数学IA の講義メモ*

原　隆
九大数理
hara@math.kyushu-u.ac.jp

Last updated: January 20, 2013

概要

これは上記科目のための講義メモ（2013.01.20 最終版）です．

（受講生以外の方へのお断り）これはあくまで上記科目を受講した学生さんのためのもので，売り物になるくらいの品質で作っている訳ではありません．ところどころ，ミスもあるでしょう．もし，上記科目の受講生以外の方が奇特にも手に取ってくださった場合は，その点を十分了承した上でお使いくださるよう，お願いします．

目次

*2012 年度秋学期，毎週月曜 1 限，工学部地球環境工学科・建設都市工学コース用

1 微分方程式

1.1 微分方程式とは？

微分方程式とは何か，用語と「解」の概念などを解説する．

「未知関数 $y(x)$ とその導関数の入った方程式」を常微分方程式（ordinary differential equation, ODE）という．例（$'$ は x による微分を表す）：

- $y' = y$
- $y'' = -y$
- $y'' + xy' - y^2 = 0$

このとき，x を**独立変数**，$y(x)$ を**未知関数**という．

より一般には，未知関数が複数あるのも考える．つまり，未知関数が $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ の n 個あって，それらとそれらの導関数（と x）を関係づける方程式があれば，それを**常微分方程式 (ordinary differential equation, ODE)** という．例：

- 未知関数２つ，$y_1' = -y_2$，$y_2' = y_1$.
- 未知関数３つ，$y_1'' = y_2$，$y_2'' = y_3$，$y_3'' = y_1$.

上の例のように，いくつかの常微分方程式が連立されている場合，これを常微分方程式 系 ということがある．なお，以下では常微分方程式と言わず，単に微分方程式ということも多いだろう．

微分方程式（系）に現れる微分（導関数）の最高階数が m の時，その微分方程式（系）は m-階の微分方程式（系）という．

微分方程式（系）が，未知関数とその導関数に関して一次式である場合，その微分方程式（系）は**線型の微分方程式（系）**であるという．

微分方程式の意味　独立変数 x は多くの場合，時刻を表す．未知関数 $y(x)$ や $y_1(x), y_2(x), \ldots$ は問題にしたい量を表し，微分方程式はこれらの量の時間発展（これらの量が時間と共にどのように変化するか）を（間接的に）規定する．具体例を挙げておこう．

- ねずみ算：時刻 t におけるネズミ（バクテリア）の数を $N(t)$ と書く．餌がいっぱいあると，バクテリアは一定の割合で細胞分裂をくり返して増える．つまり，$N'(t) = \alpha N(t)$ である（$\alpha > 0$ はどのくらいの割合で分裂が起こるかを表す係数）．
- ニュートンの運動方程式 $\vec{F} = m\vec{a}$：粒子の位置を $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ と書くと，これは $mx_1'' = F_1$, $mx_2'' = F_2$, $mx_3'' = F_3$ ということ．$\vec{F}$ は普通は $\vec{x}(t)$ （粒子の位置）の関数なので，$\vec{x}(t)$ が未知関数，t が独立変数の連立微分方程式系（未知関数３個，２階）になっている．いうまでもなく，運動方程式は粒子の運動を決めるわけだ．
- タンクの水が流れていく問題

以下，しばらくの間は，１未知関数，一階の微分方程式 $y' = F(x, y)$ を考える．慣れてきたらもっと一般のも考える．いうまでもなく，この右辺の $F(x, y)$ は何でも良い．例えば，$F(x, y) = y$ なら考えている微分方程式は $y' = y$ になるし，$F(x, y) = y^2 - x$ なら $y' = y^2 - x$ になる．この書き方は以下でも使うから，慣れて欲しい．

微分方程式の解と初期条件　微分方程式 $y' = F(x, y)$ が与えられたとする．これを満たすような関数 $y = y(x)$ をこの微分方程式の**解**と呼ぶ．

微分方程式の解は普通は一杯ある．簡単な $y' = y$ を例にとると，$y(x) = e^x$ は解．でも，$y = 2e^x$ も解．$y = -e^x$ も解．すぐ後（1.2 節）で見るように，C を任意の定数として，$y = Ce^x$ はすべて解で，逆にこれ以外の解はない．（このように任意定数が出てくる事情は，不定積分の類似で考えると良いだろう．たとえば，$y' = x^2$ — これも立派な微分方程式 — の解は，単に x^2 の原始関数だから，$x^3/3 + C$ になるでしょ.）

さて，微分方程式が現実の運動を表しているとすると，上のたくさんの解の中から何か一つが選ばれているはずだ．それは**初期条件**を課すことで達成される．初期条件とは，独立変数 x のある値での未知関数の値を規定するものである．

（例） $y' = y$ という微分方程式に,「$x = 0$ で $y = 2$」という初期条件を課してみると，解は $y = 2e^x$ に限られてしまう（$y = Ce^x$ の形の解で，$y(0) = 2$ を満たすものを探せ）．

この例ではある時刻での y の値を決めると，解が一つに定まった．そうでない例もある．たとえば，ニュートンの運動方程式では，ある時刻での**粒子の位置と速度**の両方を与えないと，未来の運動が決まらない．より一般の場合にどのような初期条件を課すと解が一意に決まるのかは 1.3 節の内容（解の存在と一意性の定理）からわかる．

なお，任意定数 C を含んだ形の解を**一般解**，初期条件などを課したために任意定数がなくなった後の解を**特殊解**または特解ということもある．また,「微分方程式を解く」というのは初期条件が与えられていなければ一般解を求めることを指すし，初期条件も課されていれば初期条件を満たす特解を求めることを指す．

1.2 変数分離で解ける場合

微分方程式に慣れて貰うため,「変数分離」で解ける場合を簡単に解説する．

1 未知関数一階の微分方程式の中でも特殊な形をした

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(y)g(x) \tag{1.2.1}$$

を考える（右辺が x の関数と y の関数の**積**になっている）．今までにもこの解き方は習ったかもしれない．普通は

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)dx \tag{1.2.2}$$

とする．これは覚えやすくて便利だけど,「$\frac{dy}{dx}$ で一つの記号」と習ったことから考えるとちょっと変．どう考えるか？

答えは以下の通り．まず，問題の ODE を

$$\frac{1}{f(y)}\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{1.2.3}$$

と書き，この両辺を x で a から b まで積分する.（積分の上端は x にしたかったが，積分変数 x と混乱すると困るので，b とした.）右辺は勿論，$\int_a^b g(x)dx$ になる．左辺はと言うと，x から $y = y(x)$ への置換積分をやったと思うと，

$$\int_a^b \frac{1}{f(y(x))}\frac{dy(x)}{dx}dx = \int_{y(a)}^{y(b)} \frac{1}{f(y)}dy \tag{1.2.4}$$

となる．両者を引っ付けると，

$$\int_{y(a)}^{y(b)} \frac{1}{f(y)}dy = \int_a^b g(x)dx \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{y(a)}^{y(x)} \frac{1}{f(y)}dy = \int_a^x g(u)du. \tag{1.2.5}$$

上の右側では，積分変数を x から u へ変え，b を x と書いた．この式は,「$x = a$ にて $y = y(a)$」という初期条件の下で，$y(x)$ を x の関数として与えている — つまり，微分方程式の解が求まった訳だ．

いくつかの例を見てみよう.（他の例はレポートで）

・$y' = 3y$，初期条件は $y(1) = 2$．上のようにやってみると，

$$\int_2^y \frac{1}{y}dy = \int_1^x 3\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \log y - \log 2 = 3(x-1) \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = 2\,e^{3(x-1)}. \tag{1.2.6}$$

・空気抵抗入りの落体の運動．大気中でボールのようなものを落とす．空気抵抗はボールの速さに比例するので，比例定数を γ，時刻 t でのボールの位置を $z(t)$ と書いて，$mz''(t) = -mg - \gamma z'(t)$ と言う式が得られる．時刻 $t = 0$ で $z = 0$ に静止していた（つまり，$z(0) = z'(0) = 0$ が初期条件）ボールの運動を求めよ．答えは直感と合っているか？

1.3 解の存在と一意性

ここでは常微分方程式一般についての基本定理を述べる．この小節がこの講義の中で唯一「数学的」なものだし，教科書でもそれほど強調されていない部分である．でも，非常に大事な定理だから，我慢して聞いて欲しい．少なくとも**定理の主張は何か，その 意味や効能 はなにか**，だけは理解して欲しいのだ．

この定理は非常に一般に成り立つが，まずは 1 未知関数 1 階の場合について述べる．すなわち，考えるのは

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x,y), \qquad \text{初期条件は} \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.3.1}$$

という形の微分方程式だ（$y = y(x)$ が未知関数）．

定理 1.3.1 (微分方程式の解の存在と一意性) 微分方程式 (1.3.1) において，f が以下の条件を満たすと仮定しよう：

1. $f(x,y)$ は (x_0,y_0) を中心にした長方形 $D \equiv \{(x,y) \big| \, |x-x_0|<a, |y-y_0|<b\}$ で定義されており
2. $f(x,y)$ は D 上で x,y の連続関数で
3. 更に，定数 K があって，D 内の任意の (x,y_1) と (x,y_2) が以下を満たす：

$$\big| f(x,y_1) - f(x,y_2) \big| \le K\,|y_1-y_2| \qquad (\textit{Lipschitz}\ \text{条件}). \tag{1.3.2}$$

このとき，初期条件 $y(x_0)=y_0$ を満たす (1.3.1) の解が，

$$\big| x-x_0 \big| < a' \equiv \min\Big\{a, \frac{b}{M}\Big\}, \qquad M \equiv \max_{(x,y)\in D} \big| \, f(x,y) \, \big| \tag{1.3.3}$$

なる x に対して，一意に存在 する．

Remarks.

1. Lipschitz 条件がよく分からないと思う人は，これを

$$\Big| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \Big| < K \tag{1.3.4}$$

と置き換えて理解しても，この講義には十分である．(このように微分可能なら，Lipschitz 条件が満たされる)．

2. 解の存在だけ（一意性は問わない）なら，Lipschitz 条件は不要であるが，詳細には立ち入らない．
3. Lipschitz 条件を満たしていないと，解の一意性が崩れる例：$y' = y^{1/4}$ という ODE を，初期条件 $y(0)=0$ で考えると，この解には $y(x) \equiv 0$ （恒等的にゼロ）の他に，$y = \big(\frac{3}{4}x\big)^{4/3}$ というのもあって，一意性が破れている！
4. 未知関数の数が 2 以上，また微分方程式の階数が 2 以上の場合も類似の結果が成り立つ．これについては，後で簡単に触れる．

この種の定理の効用「解の存在」は実際の応用例ではほとんど自明である（と思いこんでいる）場合が多いから，そんなに有り難くはないかも．でも，一意性は非常に大事である：

- まず，一意性があれば，「**（どんな汚い手でも）解を見つけたらこっちの勝ち**」の戦略がとれる !! 見つけてきた解が実際に ODE を満たすことを確かめれば，これ以外には解がないんだから．場合によっては当てずっぽうでいろいろな $y(x)$ を微分方程式に代入し，たまたま解が見つかる場合もある．一意性があれば「これ以外には解がない」とわかるから，当てずっぽうでも見つけた方が勝ち．
- 一意性の定理を使うことで，「微分方程式を解いたときに出てくる積分定数の数」や「どのような初期条件なら解が一意に決まるか」がわかる．実際，1 未知関数 1 階の ODE では，上の定理の通り，$y(x_0)=y_0$ という初期条件を決めることで解が一意に定まった．
- 一意性は後で「線型微分方程式」をやるとき，特に独立な解の数を数えるときにも使われるぞ！

このような応用の具体例は，これから何度も見ていくことになるだろう．その都度「存在と一意性の定理により○○○」と言うから，思い出して欲しい．

以下ではこの重要な定理の証明の概略（本当の概略）を示す．数学が苦手と思ってる人は，ここはわからなくても構わない．ただ，初めの「積分方程式への変換」は後で役に立つかもしれない．

1.3.1 積分方程式への変換

微分方程式 (1.3.1) は，積分方程式

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(z, y(z))dz \tag{1.3.5}$$

と同値である．なぜなら，(1.3.5) の $y(x)$ が (1.3.1) を満たしているのはすぐに確かめられる．逆に，(1.3.1) の微分方程式の両辺を x で，x_0 から x まで積分すると (1.3.5) になる．

1.3.2 逐次近似法

さて，積分方程式 (1.3.5) を解きたいのだが，簡単ではない．でも，以下のように，解の近似列を作っていくことは出来る．

積分方程式 (1.3.5) がなぜ解けないのかと言うと，求めたい未知関数 y が右辺にも出ているからだ．そこで，第ゼロ近似として，右辺に出ている $y(z)$ をその初期条件 y_0 で置き換えてしまおう．

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(z, y_0)dz. \tag{1.3.6}$$

この $y_1(x)$ は，$x \approx x_0$ では割合良い近似になっていることが期待される（実際，そうであることを後で示す）．次に，この y_1 で (1.3.5) の y を置き換えて

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(z, y_1(z))dz \tag{1.3.7}$$

を作る．以下同様に，右辺に y_n を代入して y_{n+1} を左辺から得る：

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(z, y_n(z))dz \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1.3.8}$$

我々の期待していることは，$n \to \infty$ で $y_n(x)$ が何かの関数 $y(x)$ に収束することだ：

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x) \qquad (??) \tag{1.3.9}$$

もし収束するならば(1.3.8) の両辺で $n \to \infty$ としたつもりになって形式的に $y_n \to y$，$y_{n+1} \to y$ とすると，(1.3.5) が出てくる．（実際，ここの極限移行は $f(x, y)$ の連続性から保証されるので，「形式的」ではない．）つまり，(1.3.9) の極限の $y(x)$ は積分方程式 (1.3.5) の解，つまりもとの微分方程式 (1.3.1) の解になっていることが期待されるのだ．

こういう訳で，解の存在のためには，(1.3.9) の極限が実際に存在することをしめせば十分ということになった．なお，上のようにうまく行ってる場合，$y_n(x)$ は真の解 $y(x)$ を段々と精度よく近似して行ってることが期待される．なので，この $y_n(x)$（の列）を，$y(x)$ の**逐次近似解**，上のように $y_n(x)$ を作って行くことを**逐次近似法**という．

1.3.3 逐次近似法の解が存在すること

ここは少し数学的で「コーシー列」の概念が必要なので，わからない人も多いだろう．完全にわからなくても良いので，参考までに大体の感じを述べる．

証明のキーは数学的帰納法を用いて，$n \geq 0$ で以下を示すことだ：

(a) $|x - x_0| < a' \equiv \min\{a, \frac{b}{M}\}$ ならば $|y_n(x) - y_0| \leq b$

(b) $\big|y_{n+1}(x) - y_n(x)\big| \le M|x-x_0|^{n+1}K^n/n!$

もしこれが示せたとすると，$n, m > 0$ で

$$\big|y_{n+m}(x) - y_n(x)\big| \le \sum_{i=0}^{m}\big|y_{n+i+1}(x) - y_i\big| \le \sum_{i=0}^{m} M|x-x_0|^{n+i+1}\frac{K^{n+i}}{(n+i)!} \le M|x-x_0|\sum_{j=n}^{\infty}\frac{(K|x-x_0|)^j}{j!} \tag{1.3.10}$$

となる．右辺の量は $e^{K|x-x_0|}$ のテイラー展開の第 n 項以降の和で，このテイラー展開は絶対収束するから，$n \to \infty$ で上の差はゼロに収束する．これは各 x ごとに数列 $y_n(x)$ がコーシー列であることを意味し[1]，「実数の完備性」から $\lim_{n\to\infty} y_n(x)$ の存在，つまり (1.3.9) の極限の存在が示される．

問題の評価 (a), (b) を帰納法で示すのはそんなに難しくない．まず，$n = 0$ では初期条件から $y_0(x) = y_0$ なので (a) はアタリマエに成り立つ．また (b) は作り方から

$$\big|y_1(x) - y_0\big| = \left|\int_{x_0}^{x} f(z, y_0)dz\right| \le \int_{x_0}^{x} |f(z, y_0)|\,dz \le \int_{x_0}^{x} M\,dz = M|x-x_0| \tag{1.3.11}$$

となって，成り立つ．

次に，n の時に成り立っているとして $n+1$ を狙う．(a) については，(1.3.11) とほとんど同じで，

$$\big|y_{n+1}(x) - y_0\big| = \left|\int_{x_0}^{x} f(z, y_n(z))dz\right| \le \int_{x_0}^{x} |f(z, y_n(z))|\,dz \le \int_{x_0}^{x} M\,dz = M|x-x_0| < b \tag{1.3.12}$$

となる．最後のところで，$|x-x_0| < a'$ では $M|x-x_0| < b$ が保証されることを使った．また，(b) については，

$$\begin{aligned}\big|y_{n+2}(x) - y_{n+1}(x)\big| &= \left|\int_{x_0}^{x}\Big\{f(z, y_{n+1}(z)) - f(z, y_n(z))\Big\}dz\right| \le \int_{x_0}^{x}\Big|f(z, y_{n+1}(z)) - f(z, y_n(z))\Big|dz \\ &\le K\int_{x_0}^{x}|y_{n+1}(z) - y_n(z)|\,dz \le K\int_{x_0}^{x} M\frac{K^n}{n!}|z-x_0|^{n+1}dz = M\frac{K^{n+1}}{(n+1)!}|z-x_0|^{n+2}\end{aligned} \tag{1.3.13}$$

となって，成立することがわかる．

以上から，$y_n(x)$ の極限が存在し，それは微分方程式の解 $y(x)$ に一致することがわかった．「解の存在」は証明された．

1.3.4 最後に一意性について

では，解が一意であることを，背理法で示す．

問題の微分方程式 (1.3.1) の解が 2 つあったとし，それらを $y^{(1)}(x), y^{(2)}(x)$ と書く．これらは共に積分方程式 (1.3.5) を満たすから，両辺の差をとって（簡単のため，$x > x_0$ のみ考える；逆の時は積分の符号を逆にすれば同じ），

$$\begin{aligned}\big|y^{(1)}(x) - y^{(2)}(x)\big| &\le \left|\int_{x_0}^{x}\Big\{f(z, y^{(1)}(z)) - f(z, y^{(2)}(z))\Big\}dz\right| \le \int_{x_0}^{x}\Big|f(z, y^{(1)}(z)) - f(z, y^{(2)}(z))\Big|dz \\ &\le K\int_{x_0}^{x}\big|y^{(1)}(z) - y^{(2)}(z)\big|dz \le K\,|x-x_0|\,\times\,\max_{z}\big|y^{(1)}(z) - y^{(2)}(z)\big|\end{aligned} \tag{1.3.14}$$

