線形代数・同演習 A 講義ノート（2011 年，理学部物理学科 1 年用，担当：原隆）

（このノートは 2011 年 4 月現在の暫定版です．講義が進むに連れて，すこしずつ書き換えられるでしょう.）

1　平面と空間のベクトル

（この節の大半は高校の復習ですから，ここには主に項目のみ書きます．項目の 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 は後でもっと詳しくやるのでごく簡単に.）

1.1　複素数（教科書 1.4 節）

複素数の定義と性質を復習．高校での扱いが薄くなったようなので少し丁寧に行います.

- 複素数の定義：2 つの実数 a, b と虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を用いて $a + ib$ と書ける数を**複素数**という.
- $z = a + ib$（a, b は実数）に対して，$\bar{z} = a - ib$ を z の**複素共軛**（complex conjugate of z）という.
- 複素数の加減乗除は高校で皆さんが習ったとおり.
- 複素数 $a + ib$ に対して 2 次元平面の点 (a, b) が一対一に対応する．複素数を 2 次元平面の点 (a, b) として表す場合，この 2 次元平面を**複素平面**という．この平面の横軸を**実軸**，縦軸を**虚軸**という.
- $z = a + ib$ の**絶対値**を $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ と定義する．この量の意味は，複素平面上での $a + ib$ と原点との距離である.
- 三角関数の合成の公式を用いると，$z = a + ib$ を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と表せる（ここで，$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, θ は $\sin\theta = b/r$, $\cos\theta = a/r$ となる角）．これを複素数 z の極表示（極形式）といい，θ を z の**偏角**という.
- （おまけ）Euler の式： $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ （微積でテイラー展開をやれば，大体，わかる）．これを使うと，上の z は $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ と書ける.

1.2　ベクトル（教科書 1.1，1.2 節）

平面，空間内のベクトルを復習．加法と減法，実数倍（スカラー倍）.

1.3　回転と一次変換（教科書 1.3 節）

「一次変換」の例として回転を少し — ただし，ここは後で「線型写像」をやるときに戻ってくる.

1.4　内積（教科書 1.6 節）

内積の定義，その意味，成分表示

1.5　外積（教科書 1.7 節）

外積の定義，その意味，成分表示

1.6　直線の方程式

後々使うので，非常に大事．教科書にはないけど高校でやったよね.

1.7　平面の方程式（教科書 1.8 節）

後々使うので，非常に大事．高校ではやってないようだから，ていねいにやります．
一般の平面の方程式が

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \tag{1.7.1}$$

と書けること，および係数 a,b,c と x_0,y_0,z_0 の意味がわかることが肝要．

教科書への補足：直線と平面のパラメーター（媒介変数）表示
高校では点 $\boldsymbol{x}_0$ を通って，ベクトル $\boldsymbol{a}$ に平行な直線の方程式を

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{a} \qquad (t \text{ は任意の実数}) \tag{1.7.2}$$

の形で表したと思う．これは成分で書くと，$\boldsymbol{a}=(a,b,c),\boldsymbol{x}=(x,y,z),\boldsymbol{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$ として，

$$x-x_0=ta, \qquad y-y_0=tb, \qquad z-z_0=tc \tag{1.7.3}$$

ということだから，(a,b,c がゼロでない場合は)

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=t \tag{1.7.4}$$

と書ける．t は任意なので最後の $=t$ はあってもなくても同じだ．つまり，この直線の方程式は

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \tag{1.7.5}$$

とも書ける．

さて一方，$\boldsymbol{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$ を通って $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$ に垂直な平面の方程式は

$$ax+by+cz=d \tag{1.7.6}$$

の形に書かれる．これは

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=0 \tag{1.7.7}$$

を展開したもので，直線の場合の (1.7.5) に相当する式だ．では (1.7.2) や (1.7.3) に相当する式（平面のパラメーター表示）はないのだろうか？

それを見つけるには，空間内の平面がどのような図形かを考えると良い．平面の向きは（もちろん）その法線ベクトルを与えても決まる．しかしそれ以外に,「平面内に入っている２本のベクトル」を与えても決まる．つまり，その平面と平行な２本のベクトル（ただし，この２本は互いに平行ではない）を $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ とすると，平面内の各点 $\boldsymbol{x}$ は適当なパラメーター s,t を用いて

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0=s\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{q} \tag{1.7.8}$$

と書ける．逆に，このように書ける点はすべてこの平面上にある．という訳で，平面のもう一つの表し方ができた：

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0=s\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{q} \qquad (s,t \text{ は任意の実数}) \tag{1.7.9}$$

ここで $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ は平面と平行な２つのベクトルである（ただし，$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ は平行でない）．この表式は精神としては直線の場合の (1.7.2) に相当する．また，この式はこれから学ぶ「部分空間をその基底で表現する」ことと密接に関係している．

さて，$\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ はどうして求めるかが気になるだろうが，この一般的表式で適当なものはない．そもそも，$\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ の取り方は無限とおりあるから（黒板で図で説明）奇麗な表式は作りにくい．ここは

- $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ は $\boldsymbol{n}$ とは直交していること
- $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ は平面内の２点を結ぶベクトルであること

を使って個々の問題で計算してみるのが良いだろう.（という訳で，レポート問題をやって下され.）

2　数ベクトル

いよいよ，線型代数の中身に入る．高校でもやったベクトル，補強したばかりの平面の表し方，などから入って行こう．特に断らない限り，n, m は正の整数とする．

2.1　数ベクトルとは

n 個の実数を縦に並べたものを n 項の列ベクトル（縦ベクトル）と言う（下の左半分）．また，横に並べたものを n 項の行ベクトル（横ベクトル）と言う（下の右半分）．両方まとめて「数ベクトル」と言う．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{または} \quad [x_1, x_2, \ldots, x_n] \tag{2.1.1}$$

n 項の数ベクトルの全体の集合を **n 項実ベクトル空間**と言い，$\mathbb{R}^n$ と書く．なぜ「空間」と呼ぶかは後で．

註：

- ベクトルと対比して，実数のことを**スカラー**と言うことがある．
- 教科書やではベクトルや行列を表すのに丸いカッコ (,) を使うが，四角いカッコ [,] を使う人も多い．僕も両方使うかもしれないが，違いは全くないとご理解頂きたい．
- 「n 項の」ベクトルという代わりに,「n 次元の」ベクトルと言うこともある．なぜ n 次元というかは，この n 項実ベクトル空間が「n 次元の」空間だからである．次元についてはすぐ後で学修する．
- この講義では**数ベクトルと言えば列ベクトル**のことを指すものとする．ただし，講義ノートのスペースを節約するために，列ベクトルで書くべきところを行ベクトルで書くこともある．
- ベクトルの成分として，複素数を考えることも勿論でき，その方が望ましい．(教科書 2.6 節では複素数も考えることになっている．) しかし，高校でのカリキュラムの変更で，複素数に苦手意識を持つ人も多いと聞く．そこで，この講義では，春学期の間は実数の成分を持つベクトルのみを扱うことにする．これに対応して「スカラー」は実数とする．

ベクトルは（高校までは $\vec{a}$ のように書いていたと思うが）太字のアルファベットで表す．つまり，

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} \tag{2.1.2}$$

など．$\vec{a}$ と書きたい人はそれでも良いが，大学で使う本には太字が多いだろうから，慣れて欲しい．

註： 黒板には太字を書くのは大変なので，二重線（blackboard font）で書くことが多い — R の場合は $\mathbb{R}$ となる．実例は黒板で見せる．本当はベクトルもこの二重線で書くべきなのだが，フォントがないのでご勘弁を．

数ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が**等しい**とは，(1) その成分の数が等しく，かつ，(2) 対応する成分がそれぞれ等しい，ことである．つまり，

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix} \tag{2.1.3}$$

は (1) $m = n$ であり，かつ (2) すべての $1 \le j \le n = m$ に対して $a_j = b_j$ であるときにのみ，**等しい**と言い，

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \tag{2.1.4}$$

と書く．

次に，ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} \tag{2.1.5}$$

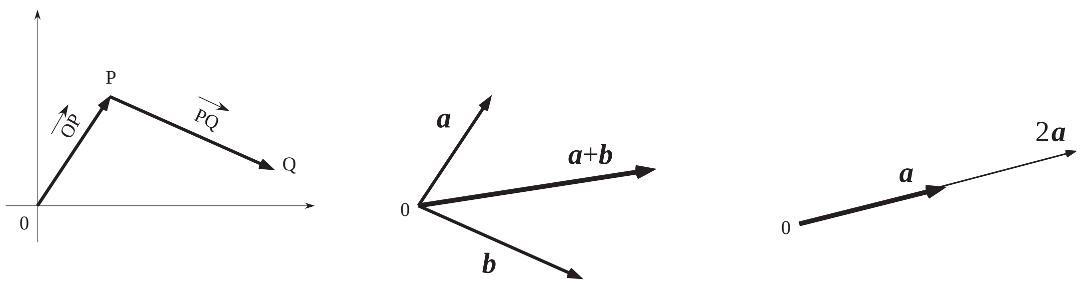
とスカラー（実数） k に対して，ベクトルの**和**，**差**，**スカラー倍**を以下のように定義する：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n+b_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n-b_n \end{pmatrix}, \qquad k\,\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} k\,a_1 \\ k\,a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ k\,a_n \end{pmatrix} \tag{2.1.6}$$

別に難しいことはない：単に**成分ごとに計算**するだけだ．(注：次元の異なるベクトル同士の和や差は定義しない．) 成分の数が２や３のベクトルは既に高校でやったはずで，その自然な拡張の定義になっている．なお，各成分がすべてゼロの n 項ベクトルを $\boldsymbol{n}$ **項ゼロベクトル**と言い，$\mathbf{0}$ と書く．また，$\boldsymbol{x}$ の (-1) 倍を $-\boldsymbol{x}$ と略記する．つまり，

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{と書くのだ．また} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{に対して} \quad -\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ -x_n \end{pmatrix} \tag{2.1.7}$$

上の左では明示してないが，0 はもちろん，全部で n 個あるつもりつもりだ．



(a)　(b)　(c)

成分ごとの足し算を行うことは,「ベクトルの合成」をやっていることになる（図 a, b 参照）．一方，スカラー倍は，ベクトルの長さを伸ばしたり縮めたりしていることに当たる（図 c 参照）．

以上の定義から，ベクトルの演算法則について，以下が成り立つことが容易にわかる．証明には，**成分毎に両辺を計算して一致**することを確かめれば良い．ただし，上の図のような直感的理解もしておくことをお奨めする．

定理 2.1.1 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ を任意の n 項列ベクトル，k, l を任意のスカラー（実数）とすると，以下が成り立つ：

- （加法の交換法則）　$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$
- （加法の結合法則）　$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$
- （$\boldsymbol{0}$ は加法の単位元）　$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$
- （$-\boldsymbol{x}$ は加法の逆元）　$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=(-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$
- （スカラー倍の分配則 I）　$k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=k\boldsymbol{x}+k\boldsymbol{y}$
- （スカラー倍の分配則 II）　$(h+k)\boldsymbol{x}=h\boldsymbol{x}+k\boldsymbol{x}$
- （スカラー倍の結合則）　$(hk)\boldsymbol{x}=h(k\boldsymbol{x})$
- （1 はスカラー倍の単位元）　$1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$

最後の項目での 1 は数の 1 であって，単位ベクトルではない．

（参考）一般の線型空間

以上は高校でやってきたことの簡単な拡張にすぎない．いったい，どこが大学の数学か，と思ってる人もいるだろう．そこで，大学の数学の一端をお見せする．実は「ベクトル空間」というのは，もっともっと一般に，以下のようなものと定義するのである．

定義 2.1.2 集合 V が $\mathbb{R}$ **上のベクトル空間**,（または $\mathbb{R}$ **上の線型空間**）である，とは，以下の全てが成り立つ場合をいう．

