $c_n \approx \mu^n n^{\gamma-1}$  および  $l_n \approx n^\nu$  が成り立っているだろう。（この  $\gamma, \nu$  を**臨界指数**という。）
- b. 定数  $\mu$  はモデルを少し変える（例：1ステップで遠くまで跳べるようにする、など）と値が変わる。しかし、 $\gamma, \nu$  は**考えている空間の次元のみで決まる**非常に安定な量だろう。（**臨界指数の普遍性**）。
- c. 一般に臨界指数の値は次元による。しかし、臨界指数の間には  $(2 - \eta)\nu = \gamma$  のような関係式が成り立つ。（**スケーリングの関係式**、 $\eta$  は別の臨界指数。）

- d. 4次元より上では,  $\gamma = 1, \nu = \frac{1}{2}, \eta = 0$  だろう. (平均場的な臨界指数の値. また, 「○○次元より上では平均場的」となる次元○○のことを臨界次元と呼ぶ.) つまり, SAWの臨界次元は4だろう.
- e.  $d = 2$ では  $\gamma = \frac{43}{32}, \nu = \frac{3}{4}, \eta = \frac{5}{24}$  だろう.

4次元を境にしてSAWの様子が変わる(であろうこと)は非常に興味深い. → SAWの次元との関連

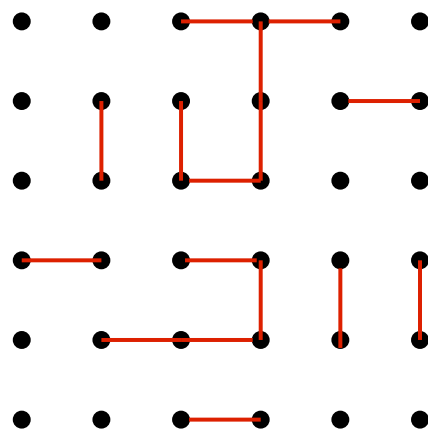
現在, 予想a,b,c,eは2,3,4次元では未だに予想であり, 証明されている訳ではない. ただし, 2次元についてはここ数年で非常に大きな進歩があり, 予想a,b,c,eが証明されるのも時間の問題かもしれない. また, 5次元以上での予想a~dは1985年から1990年にかけて証明された.

(注) 単純ランダムウォークの場合,  $\gamma = 1, \nu = 1/2, \eta = 0$ で, 上のa,b,cはすべて簡単に確かめられる.

## 4.2 パーコレーション

パーコレーションとは、大きな岩に小さな亀裂がたくさん入った場合に、その亀裂がつながって岩の中に水が浸透 (percolate) していくような現象をモデル化したもの。

- それぞれのボンドはランダムに亀裂になったり、ならなかったりする。
- あるボンドが亀裂になる (水が通る) 確率は  $p$  (亀裂にならない確率は  $1 - p$ )
- 各ボンドの状態は他のボンドとは**独立**に決める