ここで記号を簡単にするために

$$Y(x) \equiv \max_{z:|z-x_0|<|x-x_0|}\big|y^{(1)}(z) - y^{(2)}(z)\big|, \qquad d(x) \equiv \big|y^{(1)}(x) - y^{(2)}(x)\big| \tag{1.3.15}$$

を導入すると，上のは

$$d(x) \le K\,|x-x_0|\,Y(x) \tag{1.3.16}$$

[1] ここが唯一，この講義で少しだけ高度な数学を使うところである．解らない人は，ともかく極限の存在が証明されているんだ，と思ってれば良い

と言うことだ．これをくり返すと，

$$
\begin{aligned}
d(x) &\le K\int_{x_0}^{x} d(z)dz \le K\int_{x_0}^{x} K\,|x-x_0|\,Y(x)dz = \frac{K^2}{2}|x-x_0|^2\,Y(x),\\
d(x) &\le K\int_{x_0}^{x} d(z)dz \le K\int_{x_0}^{x} \frac{K^2}{2}\,|x-x_0|^2\,Y(x)dz = \frac{K^3}{3!}|x-x_0|^3\,Y(x),
\end{aligned}
\tag{1.3.17}
$$

結局任意の $n \ge 1$ に対して，

$$
d(x) \le \frac{K^n}{n!}|x-x_0|^n\,Y(x) \tag{1.3.18}
$$

が言えてしまう．n は任意だから $n \to \infty$ とすると，この右辺はゼロに行く．つまり，実は $d(x) = 0$ だったのだ．これで一意性が言えた． □

1.3.5 一般の常微分方程式の解の存在と一意性

以上で，1 未知関数，一階のばあいについて，解の存在と一意性を説明した．その補足として，一般（未知函数もたくさんあるし，微分も 2 階以上ある，など）の場合を説明する．

まず，大事な注意から始めよう．

すべての微分方程式は，未知関数の数を増やすことで，一階の微分方程式になおせる．

例で説明する．微分方程式 $y''' + x^2 y'' + (y')^2 + y = 4$ を例にとる．未知関数 y_1, y_2, y_3 を，$y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y'(x)$, $y_3(x) = y''(x)$ として導入すると，もとの微分方程式は

$$
\begin{cases}
y_3' + x^2\,y_3 + (y_2)^2 + y_1 = 4,\\
y_2' = y_3,\\
y_1' = y_2
\end{cases}
\tag{1.3.19}
$$

という 3 未知関数，1 階の ODE になる．もっと一般の場合も，最高階より低い導関数をすべて新しい未知関数と置き直せば，上と同じように 1 階の微分方程式系になおせることは明らかだろう（興味のある人は，一つで良いから例をやってみよう.）

この事から，存在と一意性は，上の形の n-未知関数，1 階の連立微分方程式系について証明すれば十分であることがわかる．さて，このような系については以下の定理が成り立つ．記号を簡単にするため，$\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ と書く．

定理 1.3.2 (微分方程式の解の存在と一意性) 未知函数が n 個，一階の連立微分方程式

$$
\begin{cases}
y_1' = f_1(x, \vec{y}),\\
y_2' = f_2(x, \vec{y}),\\
\qquad \cdots\\
y_n' = f_n(x, \vec{y})
\end{cases}
\tag{1.3.20}
$$

において，f が以下の条件を満たすと仮定しよう（$j = 1, 2, \dots, n$）：

1. $f_j(x, \vec{y})$ は $(X, \vec{Y})$ を中心にした超直方体 $D \equiv \{(x, \vec{y}) \big| \, |x - X| < a, |y_j - Y_j| < b\}$ で定義されており
2. $f_j(x, \vec{y})$ は D 上で $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ の連続関数で
3. 更に，定数 K があって，D 内の任意の $(x, \vec{y})$ と $(x, \vec{z})$ が以下を満たす：

$$
\big|f(x,\vec{y}) - f(x,\vec{z})\big| \le K\,|\vec{y} - \vec{z}| \equiv K\sum_{j=1}^{n}|y_j - z_j| \qquad (\textit{Lipschitz}\text{ 条件}). \tag{1.3.21}
$$

このとき，初期条件 $\vec{y}(x_0) = \vec{Y}$ （つまり，$j = 1, 2, \ldots, n$ について $y_j(x_0) = Y_j$ ）を満たす (1.3.20) の解が，

$$\bigl|x - x_0\bigr| < a' \equiv \min\Bigl\{a, \frac{b}{M}\Bigr\}, \qquad M \equiv \max_{(x,\vec{y})\in D} \bigl| f(x, \vec{y}) \bigr| \tag{1.3.22}$$

なる x に対して，**一意に存在**する．

この定理の証明は，１未知関数，１階の時と本質的に同じなので省略する．興味のある人は少しやってみると良い．単に成分の数が多くなっているだけで，各成分ごとに地道に式を書き下していくと，思ったより簡単だよ．

ともかく，この定理の効用は,「上のような初期条件を与えると解が存在して一意に定まる」，換言すれば,「問題の微分方程式の一般解には（初期条件の自由度に相当して）n 個の積分定数がある」ことを示してくれる点にある．特に，いままで漠然と思っていたであろう「１未知関数，n 階の微分方程式なら積分定数は n 個」であることが証明できたわけだ．この定理の応用は後々，一杯出てくるから，ここではこのくらいにしておこう．

1.4 定数係数線型微分方程式の解法 — n 階，1 未知関数，斉次の場合

これからしばらくの間,「線型」の微分方程式を扱う．まず，定義．

- 「**線型**」な微分方程式とは，未知関数の１次，またはゼロ次の ODE のこと．
- 「**線型斉次**」の微分方程式とは，各項がすべて未知関数の１次である ODE のこと．
- 「**線型非斉次**」の微分方程式とは，線型な ODE のうちで，未知関数についてゼロ次の項がある ODE のこと．
- 特に，未知関数の係数が独立変数 x によらない定数の場合，これを「**定数係数の**」微分方程式という（そのまんま）．

この小節ではまず,「１未知関数，定数係数で線型，斉次」の場合を扱う．つまり，n-階，１未知関数の微分方程式

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}\, y^{(n-2)}(x) + \ldots + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0 \tag{1.4.1}$$

の解を考える．ここで，$y^{(j)}$ は $y(x)$ の j-階導関数，また a_j は与えられた実定数とする．

> （お断り）これからやる事の多くは,「定数係数」でない一般の場合でも成り立つ．従って論理的なつながりから言えば，一般の場合を先にやり，その後で定数係数に戻る方が自然である．しかし，そのような進み方は「とっつきにくい抽象論」の印象を与える恐れもある．そこで，回りくどいけどもまず簡単な「定数係数」の場合などで具体例に慣れてから，最後に一般の線型の場合をやることにした．

詳細に入る前に,「線型」の方程式に対しては Lipschitz 条件などが無条件に成り立ち，従って**「解の存在と一意性」の定理が成立する**ことに注意しておこう．いくつかの例題を通して，発見法的に進む．

１．特性方程式が重根を持たない場合

例題１： $y'' - 3y' + 2y = 0$，初期条件は $y(0) = 2, y'(0) = 1$，を解け．

まず，騙されたと思って，$y(x) = e^{\lambda x}$ の形の解を探す．これが解であるための λ の必要条件は（代入すると）

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad \text{つまり} \quad \lambda = 1, 2 \tag{1.4.2}$$

ということがわかる．逆に，$y = e^x, e^{2x}$ はどちらも問題の ODE を満たすことが容易に確かめられる．

では，与えられた初期条件を満たす解はどうやったら見つかるだろうか？ここで，以下の非常に重大な性質に注目する：

> 線型，斉次の微分方程式の解を $y_1(x), y_2(x)$ とすると，任意の数 c_1, c_2 に対して，$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ も与えられた ODE の解である．(重ね合わせの原理)

実際，$c_1e^x + c_2e^{2x}$ も解であることは，具体的に代入すれば確かめられる．でも，c_1, c_2 は任意の定数だ．「解の存在と一意性」によれば，２階の微分方程式は２つの積分定数を含むはずだから，これが一般解だ．（つまり，これ以外の解はないはず[2]．）

あとは初期条件に合うように定数を決めると，$c_1 + c_2 = 2, c_1 + 2c_2 = 1$ から，$c_1 = 3, c_2 = -1$ となるので，$y(x) = 3e^x - e^{2x}$ が最終的な答えとわかる．

例題２： $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$，初期条件は $y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 4$，を解け．

基本的には例題１と同じだ．$y(x) = e^{\lambda x}$ とすると，λ は $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ となり，$\lambda = \pm 1, 2$． 従って一般解は $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x}$．初期条件に合うように定数を決めて，最終的な答えは $y(x) = e^x - e^{-x} + e^{2x}$．

以上で大変大事なのは，初めは発見法的に行ったけども，一旦解を見つけてしまったら，「解の一意性」から，これ以外の解がない，ことが保証されたこと．つまり，「どんな汚い手でも解を見つけたものの勝ち」となっている．

４階以上の n 階の場合も同様だ．指数の肩の λ の満たすべき方程式は

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{1.4.3}$$

となる．これを**特性方程式**というが，ともかく，こいつが n 個の独立な解を持つ場合は，それらを $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ として，

$$c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_ne^{\lambda_n x} \tag{1.4.4}$$

が一般解になる．また，定数 c_1 から c_n を初期条件から決めると，初期条件を満たす解が一位に定まるわけだ．

なお，上で「どんな初期条件でも，定数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ をうまくとると実現できる」ことは別途証明する必要がある．（もし実現できなければ，今考えている一般解以外の解があるかもしれない．）でも，これは初期条件から係数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ を決める式を書き下すとすぐにわかる．実際，初期条件を $y^{(j)}(0) = d_j$ （$j = 0, 2, \ldots, n-1$）と書くと，$c_1, c_2, \ldots, c_n$ の満たすべき方程式が

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + \ldots + c_n &= d_0, \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \ldots + \lambda_n c_n &= d_1, \\ \lambda_1^2 c_1 + \lambda_2^2 c_2 + \ldots + \lambda_n^2 c_n &= d_2, \\ &\cdots \\ \lambda_1^{n-1} c_1 + \lambda_2^{n-1} c_2 + \ldots + \lambda_n^{n-1} c_n &= d_n - 1 \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

となる．これは行列 Λ とベクトル $\vec{c}, \vec{d}$ を

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix}, \qquad \vec{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ d_n \end{bmatrix} \tag{1.4.6}$$

を定義すると，$\Lambda\vec{c} = \vec{d}$ の形になるので，行列 Λ が正則（逆行列を持つ）ならば，$\vec{c} = \Lambda^{-1}\vec{d}$ と解くことが出来て，解が一意に定まる．Λ が正則か否かはその行列式がゼロでないかどうかと同値だが，上の行列式は λ_i が全部異なるならゼロでないことはすぐにわかる（線型代数の復習なので，各自で確かめること）．

と言うわけで，この場合，どんな初期条件でも $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ の線型結合で表せることが証明できた．

２．特性方程式が重根を持つ場合

例題３： $y'' - 2y' + y = 0$，初期条件は $y(0) = 1, y'(0) = 2$．

[2] ここには少し，論理の飛躍がある．２つの積分定数を含むからと言って，これで全ての解が尽くされているかどうかは，すぐにはわからない．全ての解が尽くされてるといえるのは，「この２つの積分定数を調節することによって，任意の初期条件 $y(0), y'(0)$ の解を表すことができる」ことまで確かめてからである —— 「存在と一意性の定理」によれば，初期条件 $y(0), y'(0)$ を決めると解が一意に定まるから．でも「この２つの積分定数を調節することによって，任意の初期条件 $y(0), y'(0)$ の解を表すことができる」ことは今の場合，簡単にわかる．従って，結果として，$c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ の形以外の解がないことがわかる

さて今度は特性方程式が $\lambda^2-2\lambda+1=0$ で，$\lambda=1$ しか解がない．確かに $y(x)=e^x$ が（初期条件を満たさない）解であるのはすぐに確かめられるが，もう一つ欲しいところだ．どうしよう？

天下りだが，$y(x)=x\,e^x$ を試してみると，これも解になっていることがわかる．従って，この２つの線型結合 $c_1e^x+c_2xe^x$ が一般解である．初期条件を満たすように定数を決めると，$c_1=c_2=1$ で，$(1+x)e^x$ が最終的な答えになる．

（補足）上では天下りに xe^x を持ち出したが，こうなることを予想することは可能である．と言うのは，特性方程式が重根を持つのは，２つの解 λ_1,λ_2 の間隔が無限に小さくなった場合とも考えられる．$\lambda_1\neq\lambda_2$ の場合には２つの解 $e^{\lambda_1 x}$，$e^{\lambda_2 x}$ があるが，$\lambda_2\to\lambda_1$ の極限では両者は一致する．しかしこの極限では両者の差も解になってもよいだろう．実際には単純な差ではなく，$\dfrac{e^{\lambda_1 x}-e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1-\lambda_2}$ の極限を考えると，これは $\frac{\partial e^{\lambda x}}{\partial\lambda}=x\,e^{\lambda x}$ に他ならない．

もっと一般の場合も，上から類推できる通りである．まとめると以下のようになる：

１未知関数，n 階の ODE

$$y^{(n)}(x)+a_{n-1}\,y^{(n-1)}(x)+a_{n-2}\,y^{(n-2)}(x)+\ldots+a_1\,y'(x)+a_0\,y(x)=0 \tag{1.4.7}$$

を考えよう．特性方程式

$$\lambda^n+a_{n-1}\,\lambda^{n-1}+a_{n-2}\,\lambda^{n-2}+\ldots+a_1\,\lambda+a_0=0 \tag{1.4.8}$$

の異なる解が，$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ （その重複度が $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$）であるとする．このとき，ODE の一般解は

$$e^{\lambda_j x},\quad xe^{\lambda_j x},\quad x^2e^{\lambda_j x},\quad \ldots,\quad x^{\alpha_j-1}e^{\lambda_j x},\qquad (j=1,2,\ldots,m) \tag{1.4.9}$$

の線型結合で与えられる．$\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\alpha_j=n$ なので，上の解は丁度 n 個ある．

ここで少し用語を導入しておこう．上では１未知関数，n 階の ODE の解が，n 個の解の線型結合で表せることを見た．このように，「与えられた線型方程式のどんな解でも，その線型結合で表せる」解の集合をその微分方程式の**基本解系**または**解の基底**と呼ぶ．１年の線型代数では，線型連立方程式の「解の空間」，その「基底」などをやったはず．この常微分方程式でも類似の性質が成り立っているので，このような言葉を使っているのだが，詳細は後にしよう．(今日のところは，ともかく与えられた方程式が解けるようになって欲しい．)

最後に，複素数になれていないと少し奇異に感じるかもしれない点について注意しておく．

例題４：特性根が複素数になる場合．簡単な例として $y''=-y$，初期条件は $y(0)=0,y'(0)=1$ を考えよう．今までの一般論に従うと，特性方程式は $\lambda^2=-1$，つまり $\lambda=\pm i$ （i は虚数単位）．従って，一般解は $c_1\,e^{ix}+c_2\,e^{-ix}$ だ．これから定数を決めると（オイラーの公式も使って）

$$y(x)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\sin x \tag{1.4.10}$$

と求められる．

これはまあ，これで良いんだけど，もともと実数の $y(x)$ しか考えていない場合でも複素数の一般解がでてくるのはちょっと気持ち悪いかもしれない．でも，定数 c_1,c_2 を実部と虚部に分けて書いてやって，全体の実部だけをとれば実数の一般解が得られるので，問題ない．この問いの例なら，c_3,c_4 を実数として，$c_3\cos x+c_4\sin x$ が実数値をとる一般解である．

(解空間，基底などの補足)

以上で，定数係数，斉次の n 階微分方程式（１未知関数）が n 個の解の重ね合わせであらわせることを見た．このような現象は一般の斉次の線型微分方程式にも見られるから，少し用語を導入しておく．(このような用語は見通しを良くするのに役立つが，線型代数が苦手の人には取っつきにくいかもしれない．その場合はあまり気にせず，ともかく微分方程式が解けることにまず注力して欲しい．)

まず，斉次の微分方程式の解には「重ね合わせの原理」が成り立つ．これは一年生の数学の言葉で「解の空間は線型空間をなす」ことに他ならない．線型空間であればその「基底」が問題になる．少し思い出して今の状況で用語を書くと：

- 与えられた微分方程式の解 $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ が **（一次）独立**とは，
$$c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + \ldots + c_m\, y_m(x) = 0 \qquad \text{（すべての } x \text{ で）} \tag{1.4.11}$$
と成り立たせるような $c_1, c_2, \ldots, c_m$ が**すべてゼロ**しかないことである．
- 与えられた微分方程式の任意の解が $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ の線型結合として書けて，さらに，$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ が独立である場合，$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ を解空間の**基底**という．
- 上の場合，基底を構成する独立な解の数 m を解空間の**次元**という．

この用語を念頭に以上の結果を振り返ると（独立性については以下の注も参照），

1 未知関数 n 階斉次の微分方程式の解空間の次元は n，その基底は (1.4.9) の n 個の解からなる

とわかる．

（注）(1.4.9) の n 個の解が独立な事の証明について．

証明は，この n 個の解でどんな初期条件でも表せる，ことの証明とほとんど同じであるので，両方まとめておこなう．まず λ_j がすべて異なる（重根がない）場合を考えると，(1.4.6) のように，$\Lambda\vec{c} = \vec{d}$ の形の方程式が得られる．右辺の $\vec{d} = \mathbf{0}$ の時の解が独立性の判定条件に使われ，一方，$\vec{d} \neq \mathbf{0}$ の時の解が初期条件 $\vec{d}$ の解を求めるのに使われる．さて，一年の線型代数を思い出すと，この形の方程式の解は，行列 Λ の性質でほぼ，決まる．特に Λ が正則であれば，$\vec{c} = \Lambda^{-1}\vec{d}$ と書ける．なので，任意の初期条件の解は一つに決まり，かつ一次独立である，ことがすぐにわかる．

そこで問題は上の Λ が正則か否かに絞られたわけだが，この Λ は正則であることは一年の線型代数の練習問題である．各自で確かめること —— 行列が正則である必要十分条件はくつかあった．例えば，行列式がゼロでないこと，行列の階数がその次元と等しいこと，etc.