- （和が定義されていること）V の任意の 2 元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し，その $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の和 と呼ばれる V の元 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V$ が定義されている．

- （スカラー倍が定義されていること）V の任意の元 $\boldsymbol{x}$ とスカラー $k \in \mathbb{R}$ に対し，$\boldsymbol{x}$ のスカラー倍（k 倍）と呼ばれる V の元 $k\boldsymbol{x}$ が定義されている．

- 更に,「和」と「スカラー倍」は以下の 8 つの性質を満たす：
  - 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ （加法の交換則）
  - 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ に対して，$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ （加法の結合則）
  - V の特別な元 $\boldsymbol{0}$ が存在して，すべての $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ がなりたつ．
    （この $\boldsymbol{0}$ はすべての $\boldsymbol{x}$ に共通に決まる；加法のゼロ元の存在）
  - V の各元 $\boldsymbol{x}$ に対して，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{0}$ となるような $\boldsymbol{x}' \in V$ が存在する（この $\boldsymbol{x}'$ は $\boldsymbol{x}$ に依存して良い；加法の逆元の存在）．
  - 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と $k \in \mathbb{R}$ に対して，$k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=k\boldsymbol{x}+k\boldsymbol{y}$ （加法とスカラー倍の分配則 I）
  - 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ と $k, l \in \mathbb{R}$ に対して，$(k+l)\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{x}$ （加法とスカラー倍の分配則 II）
  - 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ と $k, l \in \mathbb{R}$ に対して，$(kl)\boldsymbol{x}=k(l\boldsymbol{x})$ （スカラー倍の結合則）
  - 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，$1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ （ここで左辺の 1 は数字の 1 である）．

上の定義のうち，最後の 8 つの規則は，定理 2.1.1 の計算の規則と同じである．つまり,「数ベクトルの空間」のもっている性質を抽出して，抽象的に拡張したものが一般の線型空間なのだ．これだけではわかりにくいだろうから，例を一つ，挙げておこう．

例 2.1.1 これまで考えて来た「n 項列ベクトルの空間」はもちろん，普通のベクトルの和とスカラー倍の定義によって，定義 2.1.2 の意味でもベクトル空間になっている．

例 2.1.2 n 次**以下**の x の多項式の全体を P_n と書こう．この多項式同士の「和」と「スカラー倍」を，中学・高校からやって来た通りに決める．つまり，

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \qquad と \qquad q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n \tag{2.1.8}$$

に対して，その和 $p+q$ を

$$(p+q)(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \ldots + (a_n+b_n)x^n \tag{2.1.9}$$

として，またその k 倍 kp を

$$(kp)(x) = (ka_0) + (ka_1)x + (ka_2)x^2 + \ldots + (ka_n)x^n \tag{2.1.10}$$

と定める．すると，P_n は定義 2.1.2 の意味で線型空間になる．

例 2.1.2′． 上の例と対比して，n **次の** x の多項式の全体を Q_n とすると，この Q_n は（上の例 2 の「和」や「スカラー倍」に関しては）線型空間になっていない．その理由を各自で納得すること．

> 実のところ，一般の線型空間を考えるメリットが大きい例としては，上の例 2 のような「多項式の空間」およびそれをもっと一般にした「関数の空間」がある．これらについては，おいおい触れていくことにする．

2.2　ベクトルの 1 次結合

キーワード：ベクトルの 1 次結合（教科書の 2.2 節前半）

> **定義 2.2.1** r 個のスカラー $k_1, k_2, \ldots, k_r$ と r 個の n 項列ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ に対して，
>
> $$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r \qquad \text{これを} \quad \sum_{j=1}^{r} k_j\boldsymbol{v}_j \quad \text{とも略記する} \tag{2.2.1}$$
>
> を列ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ の**一次結合**（**線型結合**, linear combination）と言う．

この幾何学的意味は黒板で説明する．

線型結合の例を考えるため，まずは $\mathbb{R}^n$ の 基本ベクトル を導入しよう．これは以下のベクトルのことである（$\boldsymbol{e}_j$ は j 番目の成分のみが 1，他の成分は 0)：

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \cdots, \qquad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.2.2}$$

ベクトルの和とスカラー倍の定義を思い出すと，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を基本ベクトルの線型結合として表せることがわかる．実際,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{に対して} \qquad \boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n \tag{2.2.3}$$

が成り立つからである．

これはあまりにアタリマエの例だったので，もう少し複雑な例を考えてみよう．例えば

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.4}$$

を考え，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で表してみたい．いくつかの場合がある．

（あ）$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$ のように，$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の 1 次結合で書け，書き方は一通りに決まる．

（い）また $\boldsymbol{x} = 4\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{c}$ とも書け，やはり書き方は一通りに決まる．

（う）$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で書くこともできるが，この場合は一通りに決まらない．例えば，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c} = \cdots$，と無限通り，ありそうだ.（最初の 2 例には 2 つのベクトルしか出ていないが，これはどこかの $k_j = 0$ と思えばよい.）

（え）しかし，どんなに k_1, k_2 を選んでも $\boldsymbol{y} = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b}$ とは書けない．さらに，$\boldsymbol{y} = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b} + k_3\boldsymbol{c}$ と書くのも不可能である．

上の場合については以下のように解釈したい．

- （あ，い）がもっとも幸せである：$\boldsymbol{x}$ を他のベクトルの 1 次結合で書け，かつ，その書き方は 一通りに決まる．一通りに決まるというのは無駄がない．
- （う）では 1 次結合で書けたのだが，右辺に出てくるベクトルの数が多すぎるために，何通りもの書き方ができてしまった．何通りもの書き方が同じものかどうかを判断する余分な手間を要するので無駄だ．
- （え）は非常に不幸で，右辺に出てくるベクトルが明らかに足りない．

線型代数の前半ではこのような事情を詳しく調べる．特に（あ，い）が実現される場合に名前を付け，どのような場合にこれが起こるのか，などを考えていく．その第一歩として上の（あ，い）と（う）を区別するため，次節の用語を導入する．

なお，教科書ではこの後に「部分空間」がでてくるが，これは後回しにする．

（参考）一般の線型空間では：

数ベクトルだけでは却ってわかりにくいかもしれないので，一般の線型空間での話もしておこう．V が $\mathbb{R}$ 上の線形空間の場合，その元 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ とスカラー $k_1, k_2, \ldots, k_r$ に対して，

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{x} + r \tag{2.2.5}$$

をベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ の線形結合という．

例 2.2.2. 先の例 2.1.2 にならって，V を 2 次以下の x の多項式の全体とし，$\boldsymbol{v}_0 = 1$, $\boldsymbol{v}_1 = x$, $\boldsymbol{v}_2 = x^2$ と定める．このとき，

$$a\boldsymbol{v}_0 + b\boldsymbol{v}_1 + c\boldsymbol{v}_2 = a + bx + cx^2 \tag{2.2.6}$$

は正に，2 次以下の多項式を x の昇べきの順に書いたことに他ならない．

2.3　1 次独立と 1 次従属

キーワード：ベクトルの 1 次独立と 1 次従属（教科書の 2.3 節）

定義 2.3.1 r 個の n 項列ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ がある．

- 少なくとも一つのベクトルが他のベクトルの 1 次結合として 書ける 場合，これらのベクトルは 1 次従属 であると言う．
- どのベクトルも他のベクトルの 1 次結合として 書けない 場合，これらのベクトルは 1 次独立 であると言う．

(2.2.4) のベクトルを使った例では，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が 1 次独立であることはすぐにわかる．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ も 1 次独立，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ も 1 次独立である．一方，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の 3 つは 1 次独立でない（why?）．つまり，これが（あ，い）と（う）の違いになっているようだ.（より詳しくは後で）．

註：（え）の場合は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が 1 次独立である，とは言えない（why?）．これが上の定義は（あ，い）と（う）の区別である，と言った意味．

さて，1 次独立には，以下のような同値な定義の仕方もある（教科書 p.36 の定義）．

定理 2.3.2 r 個の n 項列ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ が 1 次独立である必要十分条件は，以下の通りである．

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0 \tag{2.3.1}$$

証明　この定理は「一次独立であること」と「(2.3.1) の関係がなりたつこと」が同値である，と主張している．ここで，(2.3.1) そのものの主張は,「$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{0}$ を解いたら，$k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$ の解しかない」と言うことだ（$k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$ ならば $k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{0}$，の方はいつでも成り立つから面白くない）．同値関係を証明したいので，両方の方向を別々に示す．(図で説明しよう.)

(一次独立ならば (2.3.1) が成り立つ，の証明)

対偶をとるのが簡単であろう．つまり,「(2.3.1) が成り立たないならば一次従属」をしめすのだ．(2.3.1) が成り立たないということは，すべてはゼロではないスカラー $k_1, k_2, \ldots, k_r$ があって，$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{0}$ が成り立つ，と言うことだ．ゼロでない数を例えば k_1 とすると，両辺を k_1 で割ってから移項して

$$\boldsymbol{v}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{v}_2 - -\frac{k_3}{k_1}\boldsymbol{v}_3 - \ldots - \frac{k_r}{k_1}\boldsymbol{v}_r \tag{2.3.2}$$

と書ける．つまり，$\boldsymbol{v}_1$ が他のベクトルの一次結合で書けたので，一次従属と言えた．($k_1 = 0$ の時は，他に絶対ゼロでない k_j があるはずだから，それで割って同じ議論をすればよい.)

((2.3.1) ならば一次独立，の証明)

やはり対偶をとるのが簡単であろう．つまり,「一次従属ならば (2.3.1) が成り立たない」をしめすのだ．一次従属と言うことは，あるベクトルが他のベクトルの一次結合で書けると言うことだ．例えば，$\boldsymbol{v}_1 = k_2\boldsymbol{v}_2 + k_3\boldsymbol{v}_3 + \ldots + k_r\boldsymbol{v}_r$ と書けたとしよう．これは移項すると

$$(-1)\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + k_3\boldsymbol{v}_3 + \ldots + k_r\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{0} \tag{2.3.3}$$

と言うことであるから，(2.3.1) の条件が満たされていない．　□

ここでもう一度，一次独立，一次従属などの定義と，(2.2.4) のベクトルを使った例の（あ，い，う，え）の関係をふりかえってみよう．

ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ を考えると，これは一次独立か一次従属かのどちらかである．ここまでは定義の問題だからよいだろう．(実際の判定は，レポート問題でやってもらう.) 例の（あ，い，う，え）では，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \ldots$ に加えて $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ もあった．そしてこの例では以下の２つの問いを同時に聞いていた：

Q1: $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の一次結合で書けるか？

Q2: 一次結合で書ける（Q1 の答えが YES）ならば，書き方は一意か？

これらの問いに対する答えは

- 例（あ，い）ではどちらも YES
- 例（う）では Q1 は YES，Q2 は NO.
- 例（え）では Q1 も Q2 も NO.

となっていた，わけだ．

少し混乱しがちなのは，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の一次独立･従属を問題にしているのか，それとも $\boldsymbol{x}$ まで含めた $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の一次独立・従属を問題にしているのか，である．場合分けをして整理した方が良いだろう．

- Q1 の答えが YES の（$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の一次結合で書ける）場合：
  $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が一次独立か従属かで Q2 の答えが決まる．つまり，
  - $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が一次独立なら書き方は一意.
  - $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が一次従属なら書き方はいろいろある.

  このときは定義から，$\boldsymbol{x}$ も含めた $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は一次従属である.

