2012.06.17.

編入生向け特別授業（解析分野）演習問題のセット（5/11）

（以下の問題は「杉浦ほか「解析演習」（東大出版会）」からお借りしたものです．なお，*のついた問題は，面白いけど難しいので，後回しでも良いと思います.）

問 1： 各項が正である数列 $(a_n)_n$ が,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha$$

を満たすとき,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$$

の極限は何か？(存在するか否かを証明付きで判定し，存在するなら極限の値を求めよ.）

問 2： 各項が正である数列 $(b_n)_n$ が，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k=\infty$ を満たしているとする．また，別の数列 $(a_n)_n$ があって，a_n と b_n の間に

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c$$

の関係がある（c は有限の数）．このとき,

$$\sum_{k=1}^{n}a_k \Bigg/ \sum_{k=1}^{n}b_k$$

の，$n\to\infty$ での極限は何か？

問 3： 実数軸上で定義された実数値関数が関数 f が,

$$\text{すべての } x,y\in\mathbb{R} \text{ に対して}\quad f(x+y)=f(x)+f(y)$$

かつ，ある数 M があって

$$x\in[0,1]\quad\text{において}\quad |f(x)|\le M$$

を満たしているとする．このとき，f は連続関数である事をしめせ．また，f の形をできるだけ具体的に定めよ.

問 4： 関数列 $f_n(x)=nxe^{-nx^2}$ の，区間 $[0,1]$ における，$n\to\infty$ での収束を論ぜよ．つまり，極限はあるのか，あるとすれば極限はなにか，更にそのときの収束は一様か否か？

問 5*： 区間 $I=[0,1]$ 上で定義された，連続関数の列 $f_n(x)$ が，以下の 2 条件を満たすとする：

- すべての $x\in I$ において，$f_k(x)\le f_{k+1}(x)$，つまり，x の各点にて，$f_k(x)$ は k の広義増加関数.
- I において，$f_k(x)$ は $k\to\infty$ で，ある連続関数 $f(x)$ に各点収束する.

このとき，f_n は f に，I 上で一様収束することを示せ.

問 6*： 次の関数項級数を考える：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}$$

この級数が収束するような実数 x の範囲を求めよ．また，この級数が一様収束するような，実数 x の範囲を求めよ.

問 7： 各項が正の数列 $(a_n)_n$ を考え，$s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく．このとき，次の二つの級数のうち，片方が収束すればもう片方も収束することを示せ：

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \qquad と \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n}$$

問 8： 正項級数の代表的な収束判定条件，ratio test は「$\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<1$ ならば $\displaystyle\sum_n a_n$ は収束」と言う主張だが，これを証明せよ．ratio test についても同様に証明せよ.

編入生向け特別授業（解析分野）演習問題のセット（6/17版）

（以下の問題のいくつかは，裳華房の「函数論」という演習書からお借りしたものです．急いで作ったので，ミスが紛れ込んでいるかもしれません...）

問 9： $f(z) = 1/z$ の解析接続について，具体的に級数を用いて計算して納得せよ．具体的には以下のような考察を行え．

- まず $f(z) = 1/z$ を，$z = 1$ の周りでテイラー展開せよ．収束半径はいくつか？また，(同じことであるが) この級数が収束するような z の範囲（これを D_0 とする）は複素平面上でどうなっているか？
- 次に，上の D_0 内の適当な一点 z_1 をとり，この z_1 を中心にした級数で，上で求めた級数の解析接続になっているものを構成せよ．この新しい級数の収束範囲（これを D_1 とする）はどうなっているか？
- 次には，上の D_1 内の適当な一点 z_2 をとり，この z_2 を中心にした級数で，上で求めた級数の解析接続になっているものを構成せよ．この新しい級数の収束範囲（これを D_2 とする）はどうなっているか？
- 以下，原点の周りを回り，最終的に作った D_n が $z = 1$ を含むまでこの操作を繰り返そう．その結果を用いて，$z = 1$ を中心にした級数を作ってみよう．この結果は，最初の級数と同じだろうか？

問 10： $f(z) = z^{1/3}$ の解析接続について，問 9 と同じことを行え．

問 11： $f(z) = \log z$ の解析接続について，問 9 と同じことを行え．

問 12： （複素積分のいろいろな方法を用いて）以下の積分を求めよ．ただし，a, b は正の定数である．(典型的な問題を集めました.)

$$(1)\quad \int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + a^4} \qquad (2)\quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cos(2bx)\, dx \qquad (3)\quad \int_0^\infty \cos(x^2)\, dx \qquad (4)\quad \int_0^\infty \sin(x^2)\, dx$$

$$(5)\quad \int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2 + a^2}\, dx \qquad (6^*)\quad \int_0^\pi \tan(x + ia) dx \qquad (7^*)\quad \int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)}{x\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

$$(8)\quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} \qquad \text{ただし}\quad 0 < a < 1$$

なお，(7) の積分はもちろん，$x = 1$ でも広義積分と解釈すべし．

問 13： 以下の諸事実を証明せよ．

(1) $|z| < R$ において正則な函数 $f(z)$ に対して，$A(r) := \max_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z)$ と定義する．$A(r)$ は，$0 < r < R$ において，r の連続な増加函数である．

(2) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ は，$|z| = 1$ 上のすべての点を特異点として持つ．(よって，$|z| = 1$ を超えて解析接続はできない.)

(3) $|z| < 1$ で正則な函数 $f(z)$ に対して $|f(z)| \le (1 - |z|)^{-1}$ が成り立っているならば，その導関数に対して

$$|f^{(n)}(0)| \le (n + 1)!\, e$$

がなりたつ.（補足問題）これから，$f(z)$ の級数展開 $f(z) = \sum_n f_n z^n$ の係数について何が言えるか？