特性方程式が重根を持って，正に上の例題 3 のような解が出てくる場合には，Λ の形も複雑になる．その具体型をここに書く根性がないので,（時間があれば）講義で説明する．しかしこのような細かいことはまあ，とりあえずは忘れても良いから,「解の一意性」を用いると全ての解が簡単に書き下せる，ことはしっかり覚えておこう．

1.5 定数係数線型微分方程式の解法 — 未知関数が複数の場合

> この小節の内容は教科書ではあまり扱われていない．しかし，将来，実用上は大事だと思われるので，挿入することにした．

今度は以下のように，未知関数が n 個ある，一階線型斉次，定数係数の ODE を考える（a_{ij} は定数）．

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + \ldots + a_{1n}\, y_n, \\ y_2' = a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + \ldots + a_{2n}\, y_n, \\ \qquad \cdots \\ y_n' = a_{n1}\, y_1 + a_{n2}\, y_2 + \ldots + a_{nn}\, y_n \end{cases} \tag{1.5.1}$$

a_{ij} からなる行列を $A(x)$， y_j からなるベクトルを $\vec{y}(x)$ と書くと，この ODE は

$$\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = A\,\vec{y}(x) \tag{1.5.2}$$

とも書ける．言うまでもなく，$A\,\vec{y}(x)$ は行列 A とベクトル $\vec{y}(x)$ の積を表している．以前に注意したように，線型斉次方程式は（未知関数を増やして）いつでもこの形に書けるから，理論的にはこれさえやれば十分で，前節の結

果もこれからやることに含まれている．ただ，この形では前小節の内容はかえって見にくくなるので，敢えて先にわかりやすいところをやったわけ．

これの解はなかなか大変だ．特に，行列 A が**対角化不可能**の場合は解の形も汚い．そこで，今回はまず，**行列 A が対角化可能**の場合に話を限定する．対角化不可能の場合は（時間があれば）後で簡単に触れる．

1.5.1 行列 A が対角化可能の場合

さて，この ODE の解法には（互いに同値な）２つのやり方がある．

方法１： 1 未知関数の時にやったように，まずは当てずっぽうで解を探す．$e^{\lambda x}$ の形の解を探そう．ただし，今は未知関数 $\vec{y}$ がベクトルだから，$\vec{z}$ を未知のベクトルとして，$\vec{y}(x) = e^{\lambda x}\,\vec{z}$ の形の解を探すことにする．これを ODE(1.5.2) に代入すると

$$\lambda \vec{z}\, e^{\lambda x} = A\,\vec{z}\, e^{\lambda x} \qquad \Longrightarrow \qquad A\,\vec{z} = \lambda \vec{z} \tag{1.5.3}$$

が得られる．さて，この方程式はどこかで見たことがあるぞ〜〜　そうです，線型代数でやった「行列 A の固有値 λ と固有ベクトル $\vec{z}$ の定義」に出てくる式だ．固有ベクトルはゼロベクトルではいけないが，ここでも $\vec{z}$ がゼロなら ODE の解もゼロになってしまうので困る．つまり，いま求めたい λ と $\vec{z}$ はまさに**行列 A の固有値と固有ベクトル**に他ならないわけだ．

と言うわけで，ODE (1.5.2) の解の一つが求まった．要するに，行列 A の固有値 λ と固有ベクトル $\vec{z}$ を持ってきて，$e^{\lambda x}\vec{z}$ を作ればよいのだ．また，固有ベクトルが複数個ある時は，重ね合わせの原理から，これらの線型結合も解であることがすぐにわかる．つまり，固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$，対応する固有ベクトルを $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \ldots, \vec{z}_m$ とすると，線型結合

$$c_1\, e^{\lambda_1 x}\, \vec{z}_1 + c_2\, e^{\lambda_2 x}\, \vec{z}_2 + \ldots + c_m\, e^{\lambda_m x}\, \vec{z}_m \tag{1.5.4}$$

も解である（$c_1, c_2, \ldots, c_m$ は任意の定数）．

今までの一般論は行列 A が対角化可能でも不可能でも成り立つ．でも，これからは，行列 A が対角化可能であることを使う．

対角化可能とは，行列 A が n 個の独立な固有ベクトルを持つ場合である．この場合，(1.5.4) で $m = n$ としたものが解である．この解は n 個の任意定数を持つから，任意の初期条件をこの線型結合で表せるのではないかと期待される．実際，初期条件を $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$ とすると，定数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ を決める式は

$$c_1\, \vec{z}_1 + c_2\, \vec{z}_2 + \ldots + c_n\, \vec{z}_n = \vec{y}_0 \tag{1.5.5}$$

と言うものになる（この式は n 成分あるから，n 個の未知数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ に関する n 連立方程式であることに注意）．これは更に，行列 Z とベクトル $\vec{c}$ を

$$Z \equiv \Bigl[\vec{z}_1, \vec{z}_2, \ldots, \vec{z}_n\Bigr], \qquad \vec{c} \equiv \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} \tag{1.5.6}$$

と定義すると

$$Z\,\vec{c} = \vec{y}_0 \tag{1.5.7}$$

と言う式になる．このような連立方程式の解法は 1 年の線型代数で散々やったはずで，Z が正則行列ならその逆行列をもちいて

$$\vec{c} = Z^{-1}\,\vec{y}_0 \tag{1.5.8}$$

と解ける．今の場合，$\vec{z}_1, \vec{z}_2, \ldots, \vec{z}_n$ は独立だから，行列 Z は正則行列であり，このように $\vec{c}$ を決められるので，メデタシメデタシ．また，$\vec{z}_1, \vec{z}_2, \ldots$ の解が一次独立であることも，割合簡単にわかる（興味のある人はやってみ）．

方法２：行列の「指数関数」を使うやり方

1 未知関数の ODE $y' = ay$ の一般解が $y(x) = C\,e^{ax}$ であることは知ってるわいな．上の (1.5.2) も形式的には同じ形だから，数の指数関数 e^{ax} の仲間を使って解が書けるかもしれない．これは実際にその通りである．

まず,「行列の指数関数」$e^A = \exp(A)$ を，

$$e^A = \exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \tag{1.5.9}$$

によって定義する（右辺の級数は e^x のテイラー展開に A を放りこんだものであることに注意）．この右辺の無限和が定義できるのか，が気になるが，実際，どのような有限行列に対しても定義でき，かつ和の収束は「絶対収束」であることがわかる（時間の関係でここは詳細は略）．和が絶対収束するので，その微分や積分は項別に行うことができる．特に，

$$\frac{d}{dx} e^{xA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^n}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} A^n = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n = A\,e^{xA} \tag{1.5.10}$$

が成り立つ．と言うことは，e^{xA} に任意の定数の n-次元縦ベクトル $\vec{y}_0$ をかけたものに対しても，

$$\frac{d}{dx} e^{xA} \vec{y}_0 = \left(\frac{d}{dx} e^{xA} \right) \vec{y}_0 = A\,e^{xA}\,\vec{y}_0 \tag{1.5.11}$$

が成り立つ．これは

$$\vec{y}(t) = e^{xA}\,\vec{y}_0 \tag{1.5.12}$$

が微分方程式 (1.5.2) の解であることを主張している．つまり，(1.5.2) の解が (1.5.12) である，とわかった．

更に，これは十分に一般的な解である（つまり，任意の初期条件の解を表すことができる）．なぜなら，(1.5.12) の解が $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$ を満たすので，$\vec{y}_0$ を初期条件に合わせてとってやればよい.（システムの場合のほうが，初期条件に合わせた解を探すのは簡単だ.）

このように，システムの場合の解が「行列の指数関数」を用いて表せた．これで良いし，非常に綺麗なのだが，この方法を使うには「行列の指数関数」を計算する必要がある．それには「行列の対角化」を使うわけで，結局，解法 1 と解法 2 は本質的に同じことをやってるのである（以下の注を参照）．

（注）なお,「解法１」と「解法２」が全く別物に見える人がいるかもしれないが，この２つは同じ事である．と言うのは，行列の指数関数を計算するには固有値，固有ベクトル，行列の対角化，などを使う必要があり，これを使って「解法２」を具体的に書き下すと,「解法１」と実質的に同じものになるのだ．この辺りの事情は，時間があれば講義で説明しよう．

行列 A が対角化できる場合の簡単な例は以下の通り（もっと複雑なのはレポート問題でやってもらうかも）．

(例題）次の微分方程式を解け：

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 2y_2 \end{cases} \qquad \text{初期条件は} \quad y_1(0) = 3,\ y_2(0) = 0.$$

(方法１）では，ともかく行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを探す．2×2 だから簡単にできて，固有値は $1, 4$，対応する固有ベクトルはそれぞれ $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ だ．従って，一般解は

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^x + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4x} \tag{1.5.13}$$

である．定数 C_1, C_2 を初期条件から決めると，

$$C_1 + C_2 = 3, \quad -2C_1 + C_2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad C_1 = 1, C_2 = 2. \tag{1.5.14}$$

よって答えは，$y_1(x) = e^x + 2e^{4x}, y_2(x) = -2e^x + 2e^{4x}$.

（方法２）では，A を対角化する行列 P を探す．これは固有ベクトルがわかればすぐにわかり，$P=\begin{bmatrix}1&1\\-2&1\end{bmatrix}$ と $B=\begin{bmatrix}1&0\\0&4\end{bmatrix}$ によって，$P^{-1}AP=B$ を得る．従って，これから，

$$e^{xA}=e^{xPBP^{-1}}=P\,e^{xB}\,P^{-1}=\begin{bmatrix}1&1\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^x&0\\0&e^{4x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}e^x+2e^{4x}&-e^x+e^{4x}\\-2e^x+2e^{4x}&2e^x+e^{4x}\end{bmatrix}\tag{1.5.15}$$

が得られる．(1.5.12) に従ってこの右辺の行列を初期条件のベクトル $\begin{bmatrix}y_1(0)\\y_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$ にかけると，答えを得る．

1.5.2 行列 A が対角化不可能の場合

以上で行列 A が対角化できる場合はわかった．対角化できない場合について，簡単に述べる．

これはなかなか厄介だ．今の一年ではこの場合（Jordan の標準型）はあまり扱わないだろうから．深入りすると泥沼になってしまうので，答えだけを書く．（この場合は試験にはださない可能性が高いので，余裕のない人は忘れても良い．）ここのところは一般論で書いても大変だから具体例をやるのが良いのだが，計算が大変だ．将来，必要になったときにもう一回勉強してもらうことにしよう...

一般に，対角化不可能な $n\times n$ 行列に対しても，以下のような n 本のベクトルをとることができる．

$$\begin{aligned}
&A\boldsymbol{u}_{1,1}=\lambda_1\,\boldsymbol{u}_{1,1},\quad A\boldsymbol{u}_{1,2}=\lambda_1\,\boldsymbol{u}_{1,2}+\boldsymbol{u}_{1,1},\quad A\boldsymbol{u}_{1,3}=\lambda_1\,\boldsymbol{u}_{1,3}+\boldsymbol{u}_{1,2},\quad\ldots\quad A\boldsymbol{u}_{1,p}=\lambda_1\,\boldsymbol{u}_{1,p}+\boldsymbol{u}_{1,p-1}\\
&A\boldsymbol{u}_{2,1}=\lambda_2\,\boldsymbol{u}_{2,1},\quad A\boldsymbol{u}_{2,2}=\lambda_2\,\boldsymbol{u}_{2,2}+\boldsymbol{u}_{2,1},\quad A\boldsymbol{u}_{2,3}=\lambda_2\,\boldsymbol{u}_{2,3}+\boldsymbol{u}_{2,2},\quad\ldots\quad A\boldsymbol{u}_{2,q}=\lambda_2\,\boldsymbol{u}_{2,q}+\boldsymbol{u}_{2,q-1}\\
&A\boldsymbol{u}_{3,1}=\lambda_3\,\boldsymbol{u}_{3,1},\quad A\boldsymbol{u}_{3,2}=\lambda_3\,\boldsymbol{u}_{3,2}+\boldsymbol{u}_{3,1},\quad A\boldsymbol{u}_{3,3}=\lambda_3\,\boldsymbol{u}_{3,3}+\boldsymbol{u}_{3,2},\quad\ldots\quad A\boldsymbol{u}_{3,q}=\lambda_3\,\boldsymbol{u}_{3,q}+\boldsymbol{u}_{3,r-1}\\
&\qquad\ldots\\
&A\boldsymbol{u}_{m,1}=\lambda_m\,\boldsymbol{u}_{m,1},\quad A\boldsymbol{u}_{m,2}=\lambda_m\,\boldsymbol{u}_{m,2}+\boldsymbol{u}_{m,1},\quad A\boldsymbol{u}_{m,3}=\lambda_m\,\boldsymbol{u}_{m,3}+\boldsymbol{u}_{m,2},\quad\ldots\quad A\boldsymbol{u}_{m,t}=\lambda_m\,\boldsymbol{u}_{m,t}+\boldsymbol{u}_{m,t-1}
\end{aligned}$$

ここで $p+q+r+\ldots+t=n$ である．このとき，n 本の独立な解を，以下のようにして作ることができる．まず λ_1 に対応して，

$$\begin{aligned}
&e^{\lambda_1 x}\,\boldsymbol{u}_{1,1},\quad e^{\lambda_1 x}\left(\boldsymbol{u}_{1,2}+t\boldsymbol{u}_{1,1}\right),\quad e^{\lambda_1 x}\left(\boldsymbol{u}_{1,3}+t\boldsymbol{u}_{1,2}+\tfrac{t^2}{2}\boldsymbol{u}_{1,1}\right),\quad e^{\lambda_1 x}\left(\boldsymbol{u}_{1,4}+t\boldsymbol{u}_{1,3}+\tfrac{t^2}{2}\boldsymbol{u}_{1,2}+\tfrac{t^3}{3!}\boldsymbol{u}_{1,1}\right),\\
&\ldots,\quad e^{\lambda_1 x}\left(\boldsymbol{u}_{1,p}+t\boldsymbol{u}_{1,p-1}+\tfrac{t^2}{2}\boldsymbol{u}_{1,p-2}+\tfrac{t^3}{3!}\boldsymbol{u}_{1,p-3}+\ldots+\tfrac{t^{p-1}}{(p-1)!}\boldsymbol{u}_{1,1}\right)
\end{aligned}\tag{1.5.16}$$

の p 本の独立な解．λ_2 に対応しても，上と同じような（ただし，p を q で置き換えた）q 本の解．λ_3 に対しては p を r で置き換えた r 本．このようにして λ_m に対応するものまで作ると，全部で n 本の独立な解が作れるのだ．

A が対角化できない場合はなかなか大変だから，単位を取るための条件にはしません．（多分，試験にもださないような気がするが...）わけがわからん，という人は，対角化可能の場合だけ，しっかりやってください．

1.6 線型（斉次）微分方程式の定義と性質（少しおまけ気味）

いままで，係数が定数の場合を考えてきた．

この小節では，「線型斉次」な微分方程式の一般の性質について述べる．この節の内容は，**係数が定数でなくても成り立つ**．係数が定数の場合の一般化（まとめ）と思って見て貰えばよいし，細部まで理解できなくても構わない．教科書の該当部分は：

一階の方程式になおすと，n 未知関数の線型の ODE は

$$\begin{cases}
y_1'=a_{11}\,y_1+a_{12}\,y_2+a_{13}\,y_3+\ldots+a_{1n}\,y_n,\\
y_2'=a_{21}\,y_1+a_{22}\,y_2+a_{23}\,y_3+\ldots+a_{2n}\,y_n,\\
\qquad\ldots\\
y_n'=a_{n1}\,y_1+a_{n2}\,y_2+a_{n3}\,y_3+\ldots+a_{nn}\,y_n
\end{cases}\tag{1.6.1}$$

という形になる．ただし，ここで a_{ij} はそれぞれが与えられた x の関数である（前小節まではこれらが定数の場合をやった）．これはまた， $a_{ij}(x)$ からなる行列を $A(x)$ と書くと，

$$\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = A(x)\,\vec{y}(x) \tag{1.6.2}$$

とも書ける．ここで「斉次」というのは上の形のことで,「非斉次」は次の節で扱う．

線型な方程式について学ぶべき一般的性質はそれほど多くない．(A などが x による場合は，要するに解けないことが多い.）そのいくつかを述べよう．

1.6.1 重ね合わせの原理

斉次，線型の ODE

$$\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = A(x)\vec{y}(x) \tag{1.6.3}$$

について考察する．いま，この方程式の解が２つ見つかったとし，それを $\vec{y}(x), \vec{z}(x)$ と書こう．すると，任意の複素数 c_1, c_2 に対して，$c_1\vec{y}(x) + c_2\vec{z}(x)$ も (1.6.3) の解である（実際に代入すれば確かめられる）．より一般に

> (1.6.3) の解が m こ見つかったとして，それらを $\vec{y}^{(j)}(x)$ （$j = 1, 2, \ldots, m$）と書くと，任意の複素数 $c_1, c_2, \ldots, c_m$ に対して，線型結合 $\sum_{j=1}^{m} c_j\vec{y}^{(j)}(x)$ も (1.6.3) の解になっている．これを**重ね合わせの原理**(Principle of Superposition) という．

線型代数の言葉を使うと，上の「重ね合わせの原理」はこの ODE の解全体が**線型空間**をなしていることを意味する．

「重ね合わせの原理」は定数係数・斉次の微分方程式について散々見てきたものだが，係数が定数でなくても成り立つことを確認する意味で，ここに述べた．ただし，重ね合わせの原理は**線型・斉次**でないと一般には成り立たないことを強調しておく．

1.6.2 解の一次独立，一次従属，基本解系

上で m 個の解の線型結合がまた解になっていることをみた．しかし，いくらでも多くの解の線型結合に意味があるわけではない．と言うのは，存在と一意性の定理から，n 階の ODE を考える場合，どのような解でも n この解の線型結合で表されるはずだから．そこで，以下の定義を導入する．

- 与えられた関数 $\vec{y}^{(1)}(x)$, $\vec{y}^{(2)}(x)$, ..., $\vec{y}^{(m)}(x)$ が**一次独立**であるとは，

$$c_1\vec{y}^{(1)}(x) + c_2\vec{y}^{(2)}(x) + \ldots + c_m\vec{y}^{(m)}(x) \equiv 0 \qquad \text{（考えている } x \text{ の区間で恒等的にゼロ）} \tag{1.6.4}$$

  の解が $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$ 以外にはない，ことをいう．
- n 連立，１階の ODE において，n 個の一次独立な関数の組 $\vec{y}^{(1)}(x)$, $\vec{y}^{(2)}(x)$, ..., $\vec{y}^{(n)}(x)$ を解の**基本解系**または**解の基底**という．

この用語法に従うと，定数係数の場合に $e^{\lambda x}$ の形で解を求めたのは，解空間の基底を求めていたことになる．

1.6.3 Wronskian

さて，与えられた n 本の関数（それぞれが n 成分）$\vec{y}^{(1)}(x)$, $\vec{y}^{(2)}(x)$, ..., $\vec{y}^{(n)}(x)$ が独立かどうかはどのようにして判定できるだろうか？(これは与えられた n 本の解が実際に独立か — 従って解空間の基底をなしているか — を判定する上で非常に有用だ)．このために Wronski 行列と呼ばれる行列 $\hat{W}(x)$ をその ij 成分が $\vec{y}^{(j)}$ の第 i 成分であるような行列として定義する．つまり，

$$\hat{W}(x) \equiv \Big[\vec{y}^{(1)}(x),\ \vec{y}^{(2)}(x),\ \ldots,\ \vec{y}^{(n)}(x),\ \Big] \tag{1.6.5}$$

また，行列 $\hat{W}$ の行列式を Wronskian といい，通常，W と書く：$W(x) = \det \hat{W}(x)$.
このとき，以下が重要である：

> $\vec{y}^{(1)}(x)$, $\vec{y}^{(2)}(x)$, ..., $\vec{y}^{(n)}(x)$ が独立であることの必要十分条件は，ある x において $W(x) = \det \hat{W}(x) \neq 0$ が成り立つことである.