- Q1 の答えが NO の（$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の一次結合で 書けない）場合：
  このときは $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が一次独立と言いたくなるが，そうとは 言い切れない．
  （理由）$\boldsymbol{x}$ を持ち出す前に $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が一次従属かもしれないから．

しつこいけども，「$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の一次独立・従属」と「$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の一次結合で書けるか書けないか」には直接の関係はない．一般に $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の一次結合で書けるか書けないかはレポート問題でやってもらうように計算して判断するしかない．

では，上の「Q1 の答えが YES の場合」について，更に説明しよう．上の Q1 の答えが YES の場合，はそれ自体だいじなことを主張しているので，命題としてまとめておく．

命題 2.3.3 ベクトル $\boldsymbol{x}$ が r 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の一次結合で書ける時，以下の２条件は同値である：

- $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の線型結合として書く書き方は一意に定まる．
- $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は一次独立である．

この命題は，$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の一次結合で 書ける 場合の話であって，$\boldsymbol{x}$ が本当に一次結合で書けるかどうかには答えてくれないことを再度強調しておく．

命題 2.3.3 の証明　同値関係を示すので両方向をやる．

($\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が一次独立なら書き方は一意，の証明)

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が一次独立だと仮定する．このときに，$\boldsymbol{x}$ が

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + k_r\boldsymbol{a}_r = l_1\boldsymbol{a}_1 + l_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + l_r\boldsymbol{a}_r \tag{2.3.4}$$

と二通りに書けたとして，$k_1 = l_1, k_2 = l_2, \ldots, k_r = l_r$ であることを示そう．上の中辺と右辺を辺々引き算すると，

$$(k_1 - l_1)\boldsymbol{a}_1 + (k_2 - l_2)\boldsymbol{a}_2 + \ldots + (k_r - l_r)\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0} \tag{2.3.5}$$

となる．ここで，定理 2.3.2 を思い出すと，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が独立の場合には上の係数 $k_1 - l_1, k_2 - l_2, \ldots, k_r - l_r$ はすべてゼロである．つまり，$k_1 = l_1, k_2 = l_2, \ldots, k_r = l_r$ が示された．□

(書き方が一意ならば $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は一次独立，の証明)

対偶をとって考えるのが楽だろう．つまり，「一次従属ならば書き方はいろいろある」を示すのだ．これも定理 2.3.2 を使えば簡単だ．この定理によると，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が一次従属ならば，

$$l_1\boldsymbol{a}_1 + l_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + l_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0} \tag{2.3.6}$$

となるような，すべてはゼロでないスカラー $l_1, l_2, \ldots, l_r$ が存在する．そこで，$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ で表す書き方を何でも良いから一つとってきて

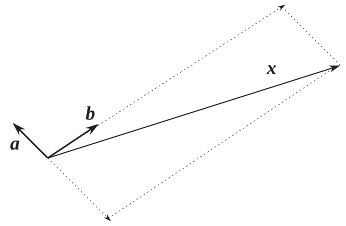
$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + k_r\boldsymbol{a}_r \tag{2.3.7}$$

としよう．この両辺に $\boldsymbol{0} = l_1\boldsymbol{a}_1 + l_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + l_r\boldsymbol{a}_r$ を足してやると，

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + k_r\boldsymbol{a}_r + l_1\boldsymbol{a}_1 + l_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + l_r\boldsymbol{a}_r = (k_1 + l_1)\boldsymbol{a}_1 + (k_2 + l_2)\boldsymbol{a}_2 + \ldots + (k_r + l_r)\boldsymbol{a}_r \tag{2.3.8}$$

となる．l_1 から l_r のなかにはゼロでないものがあるから，この右辺は (2.3.7) とは異なる係数で表されていることになる．つまり，$\boldsymbol{x}$ は二通り以上の表され方をした．□

（補足）r 個の n 項列ベクトルをもってくると，$r > n$ ならば，こいつらはいつでも一次従属である．これは，$n = 2, 3$ ならイメージが湧くので理解しやすい（一般の時の証明は連立方程式をやってからやる）．



例えば $n=2$ と言うことは平面上のベクトルを考えているわけだ．ここで３個の（ゼロでない）ベクトルを持ってくると，そのうちの２つを何倍かしてうまく合成し，３つ目のベクトルを作れる.（実は例外もあるが，その場合は２つのベクトルが平行.）

つまり，n 項列ベクトルの空間には最大 n 個の異なる「方向」しかないので，$n+1$ 個以上のベクトルを持ってくると，いくつかは余分になるのだ.（ここのところはすご〜〜くいい加減な書き方だから，わからない人は気にしない方がよい.）

（参考）一般の線型空間では：

一般の線形空間の場合の一次独立，一次従属も，数ベクトルの場合と全く同様にして定義する．つまり，上の定義の中の「数ベクトル」を一般の線形空間の元であるベクトルと読み替えれば良い．

例 2.3.4. V を２次以下の x の多項式の全体とし，例 2.2.2 と同じく，$\boldsymbol{v}_0=1, \boldsymbol{v}_1=x, \boldsymbol{v}_2=x^2, \boldsymbol{v}_3=x(x+1)$ と定める．このとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ や $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3$ などは一次独立である．しかし，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は一次従属である．

2.4 基底

（ここは教科書の 2.4 節 $+\alpha$ の内容である.）

さて，先の例の（あ，い，う，え）では（あ，い）が一番幸せである，と書いた．その理由は $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ などの線型結合で 一意的に書けた からである．ここでは特定の $\boldsymbol{x}$ を問題にしたが，どんな $\boldsymbol{x}$ でも線型結合で書くことはできるだろうか？できるとすれば，どのようなベクトルを持ってくるべきだろうか？この問いに答えるために，以下の定義を行う：

定義 2.4.1 r 個の n 項列ベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は以下の２つの条件を満たすとき，$\mathbb{R}^n$ の 基底 と呼ばれる．

- すべての n 項列ベクトルが，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ の一次結合で書ける（このとき，「$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ が $\mathbb{R}^n$ を生成する」と言う）．
- $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は一次独立である．

（実は，$r=n$ であるが，$r=n$ であることの証明はもっと後になる）

教科書にはないが，この講義ではベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ からなる基底を $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r \rangle$ と書く．

Remarks.

1. 基底という場合，順序も区別する．例えば $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ と $\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle$ は集合としては同じだが，異なる基底とみなす．
2. 定義の２つの条件はどちらも大事である．一つ目の条件は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ が 十分にたくさん あって，他のベクトルをそれらの一次結合で書けることを要求している．２つ目の条件は逆に，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は それほど多くなく，他のベクトルを書き表す方法が一通りである，ことを要求している．
3. 上の「基底」の定義は，「一次結合で書ける」「一次独立」の２つがわかっていればわかるものであるが，基底が実感としてわかるにはある程度の慣れが必要だろう．**基底の感覚が身に付けば，線型代数の 1/3 はできたと言ってもよい**かな...
4. 上の箱の中に書いた「実は $r=n$ である」の証明はそれほど簡単ではない．後の章で連立方程式をやってから戻ってくることにしよう．

重要な基底の例として，標準基底 がある．これは基本ベクトル，つまり

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.4.1}$$

という，n 本のベクトルからなる組である．

（少し先取りした解説）後で「線型変換」をやると，標準基底以外の基底を考えたくなる（「線型変換」の「固有ベクトル」を基底のベクトルにとりたい；ここのところはわからなくて良い）．またすぐ後で，$\mathbb{R}^n$ 全体ではなく，その「一部分」（部分空間と言う）を考えることもする．そのような場合には標準基底以外の基底が必須となる．標準基底のみを考えていれば「基底」という概念のありがたみはなかなかわからないが，もっと広い状況を考えるとわかるようになる．

いくつか基底の例を挙げよう．成分が多くなると大変なので，まず $n=2$ のときを考える．

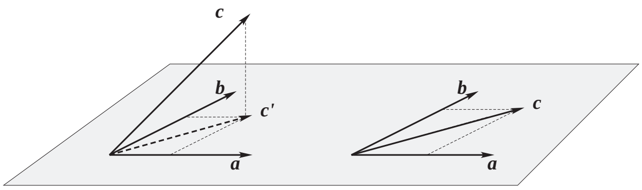
$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle, \tag{2.4.2}$$

はそれぞれ $\mathbb{R}^2$ の基底である（最初のは標準基底ね）．一方，

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle, \tag{2.4.3}$$

はすべて，基底ではない（基底の定義のどこに抵触しているのか，各自で納得するように）．

（基底のイメージ）3 項列ベクトルの空間 $\mathbb{R}^3$ の基底のイメージについて．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が基底であると言うのは，この 3 つが「別々の」方向を向いている，と言うことだ．下の図 (a) では $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が $\mathbb{R}^3$ の基底になるが，(b) では 3 つのベクトルが同一平面上にあるので，基底になれない．(図の見方：陰のついた平面内に $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が入っている．(b) では $\boldsymbol{c}$ までこの平面内にあるので，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次従属になってしまい，基底にはならない．(a) では $\boldsymbol{c}$ がこの平面から上にはみ出しているので，基底になる．この場合，$\boldsymbol{c}$ の先から平面におろした垂線の足を $\boldsymbol{c}'$ とした.)



(a)　　　　(b)

（参考）一般の線型空間では：

一般の線形空間の場合の基底も，数ベクトルの場合と全く同様にして定義する．つまり，上の定義の中の「数ベクトル」を一般の線形空間の元であるベクトルと読み替えれば良い．

例 2.4.2. V を 2 次以下の x の多項式の全体とし，例 2.3.4 と同じく，$\boldsymbol{v}_0 = 1, \boldsymbol{v}_1 = x, \boldsymbol{v}_2 = x^2, \boldsymbol{v}_3 = x(x+1)$ と定める．このとき，$\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ や $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3$ は V の基底になっている．しかし，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は基底ではない．また，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ も基底ではない．

2.5　部分空間

（ここは教科書の 2.2 節の残り＋ 2.4 節の残りの内容である.）

さて，教科書 p.35 に従って，ここで「部分空間」の概念を導入する．3 次元の空間ではイメージしにくいだろうが，3 次元空間の中での（原点を通る）平面や直線が部分空間の例だ．

定義 2.5.1 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 W が以下の 3 つを満たす時，W は $\mathbb{R}^n$ の 部分空間 であるという．

- $\mathbb{R}^n$ の零ベクトル $\mathbf{0}$ が W の要素である．
- W に属する任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して，その和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ も W の要素である．
- W に属する任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意のスカラー k に対して，スカラー倍 $k\boldsymbol{x}$ も W の要素である．

要するに，W の元同士の「和」や「スカラー倍」をやった場合，その結果も W に入ってる（W からはみ出さない）ものを部分空間というのだ.「和」や「スカラー倍」はベクトルをまっすぐに延ばしたり，2 つのベクトルの決める平面を作ったりする操作だから，これらの操作をやってもはみ出さないということは，W そのものが「まっすぐ」である，ということ．この感覚を，いろいろな例で身につけてほしい．

（注意）部分集合と部分空間は全く異なる概念（部分空間の方が要求する条件が多く，高級）である．混同しないように．

定義をよく見ると，$\mathbb{R}^n$ 自身も $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることがわかる（各自，確実に確かめて納得すること）．
部分空間の例の理解にはレポート問題も役に立つだろう．

部分空間の基底に関しては，以下の定義を行う：

定義 2.5.2 W を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする．W の要素であるベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ が以下の 2 つの条件を満たすとき，これは W の <u>基底</u> と呼ばれる．

- W のすべての n 項列ベクトルが，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ の一次結合で書ける（$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ が W を生成する）．
- $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は一次独立である．

$\mathbb{R}^n$ の基底の定義と比べると，$\mathbb{R}^n$ のところが W に変わっただけだ．もちろん，$W = \mathbb{R}^n$ の場合，上の定義は定義 2.4.1 に一致する．

（参考）一般の線型空間では：

一般の線形空間に対しても，その部分空間や部分空間の基底を数ベクトルの場合と全く同様にして定義する．つまり，上の定義の中の $\mathbb{R}^n$ を一般の線型空間 V,「数ベクトル」を一般の線形空間の元であるベクトル，と読み替えれば良い．

例 2.5.3. またもや，2 次以下の多項式の全体が作る線型空間を V とする．$p(2) = 0$ となるような V の元全体を W と決めると，W は V の部分空間である — 各自，納得すること．また，W の基底としては $\langle x-2, (x-2)^2 \rangle$ をとることができる．

