中間テスト（6/11）の解答編 — web version（線型代数 A, 2012.6.18）

大切なお願い：各問の得点の合計 —— 特に十の位 —— は間違っている可能性が高いから，各自，一度はチェックして下さい．これに限らず，皆さんには採点結果に対して文句を言う権利があるから，おかしいと思ったら文句を言ってください（もちろん，その文句通りに点が変わるかどうかはわからないけど）．

（得点分布は，さすがに web で公開するとまずいかも知れないので，略.）

全体的な講評

まあ，大体は予想通りの点数分布でした．問 2，問 5，問 6 が難しいだろうとは思っていましたので．みなさん，そこそこ健闘していたと思います.（もちろん，部分空間，基底，次元などの「直感的意味」がわからないという人も多いとは思いますが，まずは問 2，問 5，問 6 以外の問題ができることが必要です．問 2，問 5，問 6 以外の配点は 60 点ですから，上の分布から見ても，このクラスの 2/3 はまあまあ頑張っていると言えるでしょう.）

なお，非常に実力がありそうだが，計算ミス等であまり点が伸びなかった人も少数，見受けられました．線型代数はどうしても計算ミスがひびいてしまう側面があります．悔しいでしょうが，ここは捲土重来を期して，より励んで頂ければと思います.

（注）努力をしているのが行間からにじみ出ているのだが，なかなか理解が追いつかない人も例年，何人かいます．このような人はなかなかつらいとは思いますが，もう少し努力を続けてほしい．高校とかなり内容が異なるから，始めは大変なのは仕方ないのです．騙されたと思って夏休みまででも必死の努力を続ければかなり展望が違ってくるはずです．ただしその際，間違ったやり方でやっていても効果は上がらない．この学期の最初にも言った事ですが，以下のような点をもう一度思い出してください.

- わからない事は鵜呑みにせず，納得するまで考える.「納得できない解答を丸覚え」は時間の無駄だ.
- それでもわからないから，友達や僕（やほかの教官）に訪ねる．考えようとして放っておくよりは，友達などに聞いた方が良い場合も多い．質問すると，わかったつもりの事がわかってないことに気づいたり，自分で解決してしまうこともある.

（以下の解答集にもミスがあるかもしれないから，鵜呑みにしない事．なおページ数の節約のため，縦ベクトルを横ベクトルの形で書いたところがある.）

問 1：思ったよりも，皆さん，苦戦してました．特に (3) ができた人は 1/3 くらい？

(1) ベクトル $\overrightarrow{OX} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ は $x - y + z = 0$ を満たしている．このようなベクトルを $\overrightarrow{OX_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ と $\overrightarrow{OX_2} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ とすると，$z_j = -x_j + y_j$ $(j = 1, 2)$ がなりたっている．従って，その和は $\overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OX_2} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}$ であるが，これは $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 - y_1 + z_1) + (x_2 - y_2 + z_2) = 0 + 0 = 0$ となるので，ちゃんと W の元である．スカラー倍も同様にして，$k\overrightarrow{OX} \in W$ が言える．和とスカラー倍が W の中で定義されているので，部分空間である.

基底は $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ で，次元は 2.（ここのところもちゃんと説明してほしいが，その辺りはレポートで散々やったので略.）

(2) 部分空間ではない．例えば，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ は W の元だが，その 2 倍 $2\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ は W の元ではないから.（「和」もやはりダメなことはすぐにわかる.）

(3) これは図形として考えれば，(1) を平行移動しただけなので，全く同じ解答になるはずなのですが，あまりできていませんでした．数式を使ってやれば，以下のようになります．問題のベクトルは $\overrightarrow{AY} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z-2 \end{bmatrix}$ で，$x-2-y+z=0$ が満たされている．そこで，$x-2$ を X とおいてやれば，問題のベクトルは (X, y, z) with $X-y+z=0$ となって，これは (1) と全く同じ形である．従って，(1) と同じ結論になる．

(4) 部分空間でない．例えば，$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は W の元だが，$2\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ はそうではないから．(同様に,「和」もうまく行かない事がわかります.)