ちょっと見ると，これはアタリマエのように見えるかもしれない．$W(x) \neq 0$ は (1.6.4) が係数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ について一意に解けるための必要十分条件であるからだ．しかし，実際には (1.6.4) は「すべての x」について要求しているのだが，上の条件では「ある x」についてのみ，$W(x) \neq 0$ を要求しているのだ．この意味で，上の条件の方が格段に緩いように見える．本当に良いのか？
このギャップは以下の命題で解決される.

> **命題 1.6.1** ある $x = x_0$ で $W(x_0) \neq 0$ であれば，すべての x についても $W(x) \neq 0$ が成り立つ．逆に，$W(x_0) = 0$ ならば，他の x ででも $W(x) = 0$ である.

この証明は簡単だ．単に微分して，行列式の性質を用いると，

$$\frac{d}{dx}W(x) = \frac{d}{dx}\det\Big[\vec{y}^{(1)},\ \vec{y}^{(2)},\ ...,\ \vec{y}^{(n)}\Big] = \mathrm{tr}A(x)\,W(x) \tag{1.6.6}$$

が得られる.（tr は行列のトレース）これは $W(x)$ についての一階の微分方程式なので簡単に解けて，

$$W(x) = W(x_0)\,\exp\Big(\int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}A(t)\,dt\Big) \tag{1.6.7}$$

が得られる．後ろの指数関数はゼロでも無限大でもないから，これは $W(x_0)$ と $W(x)$ が同時にゼロになったり，ゼロでなかったりすることを意味する. □

1.7 非斉次・線型微分方程式の解法：定数変化法

さて，最後になったが，非斉次の線型微分方程式の性質と解き方を簡単に見ておこう．まず，一般的な性質（斉次と非斉次の関係）を述べ，そのあとで具体的にどう解くかを考える.
一階の方程式になおすと，n 未知関数の線型の ODE は

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2 + a_{13}\,y_3 + \ldots + a_{1n}\,y_n + b_1, \\ y_2' = a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2 + a_{23}\,y_3 + \ldots + a_{2n}\,y_n + b_2, \\ \qquad \cdots \\ y_n' = a_{n1}\,y_1 + a_{n2}\,y_2 + a_{n3}\,y_3 + \ldots + a_{nn}\,y_n + b_n \end{cases} \tag{1.7.1}$$

という形になる．ただし，ここで a_{ij} や b_j はそれぞれが与えられた x の関数である．これはまた，a_{ij} からなる行列を $A(x)$，b_j からなるベクトルを $\vec{b}(x)$ と書くと，

$$\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = A(x)\,\vec{y}(x) + \vec{b}(x) \tag{1.7.2}$$

とも書ける．ここで $\vec{b} \equiv 0$ の場合が「斉次」の方程式，$\vec{b} \neq 0$ の場合が「非斉次」の方程式で，この節では非斉次の場合を考えよう.

1.7.1 非斉次の方程式と斉次の方程式の関係

（この小節の内容は，教科書では 2.11 節.）

非斉次の線型微分方程式 (1.7.2) の解が２つ見つかったとし，それらを $\vec{y}^{(1)}(x)$，$\vec{y}^{(2)}(x)$ と書く．この差を $\vec{z}(x) \equiv \vec{y}^{(1)}(x) - \vec{y}^{(2)}(x)$ とすると，$\vec{z}(x)$ は斉次の方程式の解になっている（各自，確認）：

$$\frac{d}{dx}\vec{z}(x) = A(x)\,\vec{z}(x). \tag{1.7.3}$$

別の言い方をすると，非斉次方程式の特解が一つ見つかったとしてそれを $\vec{z}$ と書くと，非斉次方程式の他の解はすべて，$\vec{z}+\vec{y}$ の形に書けるわけだ（ここで $\vec{y}$ は斉次方程式の適当な解）．

これは実用上，重要である．つまり，非斉次方程式の初期値問題を解くには，**ともかく非斉次の特解を一つ**（$\vec{z}$）もとめた上で，これに**斉次方程式の一般解**（$\vec{y}$）**を足して**やって，$\vec{z}+\vec{y}$ が初期条件を満たすように，$\vec{y}$ を調節すればよいからだ．後で，この例を見るだろう．

1.7.2 具体的な解き方（１未知関数）

（教科書では 1.8, 2.12 節）

上で，非斉次の方程式を解くにはその特解を探すことが大事だと強調した．(ひとつの特解さえわかれば，斉次の一般解を足して，どのような解でも作れる）．問題はどのようにして特解を作るか，だが，それには**定数変化法**と呼ばれる，一般的な方法がある．また，これとは別に「ズルイ方法」もある．例から入ろう．

（例１） $y' + y = x$，$y(0) = 1$ を解け．

（方法１：ズルイ方法）ともかく特解を見つけたらこっちのもんや．右辺が x の多項式やから，特解も多項式の範囲で探してやろう．$y = a_0 + a_1 x$ だと仮定して代入すると，$a_1 + a_0 + a_1 x = x$，つまり，$a_1 = 1, a_0 = -1$ なら丁度良い．よって特解（の一つ）は $y(x) = x - 1$ とわかる．(実際に検算して，こいつが解であることを確かめよう.)

もちろん，これでは初期条件を満たしていないから，これに斉次の解を適当に足して初期条件を満たさせるのである．具体的には（方法 2）の後を参照．

（方法２：定数変化法）斉次の方程式 $y' + y = 0$ の一般解は $y(x) = Ce^{-x}$ である．そこで，(騙されたと思って）非斉次の解で，$y(x) = f(x)\,e^{-x}$ の形になっているものを探そう（これが解になるように f を決めよう）．この形を非斉次の方程式に代入すると

$$f'(x)\,e^{-x} - e^{-x} f(x) + f(x)\,e^{-x} = x \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = x\,e^{x} \tag{1.7.4}$$

が得られた（f の一次の項が丁度キャンセルしたことに注意）．この右側のは簡単に積分できて

$$f(x) = \int g(x) e^{x}\,dx = (x-1)\,e^{x} + const \tag{1.7.5}$$

が得られる．つまり，$y(x) = x - 1$ が特解の一つらしい（実際，検算するとそうなっているねえ）．

（方法１，２共通）以上から，特解がわかったので，一般解は $y(x) = Ce^{-x} + x - 1$ である．初期条件に合うように定数 C を決めてやって $C = 2$．従って，最終的な答えは $y(x) = 2e^{-x} + x - 1$. □

（方法２）では，斉次の場合の一般解の定数 C を未知の関数 $f(x)$ と思って，非斉次の解を求めた．元々の定数が x に依存するようになったので，これを「定数変化」法と呼ぶのである．(まあ，この名前がそれほど良いとはおもわないんだけど.）未定係数法については，教科書の 1.8 節と 2.16 節に載っている．

なお，(方法１）はいつでもこのようにしてうまく行くとは限らない．非斉次の項の形をよく見て，いろいろと工夫することが大切である．そのような例が，教科書の 2.12 節に載っている．

（例２） $y'' - 3y' + 2y = x, y(0) = 1, y'(0) = 2$ を解け．

例 1 と同じく,「簡単だけど計算が大変」なのと,「複雑だけど計算はちょっと楽」の両方を例示する．

（方法１：ズルイやり方）問題の非斉次方程式の特解を $y(x) = a_0 + a_1 x$ の級数の形で求めてやろう．右辺が x の一次だし，多項式を微分しても多項式だから，これでうまく行くかもしれない（もちろん，やってみないとわから

ない）．ともかくこの形を代入してやると，$y'' - 3y' + 2y = 2a_1 x + 2a_0 - 3a_1 = x$ となり，$a_1 = \frac{1}{2}$，$a_0 = \frac{3}{2}a_1 = \frac{3}{4}$ なら実際にうまく行くことがわかった !!（下の方法２と比べてみよ．非常に簡単でしょ？）

（方法２）斉次の方程式 $y'' - 3y' + 2y = 0$ の一般解は $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ である．そこで，$y(x) = C_1(x)e^x$ を問題の非斉次の方程式に代入すると，$C_1'' - C_1' = xe^{-x}$ を得る．これは $C_1' = z$ を未知関数だと思うと（例１）でやった形の $z' - z = xe^{-x}$ という非斉次方程式になるので，この特解は（例１）のようにもう一度定数変化法を用いて，$z = C_3(x)e^x$ の形で解を探すと，$C_3' = xe^{-2x}$ が得られ，これを積分して $C_3 = -(\frac{x}{2} + \frac{1}{4})e^{-2x}$.（特解を探しているので，積分定数はゼロにしている）．これから $C_1' = z = -(\frac{x}{2} + \frac{1}{4})e^{-x}$ を得て，これを積分して $C_1 = (\frac{x}{2} + \frac{3}{4})e^{-x}$. これから特解が $y(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$ とわかった．

（方法１，２共通）特解が求まったので一般解は $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$ とわかるから，あとは定数 C_1, C_2 を決めてやればよい．$C_1 = -1, C_2 = \frac{5}{4}$ とわかり，最終的な解は $y(x) = -e^x + \frac{5}{4}e^{2x} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$. □

２つの方法の比較

- ズルイ方法１は，出来れば簡単だが，変に思いこんでしまうと見つかる解も見つからない可能性が大．また，斉次の部分が定数でなければ，なかなか見当がつきにくいのも事実．
- その点，方法２の定数変化法は計算は大変（特に n 階なら n 回もやらんといかん）だが，とにかく忍耐強くやればできる．要するに，定数変化法をやると解くべき微分方程式の階数が一階ずつ下がってくるわけだ.（より正確には，階数は下がらないけども，C_1 がモロに出ている項がないから，$z = C_1'$ で見たら階数が下がっている.）この意味で,「定数変化法」だけ知ってればまあ，何とかなる．

実は定数変化法はもう少しだけ効率よく行うことができる．それを次の小節で説明しよう．

1.7.3　具体的な解き方（定数変化法の一般論）

（教科書では 2.16 節に少しだけ載っている.）

この小節では，一般の場合の定数変化法をどうやるか，非常に簡単に説明する．実際の計算は大変だから,「まあ，そんなものか」と思ってこの講義では素通りし，皆さんが実際に応用する段階になってしっかり勉強して貰えば十分である．

ここでは一般の（係数が定数とは限らない）n 連立の ODE

$$\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = A(x)\,\vec{y}(x) + \vec{b}(x) \tag{1.7.6}$$

を考える．この斉次の部分だけを考えると，今までの一般論から，n 個の独立な解 $\vec{z}^{(1)}(x), \vec{z}^{(2)}(x), ..., \vec{z}^{(n)}$ が存在するはずである．それで定数変化法とは一般に，非斉次の特解を

$$\vec{y}(x) = c_1(x)\vec{z}^{(1)}(x) + c_2(x)\vec{z}^{(2)}(x) + ... + c_n(x)\vec{z}^{(n)}(x) = Z(x)\vec{c}(x) \tag{1.7.7}$$

の形で求めることをいう．ここで，後々のために，

$$Z(x) \equiv \Big[\vec{z}^{(1)},\ \vec{z}^{(2)},\ ...,\ \vec{z}^{(n)}\Big], \qquad \vec{c}(x) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} \tag{1.7.8}$$

を導入した.（そのように，$c_1(x), c_2(x), ..., c_n(x)$ を決めるのだ.）実際にやってみよう．

$$\frac{d}{dx}\vec{y} = c_1'\vec{z}^{(1)} + c_2'\vec{z}^{(2)} + ... + c_n'\vec{z}^{(n)} + c_1\frac{d}{dx}\vec{z}^{(1)} + c_2\frac{d}{dx}\vec{z}^{(2)} + ... + c_n\frac{d}{dx}\vec{z}^{(n)} \tag{1.7.9}$$

と

$$\frac{d}{dx}\vec{z}^{(j)} = A\vec{z}^{(j)} \qquad (j = 1, 2, ..., n) \tag{1.7.10}$$

から，

$$c_1'\vec{z}^{(1)} + c_2'\vec{z}^{(2)} + ... + c_n'\vec{z}^{(n)} = \vec{b} \tag{1.7.11}$$

が得られる．これが成り立つように，$c_1, c_2, ..., c_n$ を決めるとよろしい．

そのためには，まず上の (1.7.11) を $c_1', c_2', ..., c_n'$ に関して解く必要がある．これは，(1.7.11) を

$$\left[\vec{z}^{(1)},\ \vec{z}^{(2)},\ ...,\ \vec{z}^{(n)}\right] \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \cdot \\ c_n' \end{bmatrix} = \vec{b} \tag{1.7.12}$$

と書けば明らかなように，

$$\frac{d}{dx}\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \cdot \\ c_n' \end{bmatrix} = Z^{-1}\vec{b}, \qquad Z^{-1} \text{ は } Z \equiv \left[\vec{z}^{(1)},\ \vec{z}^{(2)},\ ...,\ \vec{z}^{(n)}\right] \text{ の逆行列} \tag{1.7.13}$$

と解ける．ここで $\vec{c}$ は $c_1, c_2, ..., c_n$ を並べて作ったベクトルである．(1.7.13) は，右辺に $\vec{c}$ が入っていないから簡単に積分できて，

$$\vec{c}(x) = \int_0^x Z^{-1}(u)\vec{b}(u)du \tag{1.7.14}$$

となる（積分定数はゼロとした）．よって，元に戻って

$$\vec{y}(x) = Z(x)\vec{c}(x) = Z(x)\int_0^x Z^{-1}(u)\vec{b}(u)du \tag{1.7.15}$$

が特解になる．(実は上で，積分定数を残した形でやると，一発で一般解が得られるのだが，ややこしくなるかと思って書かなかった.)

まあ，このようにして，一般の線型の場合にも特解を求められるわけだ．ただし正直のところ，この方法を一般の場合に実行するのはなかなか大変だ．たとえ斉次方程式の n 本の独立な解が求まっていても，逆行列 Z^{-1} を求めたりするのは大抵，非常に煩雑である．でも，ともかくこのようにすれば解ける，ということを知っていることは無意味ではない — ややこしいところはコンピューターに聞くとかできる — から，紹介した．

さてさて，以上で必要なことは大体書いてしまった．典型的な問題に言及しておくことにする．

問題の方程式は教科書の 2.6 節と 2.13 節で解説されている．質量 m のおもりがバネ定数 k のバネにつながっていて，速度に比例する摩擦力と $F_0\cos(\omega x)$ の外力を受けている場合の方程式：

$$my'' + cy' + ky = F_0\cos(\omega x) \tag{1.7.16}$$

を考えよう．ここで m, c, k, F_0 は非負の定数である．

まず，$F_0 = 0$（斉次）の場合．この場合，ODE の特性根は $\lambda^2 + c\lambda + k = 0$ の解で，

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \tag{1.7.17}$$

となる．この 2 つを α, β とすると，$y = c_1e^{\alpha x} + c_2e^{\beta x}$ が一般解であることは今までに習ったことですぐにわかる．(ただし，$\alpha = \beta$ の場合は $(c_1 + c_2x)e^{\alpha x}$ になる.）ポイントは，この解が m, c, k の関係によって，定性的に異なるふるまいをすることである．すなわち，平方根の中身が正・ゼロ・負のそれぞれによって，解の定性的なふるまい（単調に減衰するか，振動しながら減衰するか）が異なる．これは教科書の 2.6 節に詳しく説明されており，実際の応用上は重要であるから，各自，読んでおいて欲しい．要点は以下のようになる．

- $c = 0$ の時．この場合は減衰がないため，単振動をくり返すだけである．
- $c > 0$ の時．減衰があるため，$x \to \infty$ では解はゼロに行く．その行き方は：

- $c^2 > 4mk$ の場合は，特性根が２つとも負の実数である．従って，解は単調にゼロに収束する．
- $c^2 < 4mk$ 特性根はゼロでない虚部をもつ複素数であり，その実部は負．従って，解は（ゼロでない虚部のために）振動しながらゼロに収束する．
- $c^2 = 4mk$ の場合は両者の中間であり，振動しても高々 1 回だけでゼロに収束する．

次に，$F_0 > 0$ の場合．この場合は特解を求めて，それを斉次の場合の一般解に足せばよいので，今までの方法で解ける．ポイントは，やはり係数の関係によって，いろいろな定性的なふるまいが見られることである．これは教科書の 2.13 節に詳しく解説されているので，各自，読んでみて欲しい．大ざっぱにまとめると，以下のようになる．

- $c = 0$ の時．この場合は元々の系に減衰がないため，外力の影響をモロに受ける．$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ と書くとき，
  - $\omega = \omega_0$ の場合は，外力の振動数が系の固有振動に一致しているため，外力の影響がどんどん蓄積されて振幅がどんどん大きくなってしまう（共鳴）．
  - $\omega \neq \omega_0$ では外力に引きずられる形で系が振動するが，その振幅は一定である．
  - ただし，$\omega \approx \omega_0$ （でも $\omega \neq \omega_0$）の場合は，振幅は非常に大きくなりうる．また,「うなり」が見られる．
- $c > 0$ の時．この場合は系に減衰する効果が含まれているため，外力の影響はある程度殺される．式の上では，斉次の一般解が時間と共にゼロに収束してしまい，残るのは非斉次の特解のみ，となる．ただし，この場合も残る特解の振幅は ω によって変わる．

2 ラプラス変換

いままで，微分方程式についてやってきました．これから，少し目先を変えて「ラプラス変換」をやります．ただし，後でわかるように，このラプラス変換は微分方程式を解くのにも非常に役に立つのです．