red = occupied bonds



## 問題は

- 端から端まで亀裂だけをつないだ通り道ができるかどうか？
- 特に，原点から無限遠まで亀裂の道でつながるかどうか

など（亀裂がつながれば岩の表面から深部まで水がしみ込める．つながらないなら，しみ込めない．）

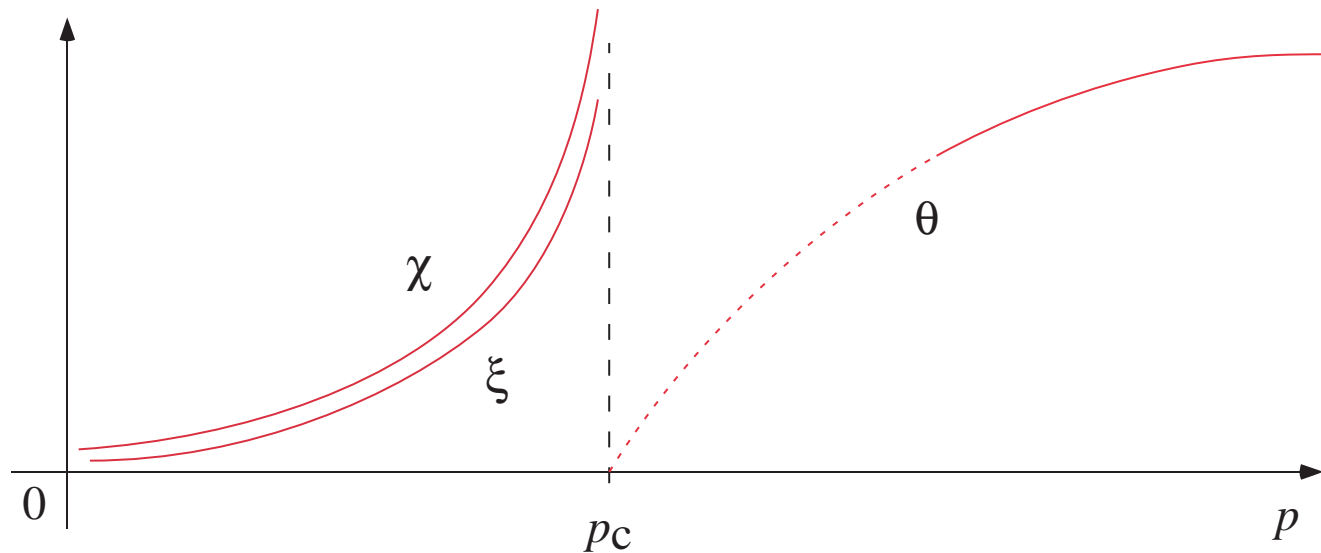
各ボンドは独立だが，「通り道」によるつながりを考えたのがポイント（難しい）．

以下の量を特に考える：

- 原点が無限遠につながる確率を  $\theta(p)$
- 原点が平均して何個の点とつながっているか，その期待値を  $\chi(p)$
- 原点がこのくらいの距離までつながっているという距離の目安を  $\xi(p)$

## 証明された事実として

- $0 \leq p \ll 1$  では、原点が無限遠までつながる確率  $\theta(p)$  はゼロ.
- 2次元以上では、 $p \approx 1$  なら、 $\theta(p) > 0$ .
- 2次元以上では  $0 < p_c < 1$  なる「臨界確率」があって、
  - $p < p_c$  では  $\theta(p) = 0$ ,  $\chi(p) < \infty$ ,  $\xi(p) < \infty$ .
  - $p > p_c$  では  $\theta(p) > 0$ ,  $\chi(p) = \infty$ ,  $\xi(p) = \infty$ .



更に、厳密には証明されていない部分もあるものの、以下の予想がある。

- a. ある定数（**臨界指数**） $\gamma, \nu, \beta$ があって、
  - $p \nearrow p_c$ では  $\chi(p) \approx (p_c - p)^{-\gamma}$ ,  $\xi(p) \approx (p_c - p)^{-\nu}$ .
  - $p \searrow p_c$ では  $\theta(p) \approx (p - p_c)^\beta$となっているだろう。
- b. 臨界確率  $p_c$  はモデルを少し変える（例：斜めにも水がしみ通れるようにする、など）と値が変わる。しかし、 $\gamma, \nu, \beta$ は考えている次元のみで決まる、非常に安定な量だろう（**臨界指数の普遍性**）。
- c. 一般に臨界指数の値は次元による。しかし、臨界指数の間には  $(2 - \eta)\nu = \gamma$  のような関係式（**スケーリング則**）が成り立つ。
- d. 6次元より上では、 $\gamma = 1$ ,  $\nu = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = 1$ ,  $\eta = 0$  だろう（平均場的な臨界指数の値；臨界次元は6）。
- e.  $d = 2$ では  $\gamma = \frac{43}{18}$ ,  $\nu = \frac{4}{3}$ ,  $\beta = \frac{5}{36}$  だろう。

定性的にはSAWと同じような予想である。SAWの場合と同じく、これらは未だに証明されていない**未解決問題**。ただし、系の次元が十分に高いとき（19次元以上、適切な条件をつけると7次元以上）には証明されている。また、2次元での最近の進歩には目覚ましいものがある。

## 4.3 磁石のモデル（スピン系）

---

身の回りにある磁石（永久磁石）は熱していくと、ある温度以上で磁力を失います。この現象を数学的にモデル化したのが「イジングスピン」系とよばれるものです。

このモデルでは実際の磁性体を理想化して、結晶の各原子が小さな磁石（スピン）からなっていると考えます。それぞれのスピンは熱運動によってランダムに向きを変えますが、同時に、互いに並び合いたいという傾向も持っています。スピン同士が並び合いたい傾向と、熱運動によりランダムになる傾向のどちらが強いかで、磁石になったりならなかったりすると考えるのです。

もう少し詳しく言うと、以下のようになります。まず、結晶をモデル化して $d$ -次元の格子を考えます。格子の各点 $x$ にスピン（ $\phi_x$ ）が乗っていると、スピン変数 $\phi_x$ は $+1$ と $-1$ の値をとると考えます。そしてスピン同士の相互作用によるスピン系のエネルギー（ハミルトニアン）は

$$H = -J \sum_{\langle x,y \rangle} \phi_x \phi_y \quad (4.1)$$

となると仮定します ( $\langle x, y \rangle$  は隣り合った格子点のペアについての和). さて, 格子上のスピンはそれぞれの  $\phi_x$  が  $\pm 1$  の値をとれる訳ですから, 無数の実現可能性があります. しかし, ある特定のスピン配位が実現される確率は, 統計力学の一般原理によりボルツマンファクター

$$e^{-\beta H} \quad (4.2)$$

に比例すると考えるのです. ここで  $\beta$  は温度の逆数に相当する正の数です.

このモデルは第2節で考えてきた独立な確率変数の問題を, 独立でないものに拡張したものになっています. つまり,  $\beta = 0$  (物理の言葉では超高温の極限) では  $H$  の値がなんであってもスピンの配位の実現確率は同じです. つまり, この場合には各スピンが独立にランダムな値をとっていることになり, まさに第2節の問題そのものになります.