問 2： 予想通り，ほとんどできていませんでした．講義中に「考えておけ」と言ったんですがねえ...
実のところ，問 1 の (3) が大きなヒントになっています．あの平行移動の状況を数式で表せば良いのです．ただし，すべて x, y, z の言葉で表すのが重要です. (今はあくまで x, y, z で与えられたものの「和」や「スカラー倍」を定義したいので.)

問 1 の (3) をヒントにして考えましょう．$\overrightarrow{AY}$ の成分を (X, Y, Z) と書くと，問 1 の (3) では，和とスカラー倍を

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} X+U \\ Y+V \\ Z+W \end{pmatrix}, \qquad k\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} kX \\ kY \\ kZ \end{pmatrix}$$

と定義することを考え，これでうまく部分空間になった訳です.（$A =: B$ とは，A の定義を B とする，の意味.）

だから，今回も上と同じ定義を用いれば線型空間になるはず．(X, Y, Z) と (x, y, z) の関係は

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = z-2$$

だったので，これを用いて，上の和の定義を全て書き直してやれば良いのです．

具体的には，(x, y, z) と (u, v, w) の和は，上の (*) の左の式の右辺になるように定義します．ただし，(*) の右辺は大文字の言葉で —— つまり，点 A からの変位ベクトルの言葉で — 書いてありますから，これを更に小文字で — つまり，原点からの変位ベクトルの言葉で — 書き直す必要があります．つまり，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad \text{は} \quad \begin{pmatrix} X+U \\ Y+V \\ Z+W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+u \\ y+v \\ z+w-4 \end{pmatrix} \quad \text{を小文字の言葉で書いたもの}$$

としたい．上の右辺が $\overrightarrow{AW}$ だとすると，

$$\overrightarrow{OW} = \begin{pmatrix} x+u \\ y+v \\ z+w-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+u \\ y+v \\ z+w-2 \end{pmatrix}$$

となっているので，最終的に

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+u \\ y+v \\ z+w-2 \end{pmatrix}$$

というのが，和の定義です．スカラー倍も同様にして

$$k\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ k(z-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ k(z-2)+2 \end{pmatrix}$$

とすればよろしい．

実際，これで大丈夫なことは，確かめるべきです．例えば，スカラー倍の右辺が本当に条件を満たしているか，ですが

$$kx - ky + \{k(z-2)+2\} = k(x-y+z-2)+2 = 0+2 = 2$$

で，確かに条件を満たしています．(和の方は各自で確かめてください．)

また，線型空間の公理の 8 つの条件を満たすことも確かめる必要がありますが，やってみれば大丈夫なことはわかります．交換法則はまあ自明として，例えばゼロ元については，もちろん，点 A に相当する $(2,0,0)$ がゼロ元であることはすぐに確かめられます．また結合則，分配則についても，やって行けば確かに正しいのがわかります．

問３：(1) （あ）から．線型結合を作ってみると

$$\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} + \gamma\boldsymbol{z} = (3\alpha - 2\beta + \gamma)\boldsymbol{a} + (-7\alpha + 2\beta + 3\gamma)\boldsymbol{b} + (4\alpha - \beta - 2\gamma)\boldsymbol{c}$$

となっている．これが $\mathbf{0}$ に等しいためには（$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次独立なので）

$$3\alpha - 2\beta + \gamma = 0, \qquad -7\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0, \qquad 4\alpha - \beta - 2\gamma = 0$$

が必要充分である．

あとはこれを解く．例えば，3 つの式をすべて足すと $-\beta + 2\gamma = 0$ つまり $\beta = 2\gamma$ が出る．これを最初と最後の 2 つに入れて

$$3\alpha - 3\gamma = 0, \qquad 4\alpha - 4\gamma = 0$$

を得る．要するに（α は任意で）$\gamma = \alpha, \beta = 2\alpha$ ということになる．ゼロ以外の解があるので,（あ）は一次従属とわかる．