微分方程式の方は教科書から離れた部分もありましたが，この「ラプラス変換」は一カ所を除き，大体，教科書通りに行きます．**これから「教科書」というときは，もう一冊の方「フーリエ変換と偏微分方程式」を指します．**

2.1 ラプラス変換の定義と基本的性質

$t \geq 0$ で定義された関数 $f(t)$ に対し，以下の積分で定義される関数 $F(s)$ を f の**ラプラス変換**という．

$$F(s) \equiv \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt. \tag{2.1.1}$$

ここで，s は上の積分に意味が付くような範囲に限定して考える（関数 f によって，「どのような s の時に上の積分に意味が付くか」が変わる）．「ラプラス変換」とは，f から F を作る変換そのものと，変換の結果の F，の両方を指すことがある．教科書に従い，小文字の関数 f のラプラス変換を大文字 F で表す．また，f のラプラス変換 F を $\mathcal{L}(f)$ とも書く：

$$\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt. \tag{2.1.2}$$

「正しい」記号法としては F よりも $\mathcal{L}(f)$ を推奨したいが，これには記号が煩雑になる欠点があるので，F を使うのも仕方あるまい．

逆に，F から f へ戻る変換を F の**ラプラス逆変換**といい，$f = \mathcal{L}^{-1}(F)$ と表す．ラプラス逆変換の結果をも「ラプラス逆変換」とも言う．ラプラス逆変換が実際にどのような変換になるかは，後で考える．また，逆変換が一意に決まるか，も後で考える．

（例）$f(t) = e^{at}$ の時，$\mathrm{Re}\, s > \mathrm{Re}\, a$ に対しては

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{at}\, e^{-st}\, dt = \lim_{t\to\infty} \frac{1 - e^{-(s-a)t}}{s-a} = \frac{1}{s-a}. \tag{2.1.3}$$

（例）$f(t) = \sin \omega t$ の時，$\mathrm{Re}\, s \geq 0$ に対しては

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty \sin(\omega t)\, e^{-st}\, dt = \lim_{t\to\infty} \frac{\omega - \{\omega \cos(\omega t) + s \sin(\omega t)\} e^{-st}}{\omega^2 + s^2} = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}. \tag{2.1.4}$$

上の計算は $\mathrm{Re}\, s < 0$ では正しくないことに注意しよう．また，この計算から $\dfrac{\omega}{\omega^2 + s^2}$ のラプラス逆変換は $\sin(\omega t)$ である，ことがわかる．

さて，ラプラス変換には，以下の非常に重要な性質がある．

定理 2.1.1 (ラプラス変換は線型だ) ラプラス変換は線型である．すなわち，f, g のラプラス変換が定義できる場合には，任意の定数 a, b に対し

$$\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g) \tag{2.1.5}$$

が成立する．

これを使うと，簡単な関数のラプラス変換からより複雑な関数のラプラス変換を求められる．

（例）指数関数のラプラス変換をまず求め，それから $\cosh x$ のラプラス変換を求める（教科書の 5〜6 ページ）．同様に，オイラーの公式を用いて $\cos x, \sin x$ のラプラス変換を求められる．（各自，やってみよう．）

ラプラス変換の便利な性質の一つが次の移動定理である．これを使うと，複雑な関数のラプラス変換を，より簡単な関数のラプラス変換から計算できるので，応用上は重要だ．

定理 2.1.2 (第一移動定理) $f(t)$ のラプラス変換が $F(s)$ なら，$e^{at}f(t)$ のラプラス変換は $F(s-a)$ である：

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s-a), \qquad e^{at}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}. \tag{2.1.6}$$

ただし，上の式が有効な s の範囲には注意が必要．

この定理の使い方の一例は教科書の p.8, 例 6 にある．また，基本的な関数のラプラス変換の結果が，教科書の p.7 と p.53〜55 にある．（テストにはこれらの表の一部分は与えるつもりだから，表を暗記する必要はない．ただし，練習のつもりで，この表の一部だけでも自分で導く — 定義に従って積分を計算する — ことが望ましい．積分の復習にもなるからね．）

（以下，若干の理論的なことをのべる．一段下げてうってあるところは少し高度な話題だから，わからなくても良い．）

ラプラス逆変換はいつ定義できるのか（収束座標）

ラプラス変換が定義できる s の範囲について考えよう．定義 $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ から，「もしこの積分が $s = s_0$ で収束するならば，すべての $\mathrm{Re}\, s > \mathrm{Re}\, s_0$ で収束する」ことがすぐにわかる．従って，このような s_0 の最小値を考えることで，$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ が

$$\mathrm{Re}\, s > \sigma \text{ ならば収束するが，} \quad \mathrm{Re}\, s < \sigma \text{ ならば発散する} \tag{2.1.7}$$

ような σ が一つあるとわかる（$\sigma = \pm\infty$ かもしれないが）．こうなる σ を**収束座標**という．

ラプラス変換の正則性

（これから一年生の数学ではやらなかったかもしれない少し高度なことを使う）$\mathrm{Re}\, s > \sigma$ ではラプラス変換は定義できている．さらにこの範囲ではラプラス変換を定義する積分が**絶対一様収束**していることもわかる．従って「積分下の微分」ができて，結果として $F(s)$ は s の**正則関数**であり，その微分は

$$\frac{d^n}{ds^n}F(s) = \int_0^\infty (-t)^n f(t)\, e^{-st}\, dt \tag{2.1.8}$$

で与えられる．

ラプラス逆変換について：後で詳しく説明するが，微分方程式への応用などでは，ラプラス変換の逆を求めることが最重要課題になる．つまり，「ラプラス変換をした結果が $F(s)$ の時，もとの関数 $f(t)$ を求めよ」という問題だ．

これには数学的に綺麗に答えられるのだが，「複素積分」の知識がすこしだけ必要になるため，教科書では迂回している．この講義では，少しだけ触れるが（以下の段を下げた部分），わからなくても良い．

ラプラス変換の逆については，以下の定理が成り立つ．

定理 2.1.3 (ラプラス逆変換) 関数 $F(s)$ が $\mathrm{Re}\, s > \sigma$ で定義されて正則だとする．このとき，「ラプラス変換した結果が $F(s)$ となる区分的に連続な関数 $f = \mathcal{L}^{-1}(F)$ は，以下で与えられる．

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty} F(s)e^{st}ds \tag{2.1.9}$$

ここで $s_0 > \sigma$ は任意である．

ラプラス変換は e^{-st} をかけて実数の t で積分；ラプラス逆変換は e^{st} をかけて虚数の s で積分，となっている．

この定理は強力，かつ（複素平面での積分さえ理解すれば）明瞭なものだが，その証明には「フーリエ変換」の知識が必要になるので，教科書では明記されていない．「フーリエ変換」は後で習うことになっているので，この講義でも証明には触れない予定である．

（例）以前に $\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$ （$s > a$）を見た．そこでこの逆 $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s-a}) = e^{at}$ を，上の積分を実行して確かめよう．(少し答えを知っているような感じで少しズルイのだが) 収束座標は $\sigma = a$ なので，$s_0 > a$ にとって積分を書くと，

$$\int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty} \frac{1}{s-a} e^{st} ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s_0+is'-a} e^{(s_0+is')t} i\, ds' = e^{s_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s'+i(a-s_0)} e^{is't} ds' \tag{2.1.10}$$

この積分は「留数計算」を用いると計算できて，答えは

$$= e^{s_0 t}\, 2\pi\, i\, e^{(a-s_0)t} = 2\pi\, i\, e^{at} \tag{2.1.11}$$

となる．$2\pi i$ で割ってやると，実際に e^{at} に戻る．(くり返しになるが，ここの具体的積分は複素積分の知識を必要とするから，わからなくても良い．上の例は，実際に定理 2.1.3 が成立している例としてのみ，示した.)

余力のある人は，教科書 p.53–55 の表のいくつかを選んでラプラス逆変換を具体的に計算してみよう．

さて，上の逆変換がわかりにくい人のために，教科書では苦肉の策を講じている．つまり，$\mathcal{L}^{-1}(F)$ を計算で求めるのを諦めて，pp.53〜55 の表を逆にひくことで f を求めよう，というわけだ．実際の応用としては表を見るのが一番速いかもしれないね．

ただし，表の逆引きをやるためには,「別々の関数から出発して同じ $F(s)$ に行く」ことが起こらない（つまり，$\mathcal{L}^{-1}(f)$ が一意に決まる）ことを確かめておかねばならない．これ自身は上の定理 2.1.3 からすぐに出るが，別の説明を念のために与えておく．

今，$f_1(t)$ と $f_2(t)$ をそれぞれラプラス変換した結果が同じ $F(s)$ だったとしよう．このときに $f_1 = f_2$（大体）をいいたい．そのために

$$\int_0^{\infty} f_1(t)\, e^{-st}\, dt = F(s) = \int_0^{\infty} f_2(t)\, e^{-st}\, dt \qquad \Longrightarrow \qquad \int_0^{\infty} \{f_1(t) - f_2(t)\}\, e^{-st}\, dt = 0 \tag{2.1.12}$$

がなりたつことに注意しよう．この最後の式はある σ があって，すべての $\mathrm{Re}\, s > \sigma$ で成り立つ．したがって問題は

$$\int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt = 0 \qquad \text{ならば}\ \ g(t) = 0\ \ \text{と言えるか？} \tag{2.1.13}$$

となる．この問題の答えは「ほとんどいたるところ」で $g(t) = 0$ である，と言えるのだが，その説明はなかなか難しい．大ざっぱな感じだけを説明しよう．

まず，(2.1.13) を s でいっぱい微分して

$$\int_0^{\infty} g(t)\, t^n\, e^{-st} dt = 0 \tag{2.1.14}$$

がすべての $n \geq 0$ で成立することに注意する．これらに適当な係数 a_n をかけて足すと，

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} g(t)\, t^n\, e^{-st}\, dt = \int_0^{\infty} \Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n\Bigr) g(t)\, e^{-st}\, dt = 0 \tag{2.1.15}$$

が得られる．しかし，a_n の取り方は基本的に任意だから，カッコの中の $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n = h(t)$ は基本的に任意の関数を表せる．つまり，(2.1.15) は，任意の関数 $h(t)$ に対して $\int_0^{\infty} g(t)\, h(t)\, e^{-st} dt = 0$ を意味する．これは $h(t) e^{-st}$ を改めて $h(t)$ と書けば，

$$\int_0^{\infty} g(t)\, h(t)\, dt = 0 \tag{2.1.16}$$

ということだ．こんな**任意の**h との抱き合わせでゼロになる関数はゼロしかない！というわけ．(実際には，いくら任意の h との抱き合わせとは言っても，積分がゼロと言うだけでは $g = 0$ とは結論できず，「ほとんどすべての」t では $g(t) = 0$ となったりするのだが，詳細は略.)

なお，さきほどまでやっていた「線型性」や「第一移動定理」は要するに表を逆引きするためのものなのである．逆変換を求める具体例が教科書の p.10 にたくさん載っている．各自，練習しておくように．

2.2 微分と積分のラプラス変換，微分方程式

さて，関数 $f(t)$ の微分や積分のラプラス変換を考える．教科書の 1.2 節に詳しいのでプリントは簡単にするよ．

微分については

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0), \qquad \mathcal{L}(f'')(s) = s^2\,\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0) \tag{2.2.1}$$

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0). \tag{2.2.2}$$

積分については

$$\mathcal{L}\Big\{\int_0^t f(\tau)d\tau\Big\} = \frac{1}{s}F(s), \qquad \mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s}F(s)\Big\} = \int_0^t f(\tau)d\tau \tag{2.2.3}$$

が成り立つ．細かい成立条件は教科書の p.11, 12, 16 を見よ．

問題は，これを使って微分方程式を解くことだ．例を使って説明しよう．

（例 1）微分方程式 $y'' - 2y' + y = 1$ を解け．初期条件は $y(0) = a, y'(0) = b$.

（解答）問題の微分方程式の両辺をラプラス変換する．上の定理と線型性を左辺に用い，また右辺はラプラス変換を計算して

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2\{sY(s) - y(0)\} + Y(s) = \frac{1}{s} \tag{2.2.4}$$

これを整理して（初期条件も代入した）

$$(s^2 - 2s + 1)Y(s) = \frac{1}{s} + (s-2)a + b = \frac{1}{s} + as + (b-2a) \tag{2.2.5}$$

つまり，

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2\,s} + \frac{as + (b-2a)}{(s-1)^2} \tag{2.2.6}$$

を得る．後はこれをラプラス逆変換すればよい．（どうやって計算するかは後にして）答えを先に書くと，

$$y(t) = 1 + (a-1)e^t + (b-a+1)te^t \tag{2.2.7}$$

となる．これは勿論，もとの微分方程式を定数変化法で解いたものと一致する．（この問題の場合，非斉次の特解は 1 であることがすぐにわかるから，定数変化法を使うまでもないが．）

（ラプラス逆変換の計算法）これらは（天下りだが）**部分分数に分解**してみると良い．

$$\frac{1}{s(s-1)^2} + \frac{as + (b-2a)}{(s-1)^2} = \frac{1}{s} + \frac{-1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{a}{s-1} + \frac{b-a}{(s-1)^2} \tag{2.2.8}$$

である．従って教科書 p.7 の表を逆読みするとこれらは

$$y(t) = 1 + (-1)e^t + te^t + ae^t + (b-a)t\,e^t = 1 + (a-1)e^t + (b-a+1)te^t \tag{2.2.9}$$

のラプラス変換になっていることがわかる．（ここで，$\frac{1}{(s-a)^n}$ の逆ラプラス変換は第一移動定理から，$\frac{1}{s^n}$ の逆ラプラス変換と e^{at} の積になっていることを使ったよ．）これが欲しかった $y(t)$ だ．

（例 2）微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$ を解け．初期条件は $y(0) = a, y'(0) = b$（この前のレポート問題）．

（解答）問題の微分方程式の両辺をラプラス変換する．結果は

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3\{sY(s) - y(0)\} + 2Y(s) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} \tag{2.2.10}$$

これを整理して（初期条件も代入した）

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} + (s-3)a + b = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} + (s-3)a + b \tag{2.2.11}$$

つまり，

$$Y(s) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2(s-1)(s-2)} + \frac{(s-3)a+b}{(s-1)(s-2)} = \frac{2(s+1)}{(s^2+1)^2(s-2)} + \frac{(s-3)a+b}{(s-1)(s-2)} \tag{2.2.12}$$

を得る．後はこれをラプラス逆変換すればよい．

ラプラス逆変換の計算法は先ほどと同じで，まず部分分数に展開する．第一項はなかなか大変やけども

$$Y(s) = \frac{3}{25}\frac{1}{s-2} - \frac{3}{25}\frac{s}{s^2+1} - \frac{6}{25}\frac{1}{s^2+1} - \frac{3}{5}\frac{s}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{5}\frac{1}{(s^2+1)^2} + \frac{2a-b}{s-1} + \frac{b-a}{s-2} \tag{2.2.13}$$

ここで教科書の p.7 と p.53〜55 の表をカンニングして，逆変換を行う．$(s-a)^{-1}$ の形のものは既に出た．新しいのは $\frac{s}{s^2+1}$ のようなものであるが，これらは $\cos t, \sin t, t\sin t, t\cos t$ の線型結合であることがわかる．間違わないように計算していくと

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{3}{25}e^{2t} - \frac{3}{25}\cos t - \frac{6}{25}\sin t - \frac{3}{5}\times\frac{t}{2}\sin t - \frac{1}{5}\times\frac{1}{2}(\sin t - t\cos t) + (2a-b)e^t + (b-a)e^{2t} \\ &= (2a-b)e^t + \Bigl(b-a+\frac{3}{25}\Bigr)e^{2t} - \frac{3}{25}\cos t - \frac{17}{50}\sin t + \frac{1}{10}t\cos t - \frac{3}{10}t\sin t \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

となる．$a=b=1$ の場合がレポートの解に一致している．正直，部分分数の計算がちょっと面倒ではあるが，まともに定数変化法をやるよりは楽だ．(これらの計算は，後で学ぶ方法でもう少しだけ簡単にできるようになるが...)