一方,  $\beta = +\infty$  (物理の言葉では絶対零度の極限) では,  $H$  の値が最小値をとるようなスピンの配位の実現確率だけが, その他の配位の実現確率よりも無限に大きくなってしまいます. つまり, この場合には  $H$  が最小値をとるようなスピンの配位だけが実現されるのです. 今考えているモデ

ルでは  $H$  が最小値をとるのは、すべての  $\phi = +1$  となったものか、すべての  $\phi = -1$  となったもののどちらかです。いずれの場合もスピンは完全にそろっており、スピンの和が巨視的な磁力となって現れる訳です。問題はこの中間でどうなっているかですが、パーコレーションの時と同じく、以下のようなことが数学的に証明されています。スピン変数の値の期待値を  $M(\beta)$  と書いて、これが磁石の強さを表していると考えます。また、下に出てくる  $\chi, \xi$  はパーコレーションでの対応物に類似した量です。

- $\beta$  が小さいところでは、結晶の持つ磁力  $M(\beta)$  はゼロである。
- 2次元以上では、 $\beta$  が十分に大きい場合、 $M(\beta) > 0$  である。
- 2次元以上では  $0 < \beta_c < 1$  なる「臨界逆温度」があって、
  - $\beta < \beta_c$  では  $M(\beta) = 0$ ,  $\chi(\beta) < \infty$ ,  $\xi(\beta) < \infty$ ,
  - $\beta > \beta_c$  では  $M(\beta) > 0$ ,  $\chi(\beta) = \infty$ ,  $\xi(\beta) = \infty$ .

更に、厳密には証明されていない部分もあるものの、以下の予想があります。

- a. ある定数（臨界指数） $\gamma, \nu, \beta$  があって、

-  $\beta \nearrow \beta_c$  では  $\chi(\beta) \approx (\beta_c - \beta)^{-\gamma}$ ,  $\xi(\beta) \approx (\beta_c - \beta)^{-\nu}$ .

-  $\beta \searrow \beta_c$  では  $\theta(\beta) \approx (\beta - \beta_c)^\beta$

となっているだろう.

b. 臨界逆温度  $\beta_c$  はモデルを少し変える (例: 隣り合っていないスピン同士にも相互作用が働く) と値が変わる. しかし,  $\gamma, \nu, \beta$  は考えている次元のみで決まる, 非常に安定な量だろう (臨界指数の普遍性).

c. 一般に臨界指数の値は次元による. しかし, 臨界指数の間には  $(2 - \eta)\nu = \gamma$  のような関係式が成り立つ.

d. 4次元より上では,  $\gamma = 1$ ,  $\nu = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $\eta = 0$  だろう (平均場的な臨界指数の値; 臨界次元は6).

e.  $d = 2$  では  $\gamma = \frac{7}{4}$ ,  $\nu = 1$ ,  $\beta = \frac{1}{8}$ ,  $\eta = \frac{1}{4}$  である.

繰り返すだけ紙の無駄とも思えるくらい, パーコレーションの時と似た結果になっています. 異なるのは臨界次元と臨界指数の値のみです. 今までのモデルと同じく,  $d > 4$  の結果は証明されています. また,  $d = 2$  のモデルは正確に解けるので, やはり証明されています.



## 4.4 まとめ：臨界現象の特徴

---

以上、3つの異なるモデルでの臨界現象について、数学的に証明されたことと予想されていることを列挙した。3つのモデルとも、良く似た振る舞いを示す（と予想されている）。特に、パーコレーションとイジングモデルはほとんど同じ。特徴を整理すると

- 「**臨界値**」 ( $p_c, \beta_c$ ) があって、臨界値を境にして系の定性的振る舞いが変わる。
- 臨界値に近づく際の系の振る舞いは少数の「**臨界指数**」で特徴づけられる
- 臨界値そのものはモデルの定義に大きく依存するが、臨界指数は系の次元などで決まる、非常に安定な（**普遍的な**）量である。
- 臨界指数の間にはある種の恒等式（**スケーリングの関係式**）がなりたつ。
- 系によって決まるある次元（**臨界次元**）があって、この次元より上では臨界指数は非常に簡単な値をとる

以上の特徴は、特に**臨界指数の普遍性は、実は第2節の中心極限定理にも見られた**。あの場合、 $N$ この確率変数の和は $\sqrt{N} = N^{1/2}$ のオーダーの拡がりを持っていた。この性質は（確率変数が**独立**なら）かなり一般に成り立つので「**臨界指数が1/2**」が普遍的に成立している。

ただし、ここのお話と第2節のお話には根本的な違いもある。

- 第2節の話は非常に広い確率変数に対して（独立性を少々破っても）成り立つ。
- ここでの臨界現象は、系のパラメーターを臨界値に近づけないと観察しない。

この意味で、ここでの臨界現象は中心極限定理の成り立つようなものよりも起こりにくいと言える。

このような複雑な問題への有効なアプローチが**くりこみ群の方法**と呼ばれるものだが、これはまたの機会にしましょう。