（い）も同様にやる．こんどは

$$\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{w} = (3\alpha - 2\beta + 2\delta)\boldsymbol{a} + (-7\alpha + 2\beta + \delta)\boldsymbol{b} + (4\alpha - \beta - \delta)\boldsymbol{c}$$

なので，これが零ベクトルに等しいためには

$$3\alpha - 2\beta + 2\delta = 0, \qquad -7\alpha + 2\beta + \delta = 0, \qquad 4\alpha - \beta - \delta = 0$$

が必要充分である．

これを解くと，$\alpha = \beta = \delta = 0$ 以外の解はないことがわかる（例えば，第 2 式と第 3 式を足すと，$-3\alpha + \beta = 0$, つまり $\beta = 3\alpha$ が出る．これを第一式，第二式に代入して

$$-3\alpha + 2\delta = 0, \qquad -\alpha + \delta = 0$$

となるが，これを満たす α, δ はゼロしかない）．よって（い）は一次独立である．

(2) （あ）について．$\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} + \gamma\boldsymbol{z} = \boldsymbol{p}$ の両辺の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の係数を等しいとおくと，こんどは

$$3\alpha - 2\beta + \gamma = 4, \qquad -7\alpha + 2\beta + 3\gamma = -2, \qquad 4\alpha - \beta - 2\gamma = 1$$

となる．またもや，3 つの式を足すと $-\beta + 2\gamma = 3$ となるから，$\beta = 2\gamma - 3$．これを最初と最後の 2 つに入れると

$$3\alpha - 3\gamma + 2 = 0, \qquad 4\alpha - 4\gamma + 2 = 0$$

となる．これは無理だから，解がない．つまり，線型結合では書けない．

（い）について．こんどは

$$3\alpha - 2\beta + 2\delta = 4, \qquad -7\alpha + 2\beta + \delta = -2, \qquad 4\alpha - \beta - \delta = 1$$

を満たす α, β, δ を求めたい．これを解くには例えば，3 つ足して $-\beta + 2\delta = 3$ つまり $\beta = 2\delta - 3$ を得て，これを最初と最後の式に入れて

$$3\alpha - 2\delta + 2 = 0, \qquad 4\alpha - 3\delta + 2 = 0$$

を得て，これの辺々を引いて $\alpha=\delta$ を得る．これを上に入れて $\alpha=\delta=-2$，$\beta=2\delta-3=-7$ となる．つまり

$$\boldsymbol{p}=-2\boldsymbol{x}-7\boldsymbol{y}-2\boldsymbol{z}$$

(3) （あ）では既に $\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$ であることがわかっている．ので，$\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}$ の線型結合で書ける．更に，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{z}$ は平行でないから（$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の係数が比例しないから）独立である．従って，基底の一例は $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle$ で，次元は 2.

(4) （い）では，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{w}$ が線型独立なのは既に言ったし，U のすべての元はこの 3 つの線型結合で書ける．なので，基底の一例は $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{w}\rangle$ で，次元は 3.（**最後のところ，授業中に配ったプリントでは w が z となってましたが，授業中に気づいて訂正した通り，w が正しいです．**）

問４：(1) と (2) はレポートでやったと同様に

$$W_1 \text{ の基底は } \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \text{ で，その次元は 2.} \qquad W_2 \text{ の基底は } \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \text{ で，その次元は 2}$$

(3) W_3 は要するに問題の (a)(b) にある 4 つの方程式をすべて満たすべし．$x_2=x_3=x_4$ がすぐにわかり，これを他にいれると $x_1=0$ もでる．x_2 は任意なので，

$$W_3 \text{ の基底は } \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \text{ で，その次元は 1}$$

(4) W_4 の元は定義から $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ （ここで $\boldsymbol{x}_1\in W_1$，$\boldsymbol{x}_2\in W_2$）の形になっている．これらの和とスカラー倍は $X=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2, Y=\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2$ について

$$X+Y=(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)+(\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2)=(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1)+(\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y}_2), \qquad kX=k(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=k\boldsymbol{x}_1+k\boldsymbol{x}_2$$