2.3 階段関数とデルタ関数

この小節の内容は，今までの流れと少しだけ異なる．微分方程式がどうこうというよりも，「階段関数」と「デルタ関数」という 2 つの重要な関数に慣れることが狙いである．定義から始めよう．

（単位）階段関数 $u(x)$ とは

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t<0) \\ 1 & (t>0) \end{cases} \tag{2.3.1}$$

という関数のことである．

上では $t=0$ で階段になっているものを書いたが，これを a まで平行移動した $u(t-a)$ も良く用いられる（教科書を見よ）．上の定義から

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & (t<a) \\ 1 & (t>a) \end{cases} \tag{2.3.2}$$

となっている．

(注) この講義では教科書に従うが，$u(t-a)$ という書き方は t と a のどちらが独立変数か混乱しがちなので，代わりに $u_a(t)=u(t-a)$ を使う方が良いと思う．(これなら，u_a は t の関数で，a のところに階段がある，という感じがより強く出るでしょ）．同じ注意は以下のデルタ関数にも当てはまる．

階段関数を導入した意味は，それを普通の関数 f にかけた効果が以下のようになるからである．定義から

- $f(t)u(t-a)$ は，$f(t)$ の $t<a$ の部分を強制的にゼロにした関数
- $f(t-a)u(t-a)$ は，$f(t)$ の $t>0$ の部分を a だけ右に平行移動した関数

である．(だからどうした，と言う前に下の「第 2 移動定理」を見よ．)

u そのもののラプラス変換は定義通り計算して

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \begin{cases} \dfrac{e^{-as}}{s} & (a>0) \\ \dfrac{1}{s} & (a\le 0) \end{cases} \tag{2.3.3}$$

となるが，更に以下の重要な性質がなりたつ．

（第２移動定理）$a > 0$ に対して以下が成り立つ：

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\,u(t-a)\} = e^{-as}F(s) \qquad \text{つまり} \qquad \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\,u(t-a). \tag{2.3.4}$$

この定理はラプラス変換の定義からすぐに出る．右側の式は，特に逆ラプラス変換を行う際に有効．

さて，今日の本題は以下の「ディラックのデルタ関数」である．

ディラックのデルタ関数 $\delta(t)$ とは，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt = f(0) \tag{2.3.5}$$

が（大体任意の）関数 f に対して成り立つような “ 関数 ” のことである．

階段関数 u と同じく，デルタ関数を a だけ平行移動した $\delta_a(t) = \delta(t-a)$ もよく使われる．すなわち，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)\,\delta(t)\,dt = f(a). \tag{2.3.6}$$

講義でも説明するが,「デルタ関数」は数学的な意味での**関数ではなく，超関数とよばれるものの一種**である（この後の「おまけ」も参照）．実際，普通の関数で (2.3.5) を満たすものはあり得ない — (2.3.5) に $f(0)$ しか出てこないから $\delta(t)$ は $t \neq 0$ ではゼロであるべきだが，$t = 0$ のみでゼロでない関数の積分はゼロにしかなれない．逆に言えば,「デルタ関数」の $t = 0$ での値は程よいくらいに無限大になっているべきなのである．

「デルタ関数」を直感的にとらえるには以下のように考えるのが良いだろう．

- $\delta(t)$ は $t = 0$ を中心にした鋭いピーク $\varphi_n(t)$（ただし面積 1）の極限（$n \to \infty$）である．f_n の例としては

$$\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\,e^{-nt^2}, \qquad \varphi_n(t) = \begin{cases} n/2 & (|t| < 1/n) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{2.3.7}$$

  などが挙げられる（これが教科書の解釈）．

- デルタ関数は階段関数の微分である：

$$\delta(t-a) = \frac{d}{dt}u(t-a). \tag{2.3.8}$$

  もちろん，階段関数の微分は通常の意味では定義できないので，これは積分の中に入れて，部分積分の意味で解釈する．実際 $f(t)$ が無限遠でゼロになっているとすると

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-a) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{d}{dt}u(t-a) = \Big[f(t)\,u(t-a)\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\,u(t-a)\,dt \\ &= -\int_{a}^{\infty} f'(t)\,dt = -\Big[f(t)\Big]_{a}^{\infty} = -f(\infty) + f(a) = f(a)\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

  となってメデタシメデタシ．

デルタ関数のラプラス変換は，

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \begin{cases} e^{-as} & (a > 0) \\ 0 & (a < 0) \end{cases} \tag{2.3.10}$$

であることは定義からすぐにわかる．

2.3.1 おまけ：超関数（一般関数）とは

上で導入した「デルタ関数」は超関数（一般関数）とよばれるものの一種である．ここでは（興味を持った人のために）超関数について非常に簡単，かつええ加減な説明を行う．

もともと，数学で言う「関数」$f(t)$ とは（考えている）t のそれぞれの値に対して関数の値 $f(t)$ が決まっているもの，であった．ところが，このような定義では狭すぎて，実際の応用上は不便である．実際，空間の非常に狭い部分に電荷が集中しているものを遠くから見ると，これは空間の 1 点にそれだけの電荷があるものとほとんど同じに見えるだろう．これは「点電荷」として物理では普通に出てくるが，数学で言う「関数」でこのような極限部分布を表すことはできない．これは不自由かつ不自然である．

このような反省から，それまでの「関数」の概念を拡張することが求められ,「超関数」が定義された．上の電荷の例で重要なのは細かい電荷の分布ではなく（どうせそんなものは遠くからでは見えない）,「この電荷がこの点に集中していて，その総量は○○である」という事実である．つまり，電荷の大体の**位置と総量**だけが重要なのだ．

これを数学的にとらえるには積分が最適である．なぜなら，積分というのは「平均」のようなものだからだ．これをふまえて超関数の定義は以下のようにして行う（非常にわかりにくい定義だと思うが，後での説明を見て頂くと少しはわかったつもりになるかも）．

- まず,「試験関数」$f(t)$ を設定する．これは何回でも微分できて，十分大きな $|t|$ ではゼロになるような関数ならなんでもよい．
- 超関数 T とは，個々の試験関数 $f(t)$ に実数の値 $T(f)$ を**線型に対応させる**対応関係（写像）T のことである．ここで T が線型というのは，実数 c_1, c_2 と試験関数 f_1, f_2 に対して

$$T(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 T(f_1) + c_2 T(f_2) \tag{2.3.11}$$

となることをいう．

正直，訳のわからない定義だろうと思う．そこでいくつか例を挙げよう．

1．勝手な（積分可能な）関数 $g(t)$ を一つ固定して

$$\text{試験関数 } f(t) \text{ に積分値 } \int_0^\infty f(t)g(t)dt \text{ を対応させる写像} \tag{2.3.12}$$

は超関数になっている．なぜならこの写像は線型だから．この意味で普通の関数 g も**試験関数と抱き合わせて積分するという約束の下で**超関数の一種とみなせるのだ（だから，普通の関数の一般化という意味で超関数のことを「一般関数」とも言う）．上の超関数の定義はこの「抱き合わせて積分」が持っている最低限の性質を抽象化して導入されたので，これは実は当然なのである．

2．ディラックのデルタ関数 $\delta(t-a)$ は超関数になっている．実際，(2.3.6) は

$$\text{試験関数 } f \text{ に } f(a) \text{ を対応させる写像} \tag{2.3.13}$$

と読むことができ，この対応関係は明らかに線型だからだ．

本文でも述べたように，この対応関係を普通の関数を用いて積分の形で書くことはできない．しかし，(2.3.7) に出ている φ_n を用いて

$$\int \delta(t-a)f(t)\,dt = f(a) = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n(t-a)f(t)dt \tag{2.3.14}$$

と書くことはできる．既に述べたように，この式は $\delta(t-a) =$ “lim” $\varphi_n(t-a)$ と書きたくなるが，ここの極限のは上のようにあくまで $f(t)$ との抱き合わせの積分の形で 理解すべきものである．抱き合わせの形で理解すれば，これは (2.3.12) と全く同じ形であることがわかるだろう．

2’．$\delta(t-a) = u'(t-a)$ の関係 (2.3.8) も，今では自然に見えるだろう．(2.3.9) は正に「試験関数と抱き合わせて部分積分」をしていることになるから．

3．他にもどんどん超関数を定義できる．例えば

$$\text{試験関数 } f(t) \text{ に } -f'(a) \text{ を対応させる写像（} f'(a) \text{ は } f(a) \text{ の導関数）} \tag{2.3.15}$$

も超関数であり，これは「デルタ関数の一階微分 $\delta'(t-a)$」とよばれる．なぜこれがデルタ関数の微分かは，以下の形式的な部分積分の計算からわかる．つまり，デルタ関数の微分 $\delta'(t-a)$ があったとし，かつ，これが**普通の部分積分の公式を満たすと仮定すると**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t-a)f(t) = \Big[\delta(t-a)f(t)\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\, f'(t) = -f'(a) \tag{2.3.16}$$

となるはずであり（最後のところはデルタ関数の定義を使った），これはまさに (2.3.15) に他ならないからである．超関数の理論はこの関係を逆手にとって，上のような部分積分の公式から超関数の微分を定義する．

同様の理由で

$$\text{試験関数 } f(t) \text{ に } (-1)^n f^{(n)}(a) \text{ を対応させる写像（} f^{(n)}(a) \text{ は } f(a) \text{ の } n \text{ 階導関数）} \tag{2.3.17}$$

を「デルタ関数の n 階微分 $\delta^{(n)}(t-a)$」とよぶ．

2.4 ラプラス変換の微分と積分

以前に f の微分や積分のラプラス変換がどうなるかをやった（2.2 節）．今度はその逆で,「ラプラス変換が F の微分や積分になるには，もとの関数は何なのか」を考える．

答えを書いてしまうと（いつも通り，f のラプラス変換を F と書く），

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s), \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = -tf(t) \tag{2.4.1}$$

また，

$$\mathcal{L}\Big\{\frac{f(t)}{t}\Big\} = \int_s^\infty F(s')ds' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{L}^{-1}\Big\{\int_s^\infty F(s')ds'\Big\} = \frac{f(t)}{t} \tag{2.4.2}$$

である（細かい条件については教科書の p.30 を参照）．

これらの式は，勿論，いろいろと役に立つ．教科書（p.30）にも載っているように，これを利用して新たな関数のラプラス変換を計算できる．また，ラプラス逆変換を求める場合にも使えるのは明らかだ（例は教科書 p.31）．

ではあるが，それは具体的な応用問題（応用事例）を通して身につければ良いだろう．この講義では，上のラプラス変換と逆変換の関係を，一応知っていれば良いものとしよう．

2.5 畳み込み（合成積）

天下りではあるが，以下の定義から始める

関数 f, g に対して，以下の関数 $h(t)$ を f, g の畳み込み（または合成積，convolution）といい，$f * g$ と書く：

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{2.5.1}$$

注意：考えている問題によって，積分の範囲は $(0,t)$ だったり，$(-\infty,\infty)$ だったりする．今は $t \geq 0$ で定義された関数を主に考えているので，積分範囲 $(0,t)$ になっている［上の積分で f, g 両方の引数が非負であるためには，$0 \leq \tau \leq t$ が必要十分］．

畳み込みはいろいろな場面に出てくる．皆さんがよく知っているはずの電磁気学の例では：

（問）空間中に電荷密度 $\rho(y)$ で電荷が分布している．この電荷分布が点 x につくる静電ポテンシャルを求めよ．

（答）点 y の単位点電荷が x に作るポテンシャルは $\dfrac{1}{4\pi|x-y|}$ だから，これを空間全体で $\rho(y)$ で足し合わせる（積分する）と良い．答えは

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x-y|}dy \tag{2.5.2}$$

この例では静電ポテンシャルが密度 ρ とクーロンポテンシャル $|x-y|^{-1}$ の（３次元空間での）畳み込みで書かれている．このように畳み込みは「ある点（時刻）での効果が空間（や時間）を超えて別の点（時刻）に伝わっていく様子」を記述する際に良く出てくる．

さて，この「たたみこみ」とラプラス変換には以下の関係がある：

上で使った f, g, h のラプラス変換を F, G, H とすると，

$$H(s) = F(s)G(s) \tag{2.5.3}$$

である．つまり，畳込みをラプラス変換した結果はラプラス変換の積になるのだ．

これは逆ラプラス変換を求める際に，非常に重要である．すなわち，何か積の形になっている関数を逆ラプラス変換すると，結果は畳み込みになっているはずだからだ．

3 微分方程式の一般論（力学系の視点から）

この節の内容は完全な**おまけ**であり，シラバスにはない．しかし，皆さんが将来，微分方程式を使う場合，シラバスにあるような「解き方」も大事だが，同時に，この節にのべるような定性的な議論も大事である．時間が少しあまりそうなので，触れておくことにする．教科書 I では対応する内容が 3 章に展開されている．

今までは微分方程式の解をどのように求めるか，を延々とやってきた．しかし，完全に解ける方程式などホンの一部で，それ以外の大多数には全く別のアプローチが必要だ．ここではそのような試みの一端を紹介する．多分，将来,「非線型」常微分方程式を扱うときに少しは役に立つのではないかと期待している．

まず，考える微分方程式を限定しておこう．考えるのは n 未知数，一階の**自励系**とよばれる微分方程式で,（独立変数を t，未知関数を $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ と書いて）

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)), \\ y_2'(t) = f_2(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)), \\ \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad , \\ y_n'(t) = f_n(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)) \end{cases} \tag{3.0.1}$$

の形に書けるものである．(**右辺には t が陽に現れていない**ので，t への依存性は $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ を通してしか入ってこない：これが「自励系」の意味である．）後の便利のためにベクトル $\vec{y}(t) \equiv (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$ を定義しておこう．また，微分方程式の右辺にある f_i をまとめて $\vec{f}(\vec{y}(t)) = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ とも書く．すると，考えたい微分方程式は

$$\frac{d}{dt}\vec{y}(t) = \vec{f}(\vec{y}(t)) \tag{3.0.2}$$

と書ける．

3.1 相空間と方向場

この節の内容は，教科書 I の 3.2 節である．

まず，この微分方程式 (3.0.2) の解は $y_1, y_2, \ldots, y_n$ で作られる n-次元空間の中で，**点の軌跡**として表されることに注意しよう．つまり，ある時刻 t での $\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$ は，その位置ベクトルが $\vec{y}(t)$ をもつような n-次元空間での一点で表される．時刻 t が変わると，この点が動いていくので軌跡ができるわけだ．$\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$ が入っているこの空間を**相空間**とよぶ．また，おおざっぱな言葉遣いでは，このようにある空間の中の点がある法則に沿って時間発展する系を**力学系**とよぶ．力学系の理論という新しい視点から微分方程式を眺めることで，微分方程式の扱いにも新しい地平が拓けるのである．この 3 章ではこのような力学系からの視点を主に紹介する．

さて，自励系には次の２つの著しい特徴がある．

（１）微分方程式の右辺に時間が陽に入っていないため，相空間の**解の軌道は決して交わらない**．なぜなら，もし交わったとすると，同じ初期条件から違う解ができることになって，これは解の一意性に反するからである．

（２）微分の定義を思い出すと，n-次元空間の中のベクトル $\vec{y}'(t) \equiv (y_1'(t), y_2'(t), \ldots, y_n'(t))$ は，時刻 t での解 $\vec{y}(t)$ が**どの方向に動きたいか**を表現しているものだ．これは考えてる微分方程式では $\vec{f}(\vec{y}(t))$ に等しい．つまり，ある時刻 t で解がどの方向に動きたいかは，$\vec{f}(\vec{y}(t))$ で与えられる．(ここまでは一般の話．）さて，自励系では $\vec{f}(\vec{y}(t))$ が $\vec{y}(t)$ だけで決まり，時刻 t は入ってこない．$\vec{y}(t)$ とは解が今いる位置だから，これは**解が動きたい方向は，解が今いる位置だけで**決まることを意味する．

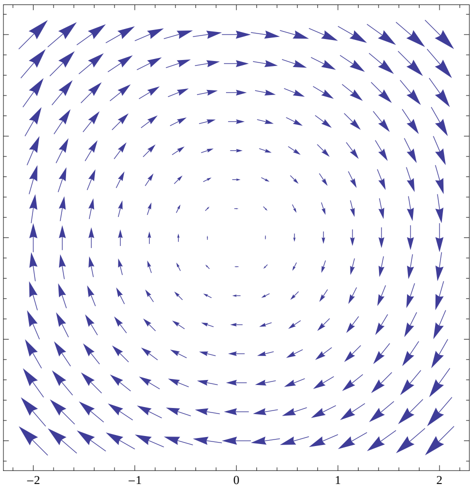
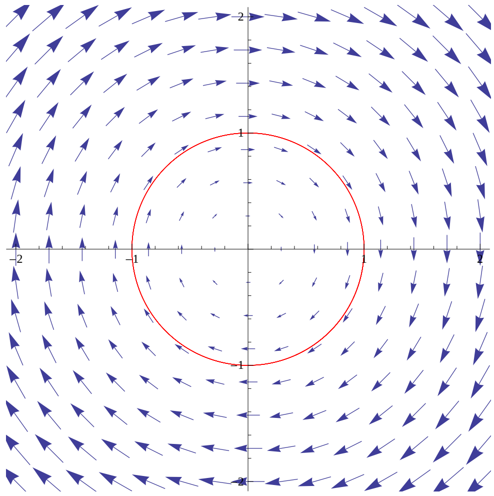
以上の事実を微分方程式の解を調べることに応用しよう．相空間の各点がどの方向に動きたいかはその各点の位置だけで決まるので，各点に「動きたい向き」を表すベクトルが生えていると思うとわかりやすい．それで，解はこのベクトルの矢印に沿って動いていくわけだ．この事情から，ベクトル $\vec{f}(\vec{y}(t))$ を**方向場**とよぶことが多い．

各点で方向場を書くのは（忍耐さえあれば）誰でもできる．(しつこいかもしれないが，方向場は微分方程式を解く前から書けることを強調しておく.）更に，方向場を各点で書いてやると，いろいろな初期条件から出発した解がどのようにふるまうのか，解は全体としてどのようになっているのか，などの解の**大域的性質**が直感的にわかりやすい．だから，微分方程式を解こうとする場合にはまず方向場を書くことから，本当はやってみるべきなのだ．

（例１）ここのところをみんなのよく知っている調和振動子で例示したのが下の図である．微分方程式は $x'' = -x$ なので，$y = x'$ を導入すると

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \tag{3.1.1}$$

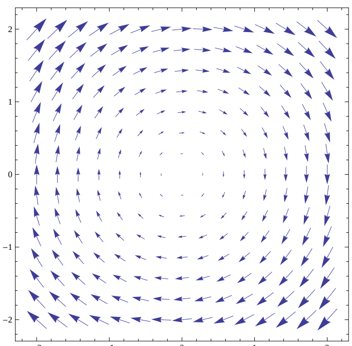
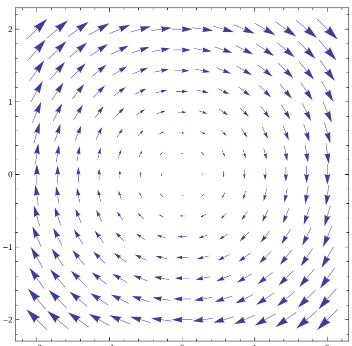
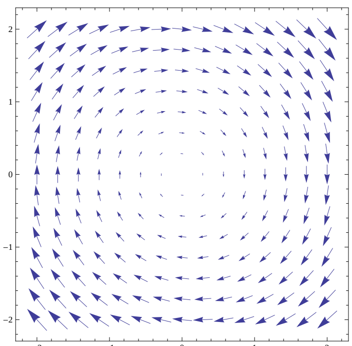
となる．この方向場を書いたのが左，これにひとつの初期条件の解を書き加えたものが右である．確かにぐるぐると回っている様子がでている．

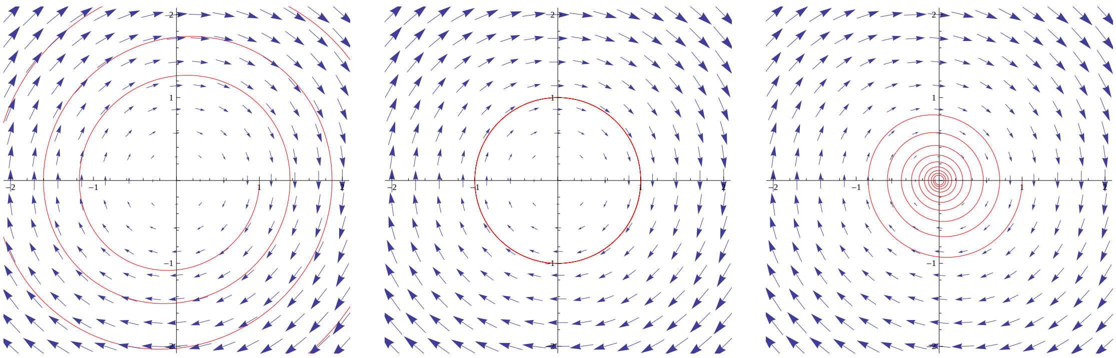
（例２）しかし，方向場を過信するのは危険である．以下に調和振動子に摩擦の項を加えた方程式

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - \gamma y \end{cases} \tag{3.1.2}$$

の方向場を載せた．左から $\gamma = -0.1, 0.0, 0.1$ である．($\gamma = 0$ が調和振動子の場合である．$\gamma < 0$ というのは擦れば擦るほど速くなる，というわけで物理的ではないのだが，まあ，例として用いる.）

どうだろうか？３つともほとんど同じに見えるのではないか？(まあ，同じに見えるのはグラフィックスソフトの解像度の問題でもあるけど，ゼロでない長さの矢印を使う限り，この問題は避けられない.）しかし，ここに（３つとも同じ初期条件 $x(0) = 1.0, y(0) = 0$ の）軌道を重ねてみると...