2.6 次元

さて，線型空間に関する重要な概念「次元」を導入しよう．そのために，まず，以下の定理を証明無しで引用する（この定理の証明は後で行う予定）：

定理 2.6.1 W を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする．W の基底はいろいろあり得るが，そのどれをとっても，**基底を構成するベクトルの数は一定**である．つまり，$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r \rangle$ が W の基底である場合，ベクトルの数 r は W のみで決まり，全ての W の基底に共通である．

これに基づき,「次元」を定義する：

定義 2.6.2 W を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする．W の基底を構成するベクトルの数（上の定理でこれは一定であることを示してある）を W の**次元**といい，$\dim(W)$ または $\dim W$ で表す．なお，零ベクトルのみからなる空間の次元は $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$ と定義する．

次元というのは，その（部分）空間の持っている自由度である．つまり，考えている（部分）空間を表すのに，m 本の一次独立が必要充分な場合，この空間の次元は m というのである．これはこの空間をベクトルを

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m \tag{2.6.1}$$

と一意に表せることを意味する．この場合，$\boldsymbol{x}$ は（$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ を固定して）スカラー倍の $c_1, c_2, \ldots, c_m$ の取り方だけある．$m = 1, 2, 3$ の場合を想像してみると，m が増えるほど，この空間のベクトルはたくさん（いろいろ）

あることがわかるだろう．また，$\mathbb{R}^n$ の基底として標準基底を標準基底をとれば，ここで学んでいる「次元」の概念が，我々が日常使っている次元（「この空間は 3 次元空間」）と同じものであることが理解できるはずだ．

（参考）一般の線型空間では：

一般の線形空間に対しても，その基底に関して，定理 2.6.1 に対応する定理がなりたつ．つまり，$\mathbb{R}^n$ を一般の線型空間 V にした定理がなりたつ．また，一般の線型空間，その部分空間に対して，定義 2.6.2 と同様にしてその次元を定義する．

例 2.6.3. またもや，2 次以下の多項式の全体が作る線型空間を V とする．V の次元は 3 である．また，例 2.5.3 で考えた部分空間 W の次元は 2 である．

2.7　一般の線型空間

この節の内容に相当することは今まで，小出しにしてきたが，ここで一応，まとめておく．

これまでのところでは，何のために線型空間などという大風呂敷を拡げているのか，わかりにくい面があったのではないか？この節で考える，「一般の線型空間」を理解すれば，そのような疑問は氷解し，線型代数の偉大さに気づくことができる．しかしながら，この節の内容は抽象度が高く，かなりの人には難しく感じられる可能性も高い．そのため，現時点ではこの節の内容がよくわからなくても，それほど悲観する必要はない．

さて，これまでは線型空間といえば「数ベクトル」の作る空間であり，「部分空間」もその数ベクトルの空間の部分空間のみを考えていた．ここでこれらを非常に一般のものに拡張したい．以下の定義を行う．以下では $\mathbb{K}$ を実数の全体，または複素数の全体とする．(複素数が嫌な人は，$\mathbb{K}$ を実数の全体と思ってれば良い．)

定義 2.7.1 集合 V が $\mathbb{K}$ **上のベクトル空間**，(または $\mathbb{K}$ **上の線型空間**）である，とは，以下の全てが成り立つ場合をいう．

- （和が定義されていること）V の任意の 2 元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し，その $\underline{\boldsymbol{x} \text{ と } \boldsymbol{y} \text{ の和}}$ と呼ばれる V の元 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V$ が定義されている．
- （スカラー倍が定義されていること）V の任意の元 $\boldsymbol{x}$ とスカラー $k \in \mathbb{K}$ に対し，$\underline{\boldsymbol{x} \text{ のスカラー倍（} k \text{ 倍）}}$ と呼ばれる V の元 $k\boldsymbol{x}$ が定義されている．
- 更に，「和」と「スカラー倍」は以下の 8 つの性質を満たす：
  - 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ （加法の交換則）
  - 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ に対して，$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ （加法の結合則）
  - V の特別な元 $\boldsymbol{0}$ が存在して，すべての $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ がなりたつ．
    （この $\boldsymbol{0}$ はすべての $\boldsymbol{x}$ に共通に決まる；加法のゼロ元の存在）
  - V の各元 $\boldsymbol{x}$ に対して，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}$ となるような $\boldsymbol{x}' \in V$ が存在する（この $\boldsymbol{x}'$ は $\boldsymbol{x}$ に依存して良い；加法の逆元の存在）．
  - 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と $k \in \mathbb{K}$ に対して，$k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = k\boldsymbol{x}+k\boldsymbol{y}$ （加法とスカラー倍の分配則 I）
  - 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ と $k, l \in \mathbb{K}$ に対して，$(k+l)\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{x}$ （加法とスカラー倍の分配則 II）
  - 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ と $k, l \in \mathbb{K}$ に対して，$(kl)\boldsymbol{x} = k(l\boldsymbol{x})$ （加法とスカラー倍の結合則）
  - 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，$1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ （ここで左辺の 1 は数字の 1 である）．

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合，V を**実ベクトル空間**（または**実線型空間**）という．
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合，V を**複素ベクトル空間**（または**複素線型空間**）という．

抽象的な定義に見えて，何がやりたいのかわからない，という人が多いと思う．それは無理のないことなので，少し，例を考えてみよう．

例 1.　これまで考えて来た「n 項列ベクトルの空間」はもちろん，普通のベクトルの和とスカラー倍の定義によって，上の意味でもベクトル空間になっている．

例 2.　n 次以下の x の多項式の全体を P_n と書こう．この多項式同士の「和」と「スカラー倍」を，中学・高校からやって来た通りに決める．つまり，

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad \text{と} \qquad q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n \tag{2.7.1}$$

に対して，その和 $p+q$ を

$$(p+q)(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \ldots + (a_n+b_n)x^n \tag{2.7.2}$$

として，またその k 倍 kp を

$$(kp)(x) = (ka_0) + (ka_1)x + (ka_2)x^2 + \ldots + (ka_n)x^n \tag{2.7.3}$$

と定める．すると，P_n は線型空間になる．

この P_n の基底の例としては $\langle 1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n \rangle$ というのが一番自然だろう（各自，これが基底になっていることを確かめよ）．これが基底であることが確かめられれば，この空間の次元は $n+1$ とわかる．

しかし，他の基底の取り方もある．例えば，

$$\Big\langle 1,\ (x-1),\ (x-1)^2,\ (x-1)^3, \ldots,\ (x-1)^n \Big\rangle \tag{2.7.4}$$

というのも立派な基底になっている（各自，確かめること）．多項式 $p(x)$ を上の基底の線型結合で表すと，これは要するに $p(x)$ を $(x-1)^k$ の項の和として書いたことになる．

例 2′. 上の例と対比して，n 次の x の多項式の全体を Q_n とすると，この Q_n は（上の例 2 の「和」や「スカラー倍」に関しては）線型空間になっていない．その理由を各自で納得すること．

実のところ，一般の線型空間を考えるメリットが大きい例としては，上の例 2 のような「多項式の空間」およびそれをもっと一般にした「関数の空間」がある．これらについては，また線型写像をやった辺りで触れることにする．

以下，これまでに出て来た定理，定義を一般線型空間に対して書き下しておく．まず，線形結合の定義から．

> **定義 2.7.2** V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする．r 個のスカラー $k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbb{K}$ と r 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r \in V$ に対して，
>
> $$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r \qquad \left(\text{これを} \quad \sum_{j=1}^{r} k_j \boldsymbol{v}_j \quad \text{とも略記する}\right) \tag{2.7.5}$$
>
> をベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ の**一次結合**（**線型結合**, linear combination）と言う．

例 2.2.2. 再び： 先の例 2.1.2 にならって，V を 2 次以下の x の多項式の全体とし，$\boldsymbol{v}_0 = 1$, $\boldsymbol{v}_1 = x$, $\boldsymbol{v}_2 = x^2$ と定める．このとき，

$$a\boldsymbol{v}_0 + b\boldsymbol{v}_1 + c\boldsymbol{v}_2 = a + bx + cx^2 \tag{2.7.6}$$

は正に，2 次以下の多項式を x の昇べきの順に書いたことに他ならない．

次に，一次独立，一次従属．

> **定義 2.7.3** V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする．r 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r \in V$ がある．
>
> - 少なくとも一つのベクトルが他のベクトルの 1 次結合として <u>書ける</u> 場合，これらのベクトルは <u>1 次従属</u> であると言う．
> - どのベクトルも他のベクトルの 1 次結合として <u>書けない</u> 場合，これらのベクトルは <u>1 次独立</u> であると言う．

1 次独立には，以下のような同値な定義の仕方もある（教科書 p.36 の定義）．

定理 2.7.4 r 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r \in V$ が 1 次独立である必要十分条件は，以下の通りである．

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0 \tag{2.7.7}$$

命題 2.7.5 ベクトル $\boldsymbol{x}$ が r 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の一次結合で書ける時，以下の 2 条件は同値である：

- $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の線型結合として書く書き方は一意に定まる．
- $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は一次独立である．

例 2.3.4. 再び： V を 2 次以下の x の多項式の全体とし，例 2.2.2 と同じく，$\boldsymbol{v}_0 = 1, \boldsymbol{v}_1 = x, \boldsymbol{v}_2 = x^2, \boldsymbol{v}_3 = x(x+1)$ と定める．このとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ や $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3$ などは一次独立である．しかし，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は一次従属である．

次に，基底．

定義 2.7.6 V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする．r 個のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r \in V$ は以下の 2 つの条件を満たすとき，V の <u>基底</u> と呼ばれる．

- すべてのベクトルが，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ の一次結合で書ける（このとき，「$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ が V を生成する」と言う）．
- $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は一次独立である．

例 2.4.2. 再び： V を 2 次以下の x の多項式の全体とし，例 2.3.4 と同じく，$\boldsymbol{v}_0 = 1, \boldsymbol{v}_1 = x, \boldsymbol{v}_2 = x^2, \boldsymbol{v}_3 = x(x+1)$ と定める．このとき，$\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ や $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3$ は V の基底になっている．しかし，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は基底ではない．また，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ も基底ではない．

次に部分空間．

定義 2.7.7 V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とする．V の部分集合 W が以下の 3 つを満たす時，W は V の <u>部分空間</u> であるという．

- V の零ベクトル $\boldsymbol{0}$ が W の要素である．
- W に属する任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して，その和 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ も W の要素である．
- W に属する任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意のスカラー k に対して，スカラー倍 $k\boldsymbol{x}$ も W の要素である．

要するに，W の元同士の「和」や「スカラー倍」をやった場合，その結果も W に入ってる（W からはみ出さない）ものを部分空間というのだ.「和」や「スカラー倍」はベクトルをまっすぐに延ばしたり，2 つのベクトルの決める平面を作ったりする操作だから，これらの操作をやってもはみ出さないということは，W そのものが「まっすぐ」である，ということ．この感覚を，いろいろな例で身につけてほしい．

定義をよく見ると，V 自身も V の部分空間であることがわかる（各自，確実に確かめて納得すること）．

部分空間の基底に関しては，以下の定義を行う：

定義 2.7.8 V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とし，W を V の部分空間とする．W の要素であるベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ が以下の 2 つの条件を満たすとき，これは W の <u>基底</u> と呼ばれる．

- W のすべてのベクトルが，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ の一次結合で書ける（$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ が W を生成する）．
- $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は一次独立である．

例 2.5.3. 再び：またもや，2 次以下の多項式の全体が作る線型空間を V とする．$p(2) = 0$ となるような V の元全体を W と決めると，W は V の部分空間である — 各自，納得すること．また，W の基底としては $\langle x-2, (x-2)^2\rangle$ をとることができる．