であるが，W_1,W_2 が部分空間なので

$$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1\in W_1, \qquad \boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y}_2\in W_2, \qquad k\boldsymbol{x}_1\in W_1, \qquad k\boldsymbol{x}_2\in W_2$$

となっている．つまり，$X+Y, kX$ はともに，W_4 の定義の形を満たしている．なので $X+Y\in W_4$ かつ $kX\in W_4$ が結論でき，W_4 は部分空間だとわかる．

(5) W_1,W_2 の元はそれぞれ

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

の形をしている（$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ は任意）．なので，W_4 の元であるその和は

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

の形である（$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ は任意）．つまり，W_4 は上の 4 つのベクトルで張られている．

さて，あとはこの 4 つのベクトルからいらぬものを引っ込抜けば良い．この 4 つが独立でないことはすぐにわかる．そこで例えば，最初の 3 つを見ると，これは独立である．なので，

$$W_4 \text{ の基底は } \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ で，その次元は } 3.$$

問５： (1) レポートでも散々やったので，答えだけ．次元は 4 で，基底の一例は $\langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$.

(2) W が部分空間になることをまず，示す．$f, g \in W$ とすると，

$$f'(1) = 0, \qquad g'(1) = 0$$

が成り立っている．なので，

$$(f+g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 0 + 0 = 0, \qquad (kf)'(1) = k\,f'(1) = 0$$

であって,「和」と「スカラー倍」が W の中にあることがわかり，部分空間である． □

次に，基底と次元を求める．W の元は V の元でもあるから，任意の $f \in W$ は（適当な係数 f_0, f_1, f_2, f_3 を用いて）

$$f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3$$

とかけるはず．ここで $f'(1) = 0$ とやると，係数の間に条件

$$f_1 + 2f_2 + 3f_3 = 0$$

が成り立つ事がわかる．逆に，これが成り立てば，$f'(1) = 0$ となるので，これは必要充分条件である．従って W の任意の元 f は（f_2, f_3 は任意）

$$f(x) = f_0 + (-2f_2 - 3f_3)x + f_2 x^2 + f_3 x^3 = f_0 + f_2(x^2 - 2x) + f_3(x^3 - 3x)$$

と書ける．右辺の 3 つの関数は独立なので (次数を考えれば明らか)，W の次元は 3，基底の一例は $\langle 1, x^2 - 2x, x^3 - 3x \rangle$.

(3) まず，部分空間であることをいう．$f, g \in U$ の場合，

$$\int_0^2 f(x)dx = 0, \quad \int_0^2 g(x)dx = 0$$

がなりたっている．従って，任意の実数 k に対して，みんなの知ってる積分の性質から

$$\int_0^2 \{f(x) + g(x)\}dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 g(x)dx = 0 + 0 = 0$$

$$\int_0^2 \{kf(x)dx = k\int_0^2 f(x)dx = k \times 0 = 0$$

となるので,「和」も「スカラー倍」も W の中で定義できる．従って，部分空間である．

基底と次元を求めよう．U は W の部分空間故，$g \in W$ は適当な係数を用いて

$$g(x) = g_0 + g_2(x^2 - 2x) + g_3(x^3 - 3x)$$

と書けるはずである．これを $\int_0^2 g(x)dx = 0$ に代入してみると

$$g_0 = \frac{2}{3}g_2 + g_3 \qquad (g_2, g_3 \text{ は任意})$$

という条件が，$g \in U$ の必要充分条件とわかる．つまり，

$$g(x) = g_2\Big(x^2 - 2x + \frac{2}{3}\Big) + g_3\big(x^3 - 3x + 1\big) \qquad (g_2, g_3 \text{ は任意})$$

とかけるのだ（**授業で配ったプリントは $2/3$ の符号が間違ってました．正しくは上の通り，$+2/3$ です**）．右辺の 2 つの関数はやはり独立なので，U の基底は $\langle x^2 - 2x + 2/3, x^3 - 3x + 1 \rangle$ で，次元は 2.