と，３つが全く違うふるまいをしている（左から $\gamma = -0.1, \gamma = 0, \gamma = 0.1$ の場合）．エネルギーの保存則から予想されるように，$\gamma \neq 0$ では軌道が閉じない！

というわけで，方向場の概略からはそれほど詳しい情報は得られない．なので，十分な注意は必要なのだが，大体の感じ（特に**短い時間間隔での解の様子**）はわかるだろう．

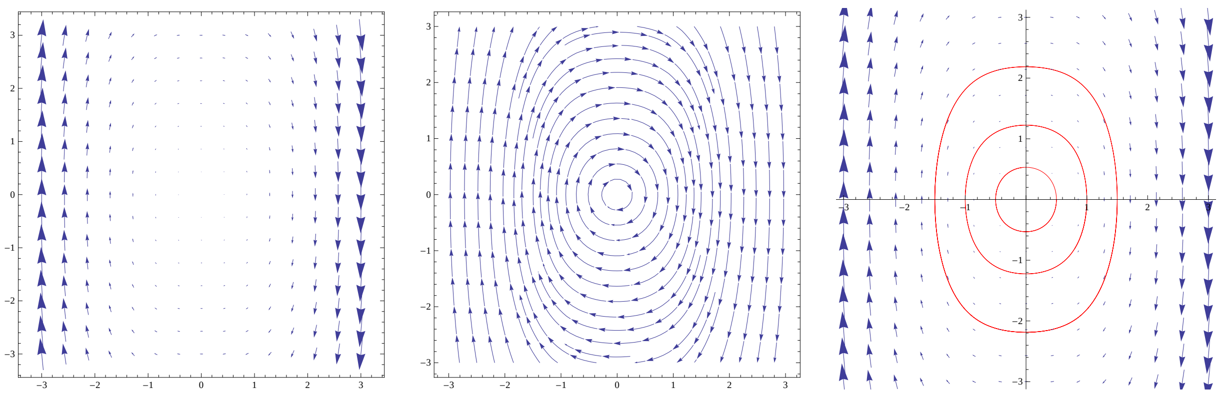
なお，考えている軌道が本当に閉じるのかどうかは，一般には非常に判定しにくい問題であり，(他に情報がなければ）解いてみるしかない．ただし，物理や工学で出てくるかなりの系は**保存系**であることが多い（エネルギーやそれに類するものが保存）．この場合は上の調和振動子のように，エネルギー保存から軌道が閉じることが結論できる．

もう少しいくつかの例を挙げておこう．

（例３）Duffing 方程式．非調和振動子（バネの復元力が変位に完全には比例せず，変位の３次の項がある場合）

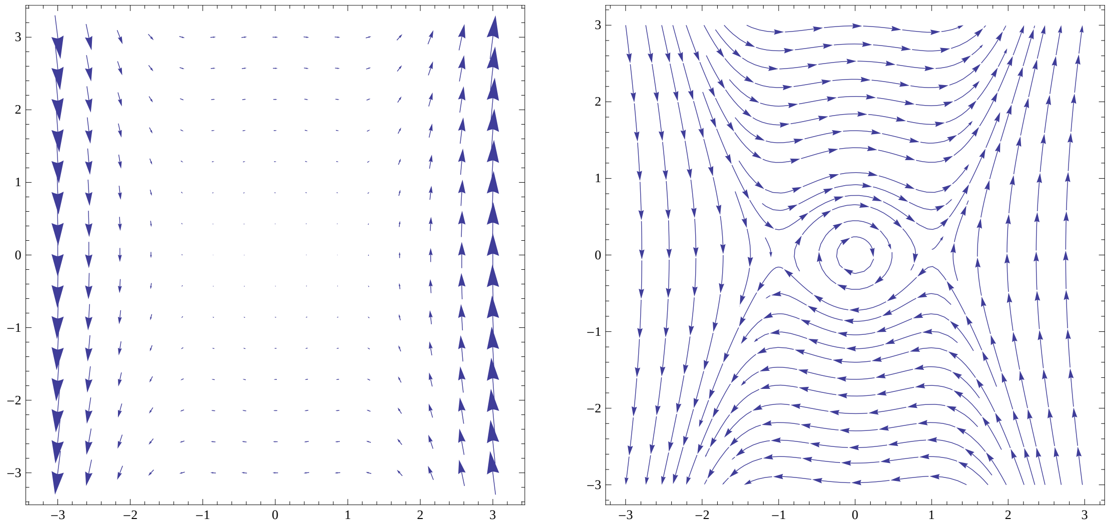
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - \alpha x^3 \end{cases} \tag{3.1.3}$$

$\alpha = 1$ の場合の方向場が下の左だが，中心付近ではベクトルの長さが短すぎるのでよくわからない．ので，ベクトルの長さを解りやすく伸ばして書いたのが下の真ん中の図である．



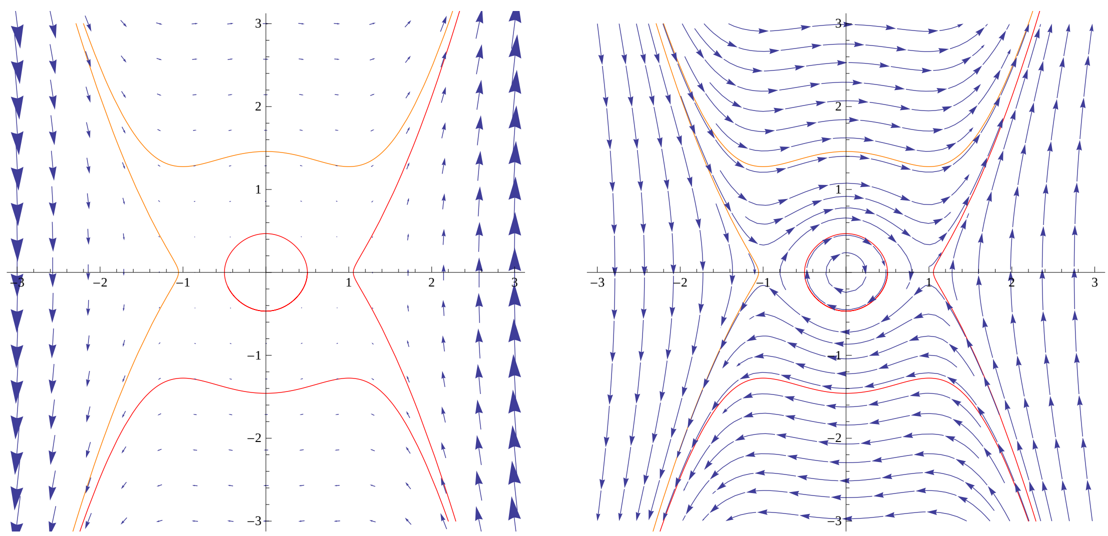
この場合，定性的には調和振動子とあまり変わらない．いくつかの初期条件に対する解の軌道を方向場と共に描いたのが上図の右のものである．$\alpha > 0$ の場合は定性的にはあまり面白くない．

面白いのは $\alpha < 0$ の場合である．例として $\alpha = -1$ を取り上げた．方向場を描いたのが下図左だが，またもやベクトルが短くてよくわからない．ので，ベクトルの長さを伸ばして流れの様子を描いたのが下図右．



特に上の右図を見ると，どのように解が流れて行くかが大体，わかる．今回は $(0,0)$ と $(\pm 1,0)$ が何となく特殊で，これらの点は動いていないようだ．その周りの流れはなかなか複雑になっているようだ．

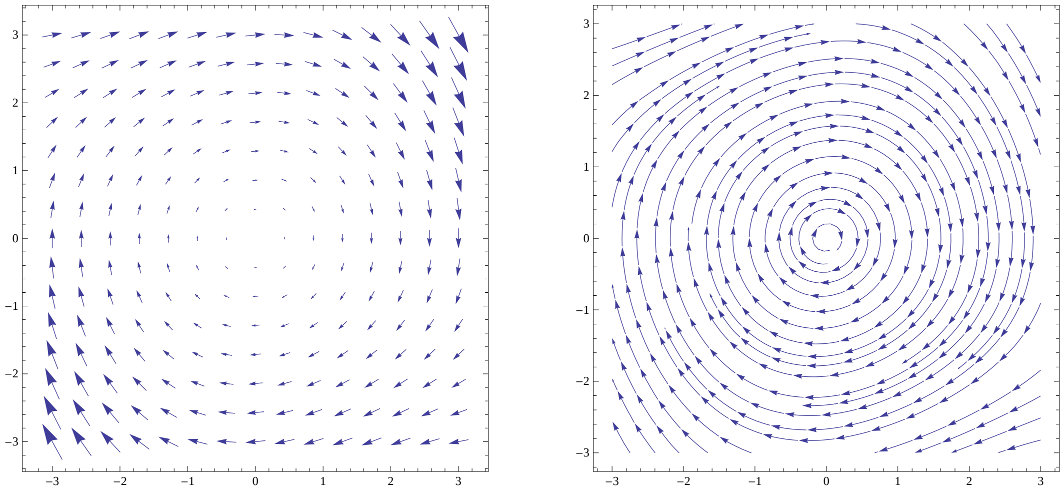
これに実際の軌道を重ねて描いたのが下図．



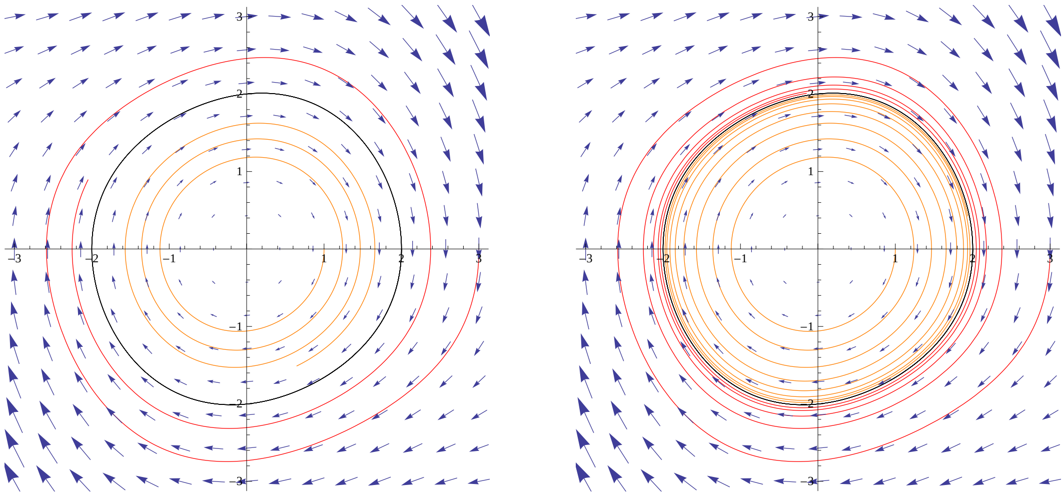
（例４）van der Pol 方程式（教科書の p.189）

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + \mu(1-x^2)y \end{cases} \tag{3.1.4}$$

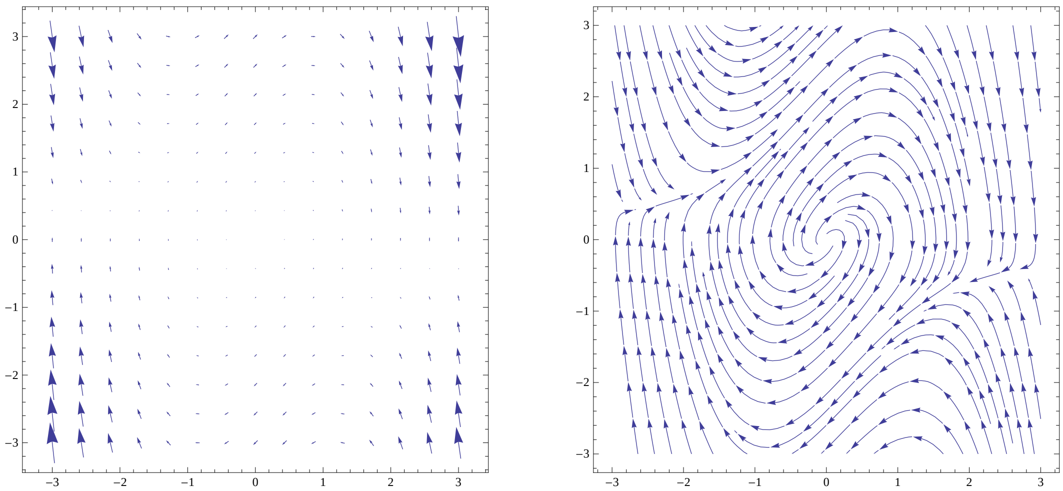
まず，$\mu = 0.1$ の場合の方向場が下図左，流れが下図右．見えにくいが，半径 2 くらいの円に近い周期軌道がある．



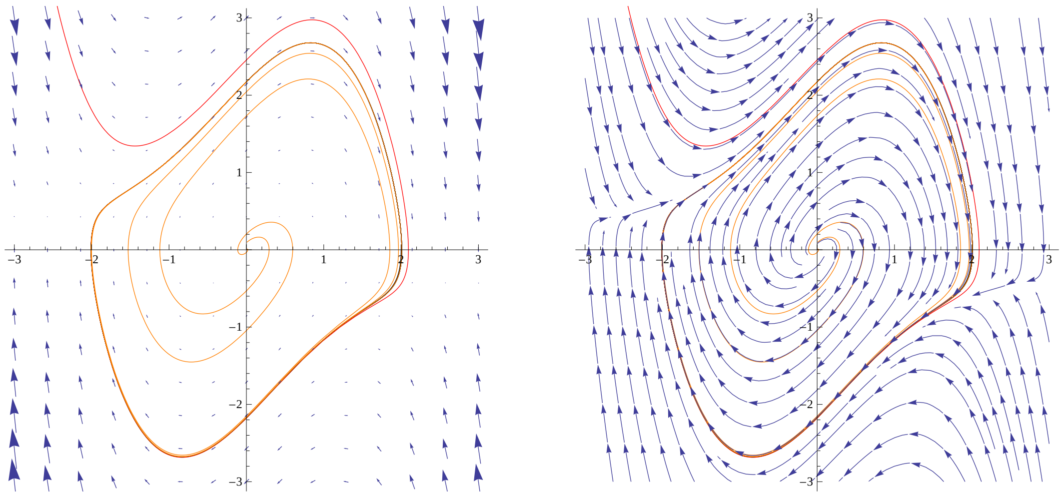
実際の軌道を描いたのが下の図．右の方はもっと時間をかけた場合で，時間が経つと周期軌道にまとわりついて行く様子が見えている．



μ の値が大きくなっても，定性的振る舞いは同じだが，軌道が歪になってくる．例えば $\mu = 1$ の場合をやってみると方向場と流れの様子は下のようになっている．



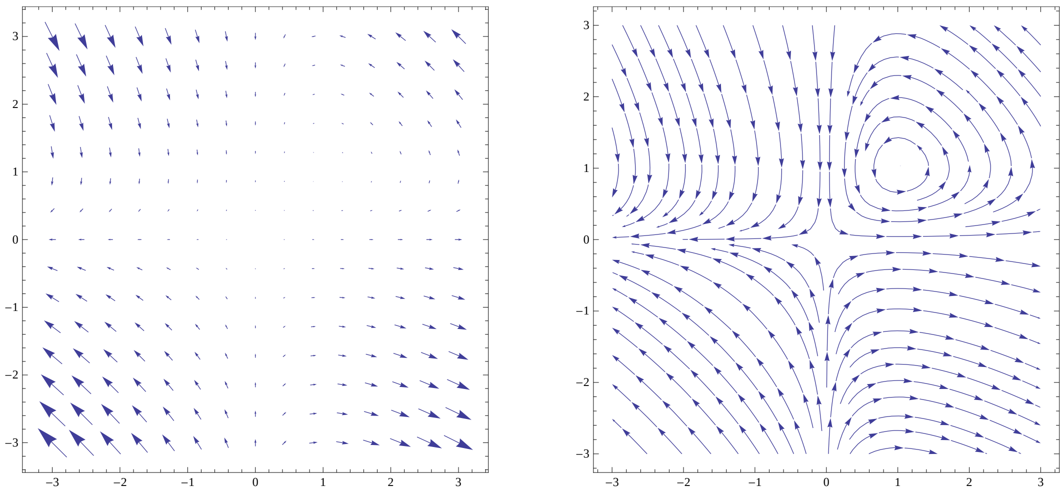
やはり周期軌道があるが，かなり長方形に近い形である．これに実際の軌道を重ねてみると以下のようになる．方向場では矢印が見えにくいので，流れと重ねたものを右に載せた．



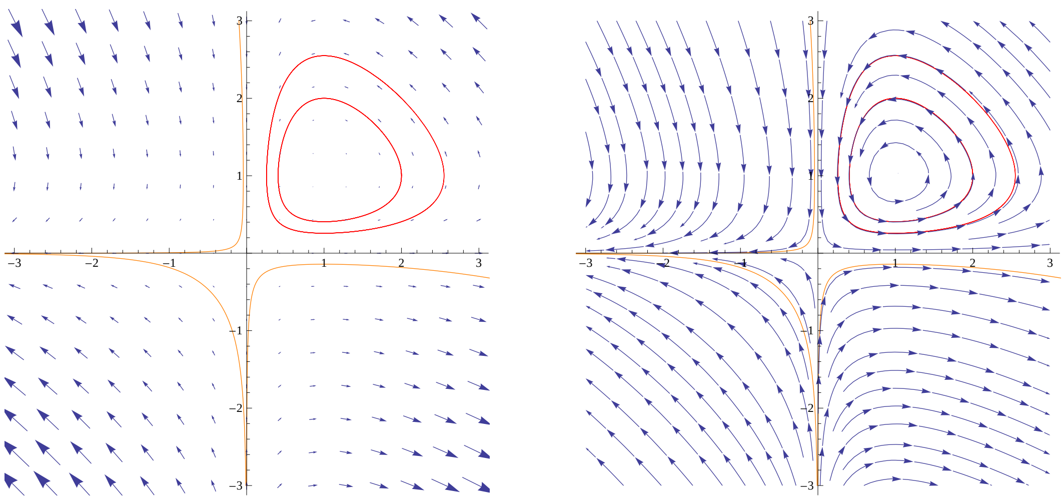
（例５）Lotka-Volterra 方程式

$$\begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = \mu y(x-1) \end{cases} \tag{3.1.5}$$