最後に，次元について．今の段階では証明抜きで以下の定理を認めよう．

定理 2.7.9 V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とし，W を V の部分空間とする．W の基底はいろいろあり得るが，そのどれをとっても，**基底を構成するベクトルの数は一定**である．つまり，$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\rangle$ が W の基底である場合，ベクトルの数 r は W のみで決まり，全ての W の基底に共通である.（ただし，この r が無限大の可能性もある.）

これに基づき,「次元」を定義する：

定義 2.7.10 V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とし，W を V の部分空間とする．W の基底を構成するベクトルの数（上の定理でこれは一定であることを示してある）を W の**次元**といい，$\dim(W)$ または $\dim W$ で表す．なお，零ベクトルのみからなる空間の次元は $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$ と定義する．

例 2.6.3. 再び： またもや，2 次以下の多項式の全体が作る線型空間を V とする．V の次元は 3 である．また，例 2.5.3 で考えた部分空間 W の次元は 2 である．

2.8　（一般の線型空間における）ベクトルの成分表示

一般の線型空間とは定義 2.7.1 で定義されるものであった．これについては「基底」や「次元」が定義されることは既に見た．この小節では，一般の線型空間が普通の数ベクトルの空間とどのように関係しているのか（どこが似ているのか），を見ることにしよう．

V を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とし，$E = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\rangle$ をその基底の一つとする.（簡単のために V は有限次元 —— 今の場合 r 次元 —— とする.）V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ はもちろん，基底 $E = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\rangle$ を使って展開できる．つまり，適当な係数 $x_1, x_2, \ldots x_r \in \mathbb{K}$ を用いて，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ の線型結合として一意に表せる：

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + x_r\boldsymbol{x}_r \tag{2.8.1}$$

このとき，上の表し方を「$\boldsymbol{x}$ を基底 E で展開した」という．また，そのときの係数 $x_1, x_2, \ldots, x_r$ を「$\boldsymbol{x}$ を基底 E で展開した場合の展開係数」という．更に，この $x_1, x_2, \ldots, x_r$ を縦ベクトルの形に並べて書いたもの

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_r \end{bmatrix} =: [\boldsymbol{x}]_E \tag{2.8.2}$$

を,「$\boldsymbol{x}$ の，基底 $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\rangle$ に関する，数ベクトル表現」という．右辺では，このベクトルを表す記号を導入しておいた．添字の E は「基底 E について展開した結果」を特定するためにつけてある．

ここで重要なことは，上の係数 $x_1, x_2, \ldots, x_r$ ともとのベクトル $\boldsymbol{x}$ は，基底 $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\rangle$ を固定する限りは一対一の関係にあることだ．$\boldsymbol{x}$ から係数 $x_1, x_2, \ldots, x_r$ は一意に決まるし，逆に係数 $x_1, x_2, \ldots, x_r$ を与えると，元のベクトル $\boldsymbol{x}$ が一意に決まる.（もちろん，異なる基底を用いて展開すると，異なる係数がでる，為念）.

更に，ベクトルの和やスカラー倍は，その数ベクトル表現に対して，数ベクトルの和やスカラー倍を行えば，計算できる．つまり，通常のベクトルの演算は，抽象線型空間での演算の代わりに，その数ベクトル表現に対して数ベクトルの演算を行えば良いのだ.（実は後に「線型写像」というものを学ぶが，この線型写像も，抽象線型空間での作用を数ベクトル表現に対する作用として書くことができる.）

よって,「今，どの基底を使って展開しているのか」さえ押さえておけば，抽象的なベクトル $\boldsymbol{x}$ の代わりにその係数 $x_1, x_2, \ldots, x_r$（またはその数ベクトル表現 (2.8.2)）を使って議論することが可能になる．つまり，抽象的な線型

空間の話を，すべて数ベクトル空間の話におき直して議論することができる．これは非常な省力化，かつ統一的なものの見方を提供してくれる．(同じ数ベクトル空間の話に落とせる抽象線型空間どうしは，結局，ほとんど同じものである !!)

これが抽象的な線型空間と数ベクトル空間の重要な関係である．

少し例を挙げておこう．

例 2.8.1. これまでと同じく，2 次以下の x の多項式の全体に普通に和とスカラー倍を定義したものを V としよう．

V の基底の一例としては $E = \langle 1, x, x^2 \rangle$ があるわね．この場合，V の任意の元 $\boldsymbol{p}$（つまり，2 次以下の多項式）は

$$\boldsymbol{p} = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 \tag{2.8.3}$$

と展開できる．つまり，この基底 $E = \langle 1, x, x^2 \rangle$ に関する $\boldsymbol{p}$ の数ベクトル表現は

$$[\boldsymbol{p}]_E = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \tag{2.8.4}$$

ということになる．このように数ベクトルとして書くと，全く「多項式」という感じがしないかもしれないが，基底 $\langle 1, x, x^2 \rangle$ を使っていることを思い出せば，もとの多項式を (2.8.3) のようにして復元できる．

また，数ベクトル表現同士の「和」「スカラー倍」はもちろん，元の多項式の「和」や「スカラー倍」に対応している．実際，

$$\boldsymbol{p} = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 \qquad \text{と} \qquad \boldsymbol{q} = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 \tag{2.8.5}$$

に対しては

$$\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)x + (p_2 + q_2)x^2, \qquad k\boldsymbol{p} = (kp_0) + (kp_1)x + (kp_2)x^2 \tag{2.8.6}$$

であるが，これは数ベクトル表現では

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 + q_0 \\ p_1 + q_1 \\ p_2 + q_2 \end{bmatrix}, \qquad k \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kp_0 \\ kp_1 \\ kp_2 \end{bmatrix} \tag{2.8.7}$$

となる（x^n の係数同士を足したりかけたりするから，当然ではあるが）．

例 2.8.2. 上と同じく，2 次以下の x の多項式の全体を V とする．ただし，今回はその基底として $F = \langle 1, x-1, (x-1)^2 \rangle$ をとることにする．上の例 2.8.1 の $\boldsymbol{p}$ をこの基底で展開してみると，

$$\boldsymbol{p} = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 = (p_0 + p_1 + p_2) + (p_1 + 2p_2)(x-1) + p_2(x-1)^2 \tag{2.8.8}$$

と展開できる．よって，今度は

$$[\boldsymbol{p}]_F = \begin{bmatrix} p_0 + p_1 + p_2 \\ p_1 + 2p_2 \\ p_2 \end{bmatrix} \tag{2.8.9}$$

が基底 $F = \langle 1, x-1, (x-1)^2 \rangle$ に関する数ベクトル表現ということになる．(2.8.4) と比べると，確かに成分は違う数になっておるね．

3　行列

ここは簡単なので，項目名だけにします.「転置行列」以外は高校で少しやったことがあるのではないだろうか？（要確認）

3.1　行列の定義と加法，スカラー倍

教科書 3.1 節

3.2　行列の積

教科書 3.2 節

3.3　正則行列と逆行列

教科書 3.3 節．ここは概念の定義を主とし，今のところは実際の計算（逆行列の計算）は 2×2 までとする予定．今学期後半になって，連立方程式の解法を一杯やった後で戻ります．

3.4　転置行列

教科書 3.4 節．ほとんど定義だけのようなものですから，簡単に済ませる予定．

4　連立方程式と掃きだし法

中間試験で，連立方程式を解くのに苦労していた人が多かったので，急遽，順序を入れ替えました．まず一日半くらいかけて，連立方程式の効率よい解き方を教えます．教科書の 5.1, 5.2, 5.3 節の一部をやることになります．例年は教科書通りの順序でやっていたのですが，そうすると，効率の良い解き方をいつまで経っても覚えてくれない人が多い気がするので，思い切って順序を変えました．
教科書と順序を変えると評判が悪くなるのはわかっていますが，ここは変えるべきと判断します．

n 個の未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ についての方程式が m 個あって，それぞれの方程式が未知数について一次式以下であるとき，これを m 連立一次方程式系 と言う．このような系は今までにも散々，解いて来た．この解の性質を調べ，また効率の良い解き方を知るのがこの節の目的である．

4.1　行列と一次方程式系（記号の導入）

考えている方程式系は一般に係数 a_{ij} と b_i を使って

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & = & \cdot \\ \cdots & = & \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{4.1.1}$$

のように書ける．具体例としては，

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & z & = & 9 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 16 \end{array}\right. \tag{4.1.2}$$

を挙げておこう（この場合，$n = m = 3$ である．各自，a_{ij} と b_i が何にあたるか，確認すること）．

後の書き方を簡単にするために，少しだけ記号と定義を導入する．上の方程式系 (4.1.1) の左辺にて，出てくる順に係数をとりだすと，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & & \\ \cdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.1.3}$$

と $m \times n$ 行列 ができる（後のためにこいつを A と置いた）．ついでに，列ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix} \tag{4.1.4}$$

も導入しておこう．(n 項列ベクトルは，$n \times 1$ 行列，とも言えることは既に注意した.）ここで，行列とベクトルの積の定義を思い出すと，上の連立方程式 (4.1.1) は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{4.1.5}$$

と簡略化して書くことができる．

（斉次と非斉次 — 場合によってはここは跳ばす）

すぐ見るように，連立方程式系は $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ かどうかで，その性質がかなり異なる．そこで，**右辺の** b_j **がすべてゼロ**の方程式系を**斉次の**方程式系と言う．右辺に一つでもゼロでないものがある場合，これを**非斉次の**方程式系と言う．

さて，連立方程式系とベクトルの一次独立，一次従属の関係などについて，考えて行く．まず，(4.1.4) の $\boldsymbol{a}_j$ は行列 A の第 j 列をなすベクトルである．従って，元々の連立方程式系 (4.1.1) または (4.1.5) は

$$x_1\,\boldsymbol{a}_1 + x_2\,\boldsymbol{a}_2 + x_3\,\boldsymbol{a}_3 + \ldots + x_n\,\boldsymbol{a}_n = A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{4.1.6}$$

という方程式とも考えられる．ついでに比較のために上の右辺をゼロにした方程式を書いておく：

$$x_1\,\boldsymbol{a}_1 + x_2\,\boldsymbol{a}_2 + x_3\,\boldsymbol{a}_3 + \ldots + x_n\,\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0} \tag{4.1.7}$$

これで見て取れることは２つある．

(1) 斉次方程式 (4.1.7) はベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が**一次独立か否かを判定する**方程式そのものになっている（こいつがゼロ以外の解を持つなら一次従属，ゼロしかないなら一次独立）．つまり，斉次方程式の解が一意に（「すべてゼロ」に）決まるかどうかは，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が**一次独立か否か**にかかっている．

(2) 非斉次方程式 (4.1.6) は $\boldsymbol{b}$ がベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の**線型結合で書けるかどうか**を判定する式に他ならない．つまり，非斉次方程式の解があるか否かは，$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の**線型結合で書けるかどうか**で決まる．また，書ける場合，その書き方が一意かどうかは，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が一次独立か否かで決まる．

さて，どんな斉次の方程式系でも，少なくとも一つは解をもつ．つまり，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ はいつでも (4.1.7) の解である．この解（$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$）を (4.1.7) の <u>自明解</u>（trivial solution）という．もし，(4.1.7) が $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ なる解を持つならば，その解を <u>非自明解</u>（nontrivial solution）という．

さらに，(4.1.5) の形に書くとすぐわかるように，この斉次の方程式の解の全体は $\mathbb{R}^n$ の部分空間になっている（証明は各自でチェック）．この解の作る部分空間を $\mathrm{Ker}\ L_A$ と書こう．(なぜ $\mathrm{Ker}\ L_A$ のような変な書き方をするのか，は線型写像を習えばわかる．ここでは単に解の作る部分空間を記号 $\mathrm{Ker}\ L_A$ で表す，と思っておけば良い.)