（注意；**授業中のプリントは授業中に気がついたように，以下が間違っていたので，訂正**）実はこの問題，$(x-1)$ で展開して考えると大変に簡単になる．$x = 1$ での微係数がゼロということは $(x-1)$ の項がない，ということなので，W の基底の別の例として $\langle 1, (x-1)^2, (x-1)^3 \rangle$ が得られる．

また，U については，$x = 1$ が積分区間の中間なので，積分がゼロということは，$(x-1)$ の奇数ベキは O.K. ということになる．ただし，W の方で $(x-1)$ が既に消えているから，$(x-1)^3$ が残る．偶数ベキについては，うまく線型結合をとって積分がゼロになるようにするしかない．これは $3(x-1)^2 - 1 = 3x^2 - 6x + 2$ が必要充分である．結果として，U の基底の別の例として $\langle 3x^2 - 6x + 2, (x-1)^3 \rangle$，が得られる．基底を構成するベクトルのうち，前の方は上の解答例の 3 倍．後の方は上の解答例の線型結合になっている．

問６：(1) まず,「和」と「スカラー倍」が問題の漸化式を満たす事をチェックする．数列 a_n, b_n が問題の漸化式を満たすなら，

$$\begin{aligned}
&(a_{n+3} + b_{n+3}) - 2(a_{n+2} + b_{n+2}) - (a_{n+1} + b_{n+1}) + 2(a_n + b_n) \\
&= (a_{n+3} - 2a_{n+2} - a_{n+1} + 2a_n) + (b_{n+3} - 2b_{n+2} - +b_{n+1} + 2b_n) = 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

となるし，と任意の実数 k に対して，

$$(ka_{n+3} - 2ka_{n+2} - ka_{n+1} + 2ka_n) = k(a_{n+3} - 2a_{n+2} - a_{n+1} + 2a_n) = 0$$

となって，確かにこれらは V の元になっているので,「和」と「スカラー倍」が定義できている．あと,，C1〜C8 の 8 つの性質を確かめねばならないが，これは（講義中にも説明したように）それぞれの n で考えれば，実数の加法と乗法の性質から成り立つ．

よって，すべての性質が成り立つので，V は線型空間である．

(2) $a_n = \alpha^n$ を漸化式に代入すると

$$0 = \alpha^{n+3} - 2\alpha^{n+2} - \alpha^{n+1} + 2\alpha^n = \alpha^n\,(\alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha + 2) = \alpha^n\,(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha-2)$$

となる．ので，$\alpha = 0, 1, -1, 2$ の場合がある.（$\alpha = 0$ はあまりにショウモナイし，後々の役に立たないので，まあ，なくても良い.）

(3) まず，この漸化式は,「a_1, a_2, a_3 を決めたら他の a_n が決まる」形になってることに注意する．つまり，任意の初期条件 a_1, a_2, a_3 からできる数列を表す事ができたら良い．(2) がヒントだと思って，

$$a_n = \alpha\,1^n + \beta\,(-1)^n + \gamma\,2^n = \alpha + (-1)^n\beta + 2^n\,\gamma$$

と書けるかどうかをまず，考えよう．この右辺の形のものが漸化式をみたすことは，V が線型空間なので保証されている．問題はその逆で，そのためには，α, β, γ をうまく選べば，どんな初期条件 a_1, a_2, a_3 も表せる事を言う必要がある．これは

$$a_1 = \alpha - \beta + 2\gamma, \qquad a_2 = \alpha + \beta + 4\gamma, \qquad a_3 = \alpha - \beta + 8\gamma$$

となるような α, β, γ がいつでも見つかるか？ということだ．

これは（辺々引き算して α, β を消去するなどすると解けて）実際に見つかると言える．なので，V の元は上の線型結合で書ける事がわかった．

次に，$1, (-1)^n, 2^n$ が独立であることを示す．これは

$$0 = \alpha + (-1)^n\beta + 2^n\,\gamma \qquad (\text{すべての正整数 } n \text{ について})$$