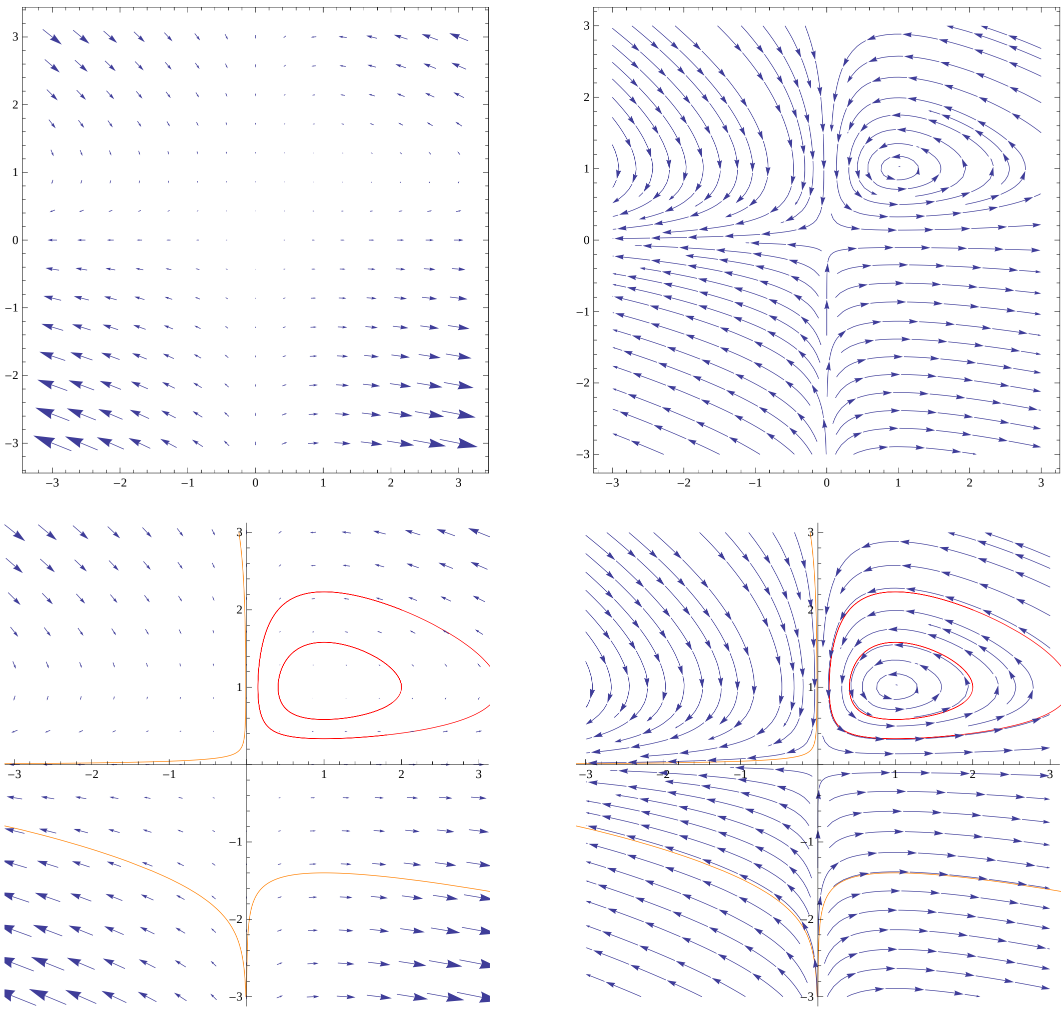
$\mu = 1.0$ の時の方向場と流れを下に示す．



またいくつかの軌道を重ねると下のようになっている．



また，$\mu = 0.4$ の場合は以下のようになっている．共に，第一象限の一点の廻りに廻っている感じが出ている．



3.2 臨界点（固定点）と limit cycle

この節の内容は教科書 I の 3.3 節である．

以上で軌道の大体の様子は見たのだが，これだけでは不十分である．実際，方向場を見たらほとんど同じ系が異なったふるまいを示すかもしれない．正直，このような問いに対する一般的な答えはない（あったら,「非線型」の問題がこんなに難しく，かつ面白くはならない）．でもそれだけでは困るので，なにか手がかりが欲しいわけだ．

ここではその第一歩として,「固定点」「リミットサイクル」について簡単に触れる．

Lotka-Volterra 方程式を思いだそう．相空間での解の軌道は割合単純だった．原点と第一象限 $(1,1)$ の 2 点は，微分方程式で動かない．(方向場がここではゼロだから）．それ以外の点は何らかの形で動く．このように動かない点は，もちろん，一番簡単な解であるから，まずはこのようなものを探していくべきだろう．そこで，このように（微分方程式に従って時間発展しても）動かない点のことを**固定点（不動点，fixed point）**とよぶ．教科書ではこれを**臨界点**とよんでいる．

次に，van del Pol 方程式を思い出そう．この場合，半径が 2 くらいの周期解（閉じた軌道）が存在するように見える．このような周期解も,「ここに乗っていれば他にはいかない」という意味でなかなか性質の良いものだから，名前をつけて大切にしよう．これは**極限円（limit cycle）**とよばれている．

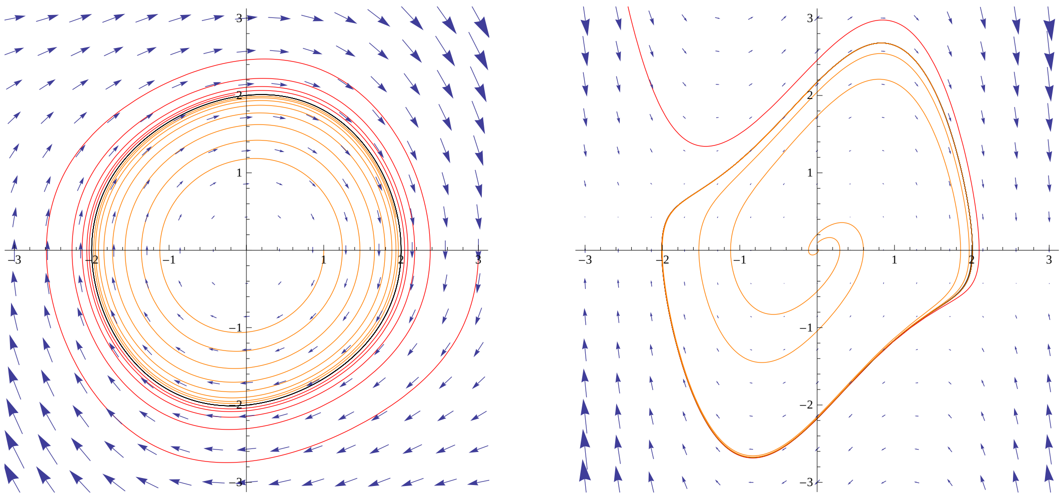
複雑な微分方程式の解の様子を知るには，まずはこの 2 つ（固定点と limit cycle）を見つけることから始めるのがよい．Limit cycle はなかなか見つけにくいことも多いが，固定点なら $\vec{f}(\vec{y}) = 0$ の根を探せば良いんだから，普通の連立方程式の解の問題で，簡単である．

教科書 I の 3.3 節には固定点や極限円の仲間がいろいろ載っているが，これらはまあ，実際の応用でぶつかったときに学修すれば良いだろう.（時間の関係もあって，先を急ぐ.）

3.3 安定と不安定

さて，固定点やリミットサイクルが見つかったとして，これらはすべて，同等に重要なものなのだろうか？理学や工学の応用上は，これらの「**安定性**」が問題になるので，それをこれから説明しよう．

安定性の概念を説明するために，van del Pol 方程式を例にとる．軌道の様子を再録した（左は $\mu = 0.1$，右は $\mu = 1.0$）．どちらの場合もリミットサイクルがあって，そのリミットサイクルから少し離れた軌道は，**リミットサイクルに吸い込まれるように**運動している．つまり，初めは少々離れていても，時間が十分経てば，解はリミットサイクルの非常に近くにくるから，実質的に解はリミットサイクルと同じと思っても良いだろう —— このリミットサイクルだけ見ていても，解は大体解る（あくまで $t \gg 1$ での話）．つまり，このリミットサイクルは**時間が十分経ったときの解の様子をほぼ正確に表す**という意味で，非常に重要なのだ．



一方，原点は固定点になっている．なっているけども，上の図で示されているように，原点から少しずれた解は，時間と共に原点からどんどん離れてしまう（そして結局，リミットサイクルに吸い込まれていく）．この意味で，$t \gg 1$ では，原点の近くにいる解はほとんど無い —— 初期条件が正確に原点上にあったもののみ，原点にとどまれる．ということは，$t \gg 1$ の解を見る場合，原点という固定点はほとんど重要でない，訳である．

このように，時間が大きくなっていったときのふるまいを知りたければ，固定点やリミットサイクルを分類すべきであろう．これが「安定性」の概念が出てくる理由である．

定義 3.3.1 P_0 を考えている ODE の固定点とする．

- P_0 の適当な近傍から出発した軌道が $t \to \infty$ で P_0 にいくらでも近づくとき，P_0 は**漸近安定**という．
- 勝手な $\epsilon > 0$ に対して適当に $\delta > 0$ をとって，$|\vec{y}(0) - P_0| < \delta$ なる初期条件 $\vec{y}(0)$ から出発した解は未来永劫 $|\vec{y}(t) - P_0| < \epsilon$ を満たすようにできるとき，P_0 は**安定**という．
- 安定でない場合，P_0 は**不安定**という．

また，リミットサイクルについても，上と同様の定義を行う．

（注意）「安定」という場合には，固定点の近傍にとどまり続ければよい．つまり，$t \to \infty$ で振動を続けて固定点に収束しないような場合でも，「安定」とよぶ．「漸近安定」の場合はモロに，$t \to \infty$ では固定点に収束する事を要求している．この意味で，「漸近安定」の方が「安定」よりも厳しい条件な訳．

正直，「安定」よりも「漸近安定」の方がわかりやすいだろうから —— 今日は「漸近安定」だけ考えていても良い．ともかく，このように定義すると，$t \gg 1$ でのふるまいにとって大事なのは「安定」な固定点やリミットサイクルであるといえる．

（例）van der Pol 方程式ではリミットサイクルは漸近安定，原点は不安定である．
（例）Lotka-Volterra 方程式では原点は不安定，$(1, 1)$ は安定な固定点ということになる．

（例）Duffing 方程式の $\alpha < 0$ の場合はなかなか厄介だ．固定点は $(0,0)$ と $(\pm\sqrt{1/\alpha}, 0)$ の合計 3 点である．このうち，流れの図から見て，原点は何となく安定（？）であるが，$(\pm\sqrt{1/\alpha}, 0)$ の方はどうも不安定のようだ —— 一旦，この固定点に近づいても，離れて行ってしまう解について既に見た．

さて，このような安定，不安定を図から判断するだけでは騙されやすいので，もう少しちゃんとした理論的考察をやってみたい．これが以下に述べる線型解析である．

不安定の度合い；線型解析　これまでは流れの図を基にして議論して来たが，この辺りでちゃんとした理論をやってみたい．残念ながら安定性を議論するのは大変に難しいことなのだが，簡単にできる部分がある．ここではそれを紹介する．(皆さんがやってきた線型方程式が再登場する．)

時間の関係もあって，例で説明しよう．Duffing 方程式を考える．固定点は

$$y = 0, \qquad x + \alpha x^3 = 0 \tag{3.3.1}$$

の解である．

$\alpha > 0$ の場合，固定点は $(0,0)$ しかない．一方，$\alpha < 0$ なら固定点は $(0,0)$ の他に，$(\pm\sqrt{1/\alpha}, 0)$ の 2 点が加わる．面白いのは $\alpha < 0$ なので，以下では主に $\alpha < 0$ を考える．

式を簡単にするため，これから $\alpha = -1$ に固定するが，以下の議論は $\alpha < 0$ なら同じである．固定点は $(0,0)$, $(\pm 1, 0)$ の 3 点である．我々の考えたい問題は「固定点から少し離れて出発した軌道はどのように振る舞うか？」である．

まず，$(0,0)$ の場合を考えよう．$(0,0)$ の近くから出発するということは，$|x|, |y|$ が共に小さいということだ．なので，元々の ODE にて，x, y **の最低次のみ残して他は無視**してみよう．つまり，Duffing 方程式を

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \tag{3.3.2}$$

と近似してしまうのだ．これは既に何回も見た ODE で，(x, y) は単に円運動をする．つまり，原点近傍から出発すると，同じ半径のままで原点の近くにとどまり続ける．これは上の定義の意味で「安定」な固定点ということになる[3]．

次に，固定点 $(1,0)$ を考える．この固定点の近くでの解を調べたいので，解を

$$x(t) = 1 + u(t), \qquad y(t) = 0 + v(t) = v(t) \tag{3.3.3}$$

とおき，u, v が小さいと思って u, v の最低次を見る事にする．もとの ODE は u, v で書くと

$$\begin{cases} u' = x' = y = v \\ v' = y' = -x + x^3 = 2u + 3u^2 + y^3 \end{cases} \tag{3.3.4}$$

となっているので，u, v の一次だけ残すと

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = 2u \end{cases} \tag{3.3.5}$$

という線型斉次の方程式が得られた．このように**固定点からのズレの一次までを残して近似**することを**線型近似**という．

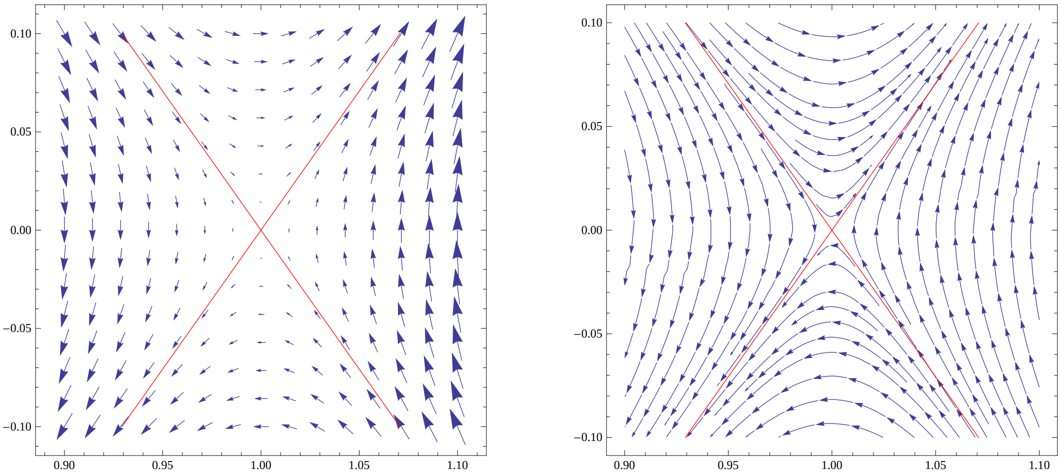
さてともかく，線型近似した方程式の一般解は

$$c_1\, e^{\sqrt{2}t} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} + c_2\, e^{-\sqrt{2}t} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{3.3.6}$$

[3]この議論はあくまで，x^3 の次数を無視した結果であることには注意．本来は αx^3 入りの系をちゃんと考えないといけないので，本来の系でも安定かどうかは自明ではない —— 特にこの場合，固定点が「中立安定」なので注意が必要である

であることは既に学んだ事からすぐにわかる．解は 2 つの基本解をもち，一つは時間とともに $e^{\sqrt{2}t}$ のようにドンドン増える．もう一つは $e^{-\sqrt{2}t}$ のように減って行く．つまり，係数 c_1 がゼロなら (u,v) は最終的にゼロに行く，つまり解 (x,y) は $(1,0)$ に収束する．一方，$c_1 \neq 0$ なら解はドンドンと大きくなって $\pm(1,\sqrt{2})$ の方向に飛んで行く．

以上は線型斉次の方程式で近似（線型近似）した場合の話だが，元々の方程式（近似前）でも，解が固定点 $(1,0)$ に近い場合は，定性的に同じようなふるまいが期待できる．この点を示すために，元々の方程式（近似前）の流れの様子を，固定点付近を拡大して書いたのが下図（左は方向場，右は流れ；赤線は傾き $\pm\sqrt{2}$ の直線）である．確かに，$(1,\pm\sqrt{2})$ の直線に沿って，拡大と縮小が行われていることがわかる．



時間の関係もあって，強引にまとめる．上の例で示したように，固定点付近での解のふるまいを調べるには，そこで**線型近似**を行い，線型化された方程式の解を調べれば良い．とは言っても，線型系の解は特定の方向に伸びたり縮んだりするだけだから，要するに**線型系の係数行列の固有値と固有ベクトル**がわかれば良いのである．

この場合，

- 固有値（の実部）が全て負ならば，固定点からのズレはドンドン小さくなるから，この固定点は漸近安定と期待できる．
- 固有値（の実部）が全て正ならば，固定点からのズレはドンドン大きくなるから，この固定点は非常に不安定（どの方向に少しずれても遠くに飛ばされてします）と期待できる．
- 固有値の実部が正のものと負のものが混じっている場合が一番面白い．この場合，「実部が正の固有値」に対応する固有ベクトルの方向にずれておれば，このズレはドンドン大きくなるはずで，遠くに飛ばされるだろう．この意味で，固定点は不安定である．ただし，「実部が負の固有値」に対応する固有ベクトルの方法にずれておれば，このズレは時間とともに小さくなり，最終的には解は固定点に吸い込まれる可能性がある．このいみで，この固定点は，大抵の初期条件に対しては不安定，でも少数の初期条件に対しては安定なようにふるまう．このような固定点を**双曲型**という．
- 実部がゼロの固有値がある場合は，なかなかややこしい（Duffing の原点がこの例）のだが，時間の関係もあって踏み込まない．

となっている．

線型解析は簡単にできる（係数行列の固有値等を求めるだけ）大変に一般的な方法なので，非常によく用いられる（まずは線型解析から始めよう，というノリ）．線型解析を超えた解析を行うのはかなり難しく，数学的には大変に面白いのだが，個々の問題に応じた工夫が必要になる事もおおく，この講義の程度を完全に超えているので割愛する．