この解が作る部分空間 $\mathrm{Ker}\ L_A$ が零次元（つまり，解は「すべてゼロ」のみ）なら，この斉次の方程式の解は「すべてゼロ」のみで一意に定まる．逆に，この部分空間 $\mathrm{Ker}\ L_A$ の次元が 1 以上であれば，斉次方程式 (4.1.7) の解は一意に決まらず，その次元が,「どのくらい多様な解があるか」の目安になる．そこで解の部分空間 $\mathrm{Ker}\ L_A$ の次元を (4.1.7) の <u>解の自由度</u> という．また，$\mathrm{Ker}\ L_A$ の基底を (4.1.7) の <u>基本解</u> という．

さて，斉次の方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解と，非斉次の方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の間には以下のような特別な関係がある：たまたま，$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ となるような $\boldsymbol{y}$ が見つかったとすると，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の任意の解 $\boldsymbol{x}$ を，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ と書くことができる．ここで $\boldsymbol{z}$ は適当な $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解.（教科書では定理 5.1.2 の (ii)）.

これは $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解く仕事が，部分的に $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解く仕事にすり替えられる，ことを主張している．つまり，何らかの偶然で（もしくは勘で）$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ となるような $\boldsymbol{y}$ を一つだけ見つけてやれば，それ以外の解は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解を足しあわせることで得られる，と言うわけだ．この性質は連立方程式系ではそれほどうれしいものではないが，将来，皆さんが微分方程式などを扱うようになると，かなり嬉しいものであることがわかるだろう．

（証明）$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ となるような $\boldsymbol{y}$ があったとして，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ なる任意の $\boldsymbol{x}$ を持ってきたときに，$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ が斉次の方程式を満たすことを言えばよい．でもこれは行列とベクトルのかけ算が分配法則を満たすことから，

$$A\boldsymbol{z} = A\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = A\,\boldsymbol{x} - A\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \tag{4.1.8}$$

となって，実際に $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ が斉次方程式の解であることがわかった．□

註： 上の性質はあくまで，**非斉次方程式系の解が一つ見つかったとき**，にのみ有効である．**非斉次方程式には解がない**ことも多々ある — 「このベクトルが他のベクトルの線型結合で書けるか？」の問題に解がないのは経験済みでしょ.

4.2　掃きだし法

教科書の 5.2 節の一部は後回しにして，教科書の 5.2 節（の一部）と 5.3 節をやる（5.2 節の内容は秋学期に簡単にまとめ直す）．この節では

- 「掃きだし法」を使って連立一次方程式が解けるようになること．
- 一次方程式系の解の様子には３つの可能性があることを理解すること．
  - 解が全く存在しない（不能）
  - 解が存在し，一意に定まる
  - 解が無数にたくさん存在する（不定）

ができればよい.（これができると期末試験や秋学期の試験も解きやすくなる.）

さて，今まで見てきたような連立方程式を効率よく解くことを考えよう．実のところ，連立方程式を解くのなら，人間よりパソコンの方がよほど速い．しかし,（１）計算機といえども（計算機だからこそ）アホなマチガイをすることがあり，解法を知っていてチェックすることが大事,（２）解き方の原理を知っておくことは，より発展した問題を将来解くときに役に立つ（３）解法を知ることで，宿題になっていた理論的な問題にも片がつく，のような理由から，ここで整理しておくことにする．

連立方程式を解くのは，原理的には簡単だ．一つの方程式を選んで，一つの未知数について解き，それを残りの方程式に放り込む（要するに，一つの**変数を消去**する）．すると，もとより未知数も方程式の数も一つずつ少ない方程式系が得られる．そこで，この新しい方程式系からまた一つの変数を消去する．以下，これをくり返して一つだけの方程式になればよい．

しかし，これを実際にやるのはなかなか大変だ（ウソだと思ったら，未知数が５個くらいある，５連立方程式でやってごらん）．そこで，もう少しマシな方法として考案されたのが「掃きだし法」である．ダラダラ書くより，例で説明する方が速い．以下の例（例０とする）を用いる：

$$\begin{cases} 2x + y - z = 9 \\ x + y - z = 2 \\ 2x + 4y - 3z = 16 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 16 \end{array}\right) \tag{4.2.1}$$

を解こう．要するに <u>同値な方程式の組に変形</u> していくのだ．教科書よりも少しだけ詳しく書くが，それぞれの段階で何をやったかは講義中に説明する．まずは下の式群の左半分を見よ．**（後で強調するように，以下はあくまで同値変形である.）**

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y - z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 16 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 16 \end{array}\right) \tag{4.2.2}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ \quad - y + z = 5 \\ 2x + 4y - 3z = 16 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -3 & 16 \end{array}\right) \tag{4.2.3}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ \quad - y + z = 5 \\ \quad + 2y - z = 12 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 12 \end{array}\right) \tag{4.2.4}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ \quad - y + z = 5 \\ \quad\quad + z = 22 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 22 \end{array}\right) \tag{4.2.5}$$

これで大体，できた．$z = 22$ が求まったので，こいつを真ん中の式に入れて y について解くと，$y = z - 5 = 17$．これらを一番上に入れて x について解くと，$x = -y + z + 2 = 7$．２段階に分けて書いとくと，以下のようになる．

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ \quad - y = -17 \\ \quad\quad + z = 22 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 22 \end{array}\right) \tag{4.2.6}$$

$$\begin{cases} x \quad\quad\quad = 7 \\ \quad y \quad\quad = 17 \\ \quad\quad z = 22 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 22 \end{array}\right) \tag{4.2.7}$$

上でやったことは，以下の３つの操作の繰り返しである：

(0) ２つの方程式の順序を入れ替える．

(a) １つの方程式に，別の方程式の定数倍を加える．

(b) １つの方程式に**ゼロでない数**をかける．

この３つの操作のそれぞれについて，操作の前と後では，方程式の解の集合は変わらない（不変である）．つまり，これらは**方程式系に対する同値変形**になっているわけで，掃きだし法とは，この３つの同値変形をくり返して，方程式をわかりやすい形に変形する方法の事である．

ここで「わかりやすい形」とは，(4.2.7) のように未知数について解ききった形，または (4.2.5) のように階段状になっていて，下の方から順に上に代入して解けるようになっている形，を言う．上の３つの変形を使うと，いつでも少なくとも (4.2.5) のような階段状に持っていけることがわかる（why?）．ただし，(4.2.7) の形にまで行けるかどうかはわからない．

(行列との関係)

上の変形をよく見ると，いちいち x, y, z と書かなくても，その係数だけ取り出して，同様の計算をやれば良い．この部分を上では右側に書いてある．この行列に対する操作は，以下の３つという事になる．

(0) ２つの行を入れ替える．

(a) １つの行に，別の行の定数倍を加える．

(b) １つの行に**ゼロでない数**をかける．

では，これから一次方程式系には３つの場合があることを例を使って学習しよう．上の例題 2.1 は典型例で，未知数も方程式の数も３個ずつ．この場合，上で解いた結果によると，解が <u>存在して一意</u> に定まった．

しかし，そうでない例もある．以下の例を見よう：

$$(1) \begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x - 2y + z = 6 \\ -x + y + 2z = 2 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 4 \end{cases} \tag{4.2.8}$$

この場合（解き方は各自やってみること），掃きだし法で解いた結果は

$$(1) \begin{cases} x - y = 2 \\ z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x - y = -2 \\ z = 4 \\ 0 = -6 \end{cases} \tag{4.2.9}$$

となる．

(1) の方は，3 つ目の方程式が $0 = 0$ で，実質，上の二つだけの連立方程式になってしまった．ここまでやって来たのは**同値変形**だったから，この二つの方程式を解けば良い訳だ．二つ目の方程式は $z = 2$ でよくわかるが，一つ目は $x - y = 2$ である．これはつまり，$x - y = 2$ を満たしてる x, y なら何でも良い，と言ってるわけだ．つまり，t を任意の実数として，$x = t + 2, y = t, z = 2$ が解なのである．この場合，**解は無数にある**わけだ．

一方，(2) の場合は一番下の式が矛盾している．x, y, z をどのようにとっても，この３つを満たすことはできない．つまり，もともとの (2) の**解は存在しない**のだ．

以上を多少強引にまとめると，連立一次方程式系の解については，以下の３つの可能性があることがわかる：

(a) 解が存在し，一意的に定まる（上の例 0 のように）

(b) 解が無数に存在する（上の例 (1) のように）— 連立方程式系は「**不定**」であるという．

(c) 解が全く存在しない（上の例 (2) のように）— 連立方程式系は「**不能**」であるという．

与えられた方程式系がこの３つのどれであるかは，一般には解いてみないとわからないが[1]，以下でもう少し考える．未知数の数を n，方程式の数を m とすると，$m=n$ なら (a)，$m>n$ なら (c)，$m<n$ なら (b) と言いたくなるが，これは一般には正しくないから注意のこと．(各自，反例を考えてみよう．)

（注意その 1）基本変形を行って連立方程式を解く場合には，(慣れないうちは）**一回に一つの基本変形**だけを行うこと．下手に２つの基本変形を同時に行うと，同値変形にならない場合がある．非常に簡単な例は以下の通り．連立方程式

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x - 2y = 6 \end{cases} \tag{4.2.10}$$

を考える．基本変形に頼るまでもなく，この解は $x=2, y=-2$ ではあるが，基本変形で解くと，

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x - 2y = 6 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 4 \\ 1 & -2 & | & 6 \end{pmatrix} \tag{4.2.11}$$

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ \quad - y = 2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 4 \\ 0 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \tag{4.2.12}$$

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ \quad y = -2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 4 \\ 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \tag{4.2.13}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ \quad y = -2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \tag{4.2.14}$$

となる．１つ目から２つ目に行くには，(第２行) − (第１行) を行った．

さてここで，１つ目から２つ目に行く際に，敢えて (第２行) − (第１行) と (第１行) − (第２行) を同時に行ってみると，

$$\begin{cases} \quad y = -2 \\ \quad - y = 2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & -2 \\ 0 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \tag{4.2.15}$$

となって，x に関する式が消えてしまった！真っ正直にこれを解くと，$y=-2$（でも x は任意）となってしまって，もちろん，この答えは正しくない．こうなってしまった理由は，独立でない (第２行) − (第１行) と (第１行) − (第２行) の両方を採用してしまった点にある．(もちろん，この段階で「方程式が足りなくなった」と思ってもとの方程式を見に行けば間違わないが，複雑な問題ではそんな余裕はないだろう．)

上の例はわかりやすさのために，簡単すぎるものを採用したが，もっと複雑な問題ではこれが決して自明ではないから，よくよく注意すること．

（注意その 2）ただし，上のような問題でも，「一つ目の基本変形の結果を用いて２つ目の基本変形を行い，その結果をまとめて書く」のは正しい．(これは単に２ステップでやった結果を一つにまとめて書いているだけだから．) 正しいけども，間違いやすいから，慣れるまではやらない方がよいと思う．

行列の階数の話に入る前に，今までの宿題の一つを片づけておこう．

($\mathbb{R}^m$ において，$m+1$ 本以上のベクトルが一次従属であることの初等的証明)

ベクトルが n 本あるとする（$n>m$）．これらが一次独立か従属かを判定するには，方程式

$$x_1\,\boldsymbol{a}_1 + x_2\,\boldsymbol{a}_2 + x_3\,\boldsymbol{a}_3 + \ldots + x_n\,\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0} \tag{4.2.16}$$

を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ について解き，解が「すべてゼロ」に限るかどうかを見れば良かった（定理 2.3.2）．我々は一次従属だと言いたいのだから，これがゼロでない解を持つ，と言いたい．

[1] ただし，斉次の方程式の場合はいつでも「すべてゼロ」の解があるから，(c) の可能性はない

そこで，この方程式を掃きだし法で解く．この節の基本操作を繰り返し，できるだけ簡単な形になるように頑張るのである．ここで「簡単な形」というのは，(4.2.5) のような階段状のものを指す．(黒板で説明するように，いつでもこの階段状の形には持っていける．）具体的には

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + a'_{14}x_4 + \cdots + a'_{1n}x_n &= 0 \\ x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 + \cdots + a'_{2n}x_n &= 0 \\ x_4 + \cdots + a'_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots &= \cdots \\ x_\ell + \cdots &= 0 \end{cases} \tag{4.2.17}$$

のような形になっている．(上では 3 行目が x_4 から始まっているが，そうとは限らない．だけど，このように階段状になるのは間違いない．）

さて，階段状になれば，どのような解があるかは明らかになる．つまり，下の方から順次解いていけばよい．このとき，一番下の式が 2 つ以上の x_i を含んでいればこれで証明終わりである．と言うのも，そのような式は必ず，「すべてがゼロ」とは限らない解を持ち，これを上のそれぞれの方程式に代入して解けば，ゼロでない解が得られるからである．

不幸にして一番下の式が

$$x_n = 0 \tag{4.2.18}$$

となっていれば，ここでは話がすまない．これを上のところにすべて代入し，x_n をなくした式を改めて解く．下から 2 番目の式が $x_{n-1} = 0$ でなければオシマイ．もし x_{n-1} ならもう一つ上を見る．こうやって上っていくが，方程式の数が未知数の数より多いから，絶対にどこかでゼロ以外の解が入ってくるはずである．(このところは後で，行列の「階数」と関連させてもう一度扱う．）　□

4.3　補足：連立方程式の解空間のイメージ

少し補足として，いままでにやってきた連立方程式の解の空間の幾何学的イメージについて，触れておく．

2 次元の場合

まずはわかりやすい 2 次元の例から行こう．

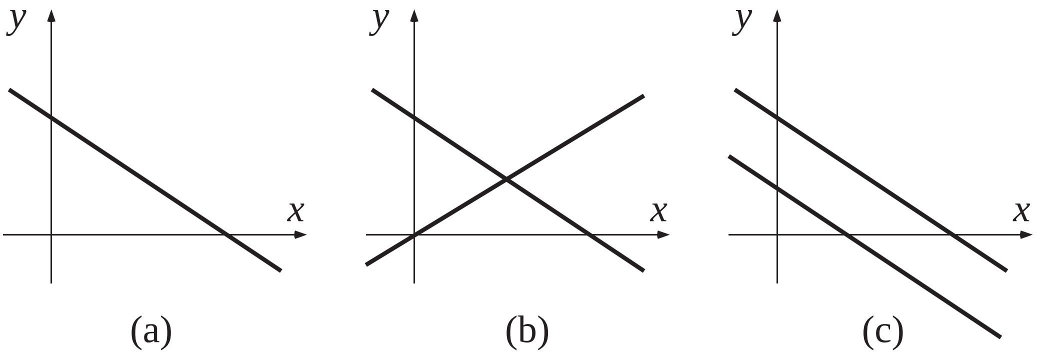
(1) 方程式 $ax + by = g$ （ただし $a^2 + b^2 \neq 0$）は xy-平面での直線を表すことは高校で十分にやっただろう（下図の (a)）．$g = 0$ の場合はこの直線は原点を通る．このとき，ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の全体 W は $\mathbb{R}^2$ の部分空間になっている（各自，確かめよ）．

(2) では次に，$d^2 + e^2 \neq 0$ として，連立方程式

$$\begin{cases} ax &+& by &=& g \\ dx &+& ey &=& h \end{cases} \tag{4.3.1}$$

を考える．2 つの方程式はそれぞれ，xy-平面上での直線を表すので，この連立方程式の解 (x, y) はこの両方の直線上の点全体，つまり，2 つの直線の 交わり を表す．平面上に 2 つの直線を引くと，大抵 は 1 点で交わる．つまり，この連立方程式の解は 大抵 は一つに決まるわけだ（下図の (b)）．

でも，解が一つに決まらない場合もある．それは 2 つの直線が平行 になってしまった場合だ．この場合，2 つの直線が重なれば 解は無数にある（重なった直線そのもの）．一方，2 つの直線が平行だけど重ならない ならば，交わりはないのだから，連立方程式の解もない（下図の (c)）．なお，$g = h = 0$ の斉次の方程式の場合は，2 つの直線は両方とも原点をとおるから，絶対に交点はある（つまり，原点）．これが「斉次の方程式は少なくとも一つ，全部ゼロの解を持つ」の幾何学的意味ね．



(a)　(b)　(c)

つまり，連立方程式の解の３つの場合分け（一意に決まる，不定，不能）には上のような幾何学的意味がつくわけである．なお，方程式の表す２つの直線が平行である条件は２つの方程式の左辺が比例することだ（各自，チェック！）．このとき，右辺まで含めて比例していると不定，そうでない場合は不能になる．ここのところは簡単な計算だから，掃きだし法の復習も兼ねて，各自で納得して欲しい．

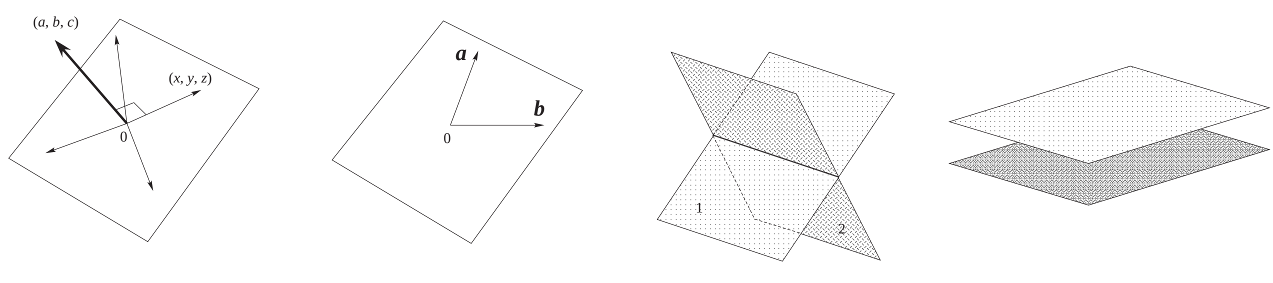
３次元の場合

同様の考察を３次元に対して行おう．以下では定数 a, b, c, d, e, f には $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ かつ $d^2 + e^2 + f^2 \neq 0$ の条件が付いているものとする．

(1) $\mathbb{R}^3$ は，要するに我々の住んでいる３次元空間だ．ここで方程式 $ax + by + cz = 0$ を満たすような点 (x, y, z) の全体は「原点を通って，ベクトル (a, b, c) に垂直な平面」を表す．なぜかというと，$ax + by + cz$ は (a, b, c) と (x, y, z) の内積であり，$ax + by + cz = 0$ はこの内積がゼロ，つまり，２つのベクトル (a, b, c) と (x, y, z) が直交していることを主張しているからだ（次図の (a) 参照．太いベクトルは (a, b, c)，細いベクトルは平面内にある (x, y, z) 達のつもりである）．また，この平面が原点を通ることは，$x = y = z = 0$ が解であることからわかる．この場合，この方程式の解 x, y, z からなるベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の全体 W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間になる（各自チェック）．このときの基底は，図 (b) のように，平面内にある２つの独立なベクトルになる．座標軸方向の標準基底のベクトルは，一般にはこのような平面内になく，従って基底のメンバーになり得ないことに注意しよう．

(1′) 次に，非斉次の方程式 $ax + by + cz = g$ を考える（$g \neq 0$）．これも平面を表すが，原点は通らない．これを見るには，x_0, y_0, z_0 を $ax_0 + by_0 + cz_0 = g$ を満たす定数として，この方程式が $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ と変形できることに注意すると良い．これはつまり，ベクトル (a, b, c) とベクトル $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ が直交することを意味しており，この方程式が「(x_0, y_0, z_0) を通って (a, b, c) に直交する平面」を表すことがわかる．

以上は，もともと３次元の空間であった $\mathbb{R}^3$ に一つの制限（条件）$ax + by + cz = g$ が加わったので，点 (x, y, z) の存在範囲が平面に制限された，と解釈できる．



(a)　(b)　(c)　(d)

(2) 次に，２つの方程式の連立を考えよう：

$$\begin{cases} ax + by + cz = g \\ dx + ey + fz = h \end{cases} \tag{4.3.2}$$

それぞれの方程式は何らかの平面を定めるので，連立方程式の解はこの２つの平面の交わりと言うことになる．２つの平面の交わりは <u>大抵は</u> 直線になるから，この解の空間は <u>大抵は</u> 一次元の直線になる（次図の (c)）．

ただし，これは２つの平面が同じ向きを向いていない場合である．もし平面が同じ向きを向いていたら（要するに，２つの方程式が互いに定数倍になっていたら），２通りの可能性が生じる．つまり，２つの平面が全く重なってしまう場合，２番目の方程式は新たな制限にはならないから，解は（一つ目の方程式で定まる）平面のママである．一方，２つの平面が同じ向きでありながら重なっていない場合，両者の交わりはない（次図の (d)）．つまり，この場合は解は存在しない（不能）のである．ここのところ，２次元平面内の直線の場合と対比させて良く納得すること．

(3) 更にもう一本の方程式があったらどうだろう？これも一つの平面を決めるから，解は一般に３つの平面の交わり（交点）になる．たいていの場合３つの平面の交わりは一点だけだから，解は一つに決まる（ここで図を描こうとしたのだが，うまく行かないのでやめた）．これが皆さんが普通に思っている「未知数３つで方程式の数も３つなら解は一意に決まる」の幾何学的意味だ．

しかし，(2) でも触れたが，方程式の具合によっては，そうはならない．初めの２本の方程式の交わりが直線であったとしても，３番目の平面が丁度，その直線を含んでしまう可能性もある．そうなれば，解は直線全体（つまり不定）と言うことになるのだ．また，３番目の平面と直線の交わりがない場合もあり，この場合は方程式は不能だ.（他にもいろいろな場合があるが，書ききれないのでここまで.）

４次元以上の場合

以上は２，３次元の話で，なんとなく想像することができた．残念ながら４次元以上ではこのような幾何学的イメージは難しい（そもそも４次元空間のイメージとは？）．けれどもともかく，それぞれの一次方程式が「超平面」（もとの空間より次元が一つ下がる）のようなものを表していて，その交わりが解になっている，と言うイメージは持っていると良いだろう．

5　線型写像

ある意味，この節の内容が線型代数の最大の山場だ．ここで重要かつ新しい概念のほとんどが出てくる．
（お約束）m, n は正の整数である．

5.1　写像とは？

線型写像に入る前に，一般の写像についてまとめておく．定義の羅列なので，さらっと行こう．

写像：集合 X のそれぞれの元 x に対して集合 Y の元 y を対応させる対応規則のことを，X から Y への 写像 と言う．通常，写像は f, g などの記号で表し，f が X から Y への写像であることを

$$f : X \longrightarrow Y, \tag{5.1.1}$$

また，f によって x が y に対応させられていることを

$$f : x \mapsto y \qquad \text{または} \qquad y = f(x) \tag{5.1.2}$$

と書く．上の x と y の関係は「f によって x が y に 写像される」「f による x の行き先が y」などと言う．

像，全射，単射：X の総ての元を f で写したとき，行き先は Y の全部になるとは限らない．そこで，

$$\{f(x) \,\big|\, x \in X\} = (X \text{ を } f \text{ で写した行き先の全体}) \tag{5.1.3}$$

を f の 像 と言う．また，上の集合を，$f(X)$ と書くことが多い（記号の乱用）．
$Y = f(X)$ の時，f は 全射 であるという．
また，$x \neq y$ ならば $f(x) \neq f(y)$ であるとき，f は 単射 であるという．
全射かつ単射の場合，全単射 という．

逆写像： $f : X \to Y$ が全単射の時，$y = f(x)$ の写し方を逆向きにして，$x = g(y)$ となるような写像 $g : Y \to X$ を定義できる．この g を f の逆写像と呼び，$g = f^{-1}$ と書く．

合成写像： 写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ に対して，写像 $h : X \to Z$ を，$h(x) = g(f(x))$ によって定義する．この h を f と g の 合成写像 と呼び，$h = g \circ f$ と書く（順序に注意：右にあるやつから先にやる）．

5.2　線型写像とは？線型性とは？

（注）以下で「ベクトル空間」という場合は列ベクトルの空間 $\mathbb{R}^n$ などを思い浮かべていれば，まずは十分である．本来，以下の定義は「一般のベクトル空間」についても有効であるが,「一般のベクトル空間」について困難を感じている人もいるだろう．そこで，良くわかっている人のみ,「V や W は一般のベクトル空間で良いのだな」と適宜補って読んでほしい．

定義 5.2.1 (写像が線型とは?) ベクトル空間 X から ベクトル空間 Y への写像 f が**線型**（**linear**）であるとは，任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ と任意のスカラー k に対して，

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}), \qquad f(k\boldsymbol{x}) = k\, f(\boldsymbol{x}) \tag{5.2.1}$$

が成り立つことである．

上の性質から直ちに，任意のベクトル $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(p)}$ とスカラー $k_1, k_2, \ldots, k_p$ について，

$$f(k_1\, \boldsymbol{x}^{(1)} + k_2\, \boldsymbol{x}^{(2)} + \cdots + k_p\, \boldsymbol{x}^{(p)}) = k_1\, f(\boldsymbol{x}^{(1)}) + k_2\, f(\boldsymbol{x}^{(2)}) + \cdots + k_p\, f(\boldsymbol{x}^{(p)}) \tag{5.2.2}$$

が成り立つことがわかる．(5.2.1) や (5.2.2) は「線型性」を特徴づける，非常に重要な関係である．

ベクトル空間からベクトル空間への線型な写像を**線型写像**と言う（そのまんま）．また，$X = Y$ の時に線型写像を**線型変換**とも言う．(注：$X = Y$ と言っても，これは写像のもとと行き先の**集合**が同じ，と言うだけで，もとと行き先が等しい，と言っているのではないよ．念のため)

例 1： $X = Y = \mathbb{R}$，$f(x) = 2x$ としたら，この一次関数は立派な線型写像（線型変換）である．

例 1′： $X = Y = \mathbb{R}$，$g(x) = 2x + 1$ は線型写像ではない！(why?)

例 2： $X = \mathbb{R}^2, Y = \mathbb{R}^3$ とし，f を $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$ とすると，これも線型写像．

例 3： 一般に，$X = \mathbb{R}^n$，$Y = \mathbb{R}^m$，A を $m \times n$ 行列とし，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ （$A\boldsymbol{x}$ は行列 A と数ベクトル $\boldsymbol{x}$ の積）と定義すると，f は線型写像である．

問 1： 上のそれぞれの例は，全射か，単射か？

線型とは？を理解するための問題：これらの問題は，後で線型写像の表現行列を求めるときの伏線にもなっている．

問 2：

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が線型写像で，$f(3) = 1$ だと言う．このとき，$f(5)$ はいくらか？
- 上の f に対して，$f(x) = 10$ となる x を求めよ．

問 3：

- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が線型写像で，$g\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ かつ，$g\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ だと言う．このとき，$g\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ と $g\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ を求めよ．
- 上の g に対して，$g(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ となるようなベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ を求めよ．

問 4：

- $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ が線型写像で，$h\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$，$h\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ かつ，$h\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ だと言う．このとき，$h\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ と $h\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ を求めよ．
- 上の h に対して，$h(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ となるようなベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ はあるか？

行列と線型写像

行列と線型写像について，少し述べておく．この一般論は「線型写像の表現行列」として後でやる．けども，最低限のことをここでやっておこうと思う（教科書は p.83 付近）．

うえの問題であるように，A を $m \times n$ 行列として，$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を

$$f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \qquad \text{（右辺は行列とベクトルの積）} \tag{5.2.3}$$

として定義したものは線型写像になる（各自，線型写像の条件を確かめよ）．逆に，$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線型写像は上のように行列とベクトルの掛け算で書けるのだ．

定理 5.2.2 (線型写像と行列) ベクトル空間 $X = \mathbb{R}^n$ から ベクトル空間 $Y = \mathbb{R}^m$ への線型写像 f が与えられると，うまく行列 A を持って来て，

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \qquad \text{（すべての } \boldsymbol{x} \in X \text{ に対して）} \tag{5.2.4}$$

がなりたつようにできる．

定理中の A はもちろん，f に依存して決まる．

Proof. 具体的に A を作ってやりましょう．まず，n 個の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ に対する f の作用（行き先）を定めれば，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対する f の作用（行き先）も定まることに注意しよう．なぜなら，$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$ とすると，線型性から

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) + \ldots + x_n f(\boldsymbol{e}_n) \tag{5.2.5}$$

となるからである．

次に，少々天下りではあるが，$f(\boldsymbol{e}_j)$（$j = 1, 2, 3, \ldots, n$）の作る m-項縦ベクトルを左から並べた行列を A とする．

$$A = \Big(f(\boldsymbol{e}_1),\ f(\boldsymbol{e}_2),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{e}_n) \Big) \tag{5.2.6}$$

以下，この A が求めるものであることを示そう．

そのために，実際に行列とベクトルの掛け算をやってみると

$$A\boldsymbol{x} = \Big(f(\boldsymbol{e}_1),\ f(\boldsymbol{e}_2),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{e}_n) \Big) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e}_n) \tag{5.2.7}$$

となるが（ここがややこしい人は各自で確かめること），この右辺は (5.2.5) から，$f(\boldsymbol{x})$ に他ならない．

5.2.1 線型写像の表現行列の一般論（おまけ）

注意：この小節の内容は教科書にはない．しかし，重要な話題なので，少しでもやった方が良いと考えてこのプリントを作った．

前節までで線型写像について学び，特に標準基底を用いて線型写像を行列で表すことをやった．ここでは，標準基底以外の一般の基底について，また一般の線型空間での線型写像の表現行列を考える．今までにも,「線型空間の基底の取り方はいっぱいある」ことを強調してきた．そこで，標準基底でなく他の基底を使った場合の表現行列を考えるのは自然である．

まず少し記号の復習から始める．線型空間 X とその基底 $E = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ が与えられたとき，X の任意の元 $\boldsymbol{x}$ をこの基底で展開できることは既にやった（というか，展開できるのは基底の定義の一部)：

$$\boldsymbol{x} = \tilde{x}_1\boldsymbol{v}_1 + \tilde{x}_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \tilde{x}_n\boldsymbol{v}_n \tag{5.2.8}$$

このとき，右辺に出てくる係数 $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$ を縦に並べて作った n 項列ベクトルを $[\boldsymbol{x}]_E$ と書く．つまり

$$[\boldsymbol{x}]_E = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} \tag{5.2.9}$$

ということだ．添え字 E は，係数 x_i が基底の取り方による事を強調するために導入した．このときの成分 $\tilde{x}_j$（$j=1,2,\ldots,n$）を $\boldsymbol{x}$ の基底 E に関する成分（$\boldsymbol{x}$ を基底 E で展開したときの成分）というのだった．また，上の縦ベクトル $[\boldsymbol{x}]_E$ を，$\boldsymbol{x}$ の基底 E に関する数ベクトル表現，または，$\boldsymbol{x}$ の基底 E に関する成分表示，というのだった．

上の約束の下で，以下の定理が成り立つ：

定理 5.2.3 (一般の線型写像の表現行列) n 次元の線型空間 X と m 次元の線型空間 Y がある．それぞれの基底を $E=\langle \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n\rangle$, $E'=\langle \boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\ldots,\boldsymbol{w}_m\rangle$ とする．また，線型写像 $f:X\to Y$ が与えられている．このとき，$m\times n$ 行列 A で，

$$[f(\boldsymbol{x})]_{E'}=A\,[\boldsymbol{x}]_E \qquad \text{（すべての } \boldsymbol{x}\in X \text{ に対して）} \tag{5.2.10}$$

と書けるものがただ一つ存在する．ここで $A\,[\boldsymbol{x}]_E$ は行列 A と数ベクトル $[\boldsymbol{x}]_E$ の普通の積を表す．A の形は

$$A=\Big[[f(\boldsymbol{v}_1)]_{E'},[f(\boldsymbol{v}_2)]_{E'},\ldots,[f(\boldsymbol{v}_n)]_{E'}\Big] \tag{5.2.11}$$

で与えられる（上の行列は m 項列ベクトル $[f(\boldsymbol{v}_i)]$ を並べたもの）．

実のところ，上の行列 A は基底 E,E' を定めて初めて決まるものだから，$A_{E',E}$ などと添字をつけて書いた方が良い．しかし，これではあまりに式が煩雑になるから，ここでは書いていない．

証明：

証明は定理 5.2.2 と同じように進む．まず，A の形を定めよう（必要条件）．

すべての $\boldsymbol{x}$ に対して $[f(\boldsymbol{x})]_{E'}=A[\boldsymbol{x}]_E$ であるべきだから，特に，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}_i$ （$i=1,2,\ldots,n$）に対しても成り立つべきだ．$[\boldsymbol{v}_i]_E$ は第 i 成分のみ 1，他は全部ゼロだから，$A[\boldsymbol{x}]_E$ は行列 A の第 i 列になっている．これが $[f(\boldsymbol{v}_i)]_{E'}$ に等しくなければならない．これで，A が (5.2.11) の形であるべし，とわかった．

つぎに，このようにとった A が実際に (5.2.10) を満たすことを示そう（十分条件）．任意の $\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{x}=\tilde{x}_1\boldsymbol{v}_1+\tilde{x}_2\boldsymbol{v}_2+\ldots+\tilde{x}_n\boldsymbol{v}_n \tag{5.2.12}$$

と展開すると，f の線型性から

$$f(\boldsymbol{x})=f(\tilde{x}_1\boldsymbol{v}_1+\tilde{x}_2\boldsymbol{v}_2+\ldots+x_n\boldsymbol{v}_n)=\tilde{x}_1f(\boldsymbol{v}_1)+\tilde{x}_2f(\boldsymbol{v}_2)+\ldots+\tilde{x}_nf(\boldsymbol{v}_n) \tag{5.2.13}$$

となる．ここで両辺を Y の基底 $E'=\langle \boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\ldots,\boldsymbol{w}_m\rangle$ で展開して m 項列ベクトルを作ると，

$$[f(\boldsymbol{x})]_{E'}=[\tilde{x}_1f(\boldsymbol{v}_1)+\tilde{x}_2f(\boldsymbol{v}_2)+\ldots+\tilde{x}_nf(\boldsymbol{v}_n)]_{E'}=\tilde{x}_1[f(\boldsymbol{v}_1)]_{E'}+\tilde{x}_2[f(\boldsymbol{v}_2)]_{E'}+\ldots+\tilde{x}_n[f(\boldsymbol{v}_n)]_{E'} \tag{5.2.14}$$

となる．ところが (5.2.11) の A の作り方を考えに入れると，この右辺は $A[\boldsymbol{x}]_E$ に他ならない（各自確かめよ）．□

（注意）上の定理における f の表現行列 A は，

$$f(\boldsymbol{v}_j)=\sum_{i=1}^{m}(A)_{ij}\boldsymbol{w}_i, \qquad (j=1,2,\ldots,n) \tag{5.2.15}$$

を満たす.（これは定理の表式 (5.2.11) からすぐに出るが，$(A)_{ij}$ を具体的に求めるには便利な式である．つまり，左辺を計算した後で，これを右辺にあるように線形結合で書けば，その係数が A_{ij} になっているわけだ.）

ともかくこのように，一般の線型空間における一般の線型写像も，基底を定めてしまうと，単なる行列とベクトルの積で書けてしまうことがわかった．これは大変に有用な性質である．つまり，**一般の線型空間での一般の線型写像を調べたいなら，（もとの線型空間がどんなものであれ）適当に基底を決めて「ベクトルと行列の積」，つまり数ベクトル空間での線型写像の問題をよく調べれば良い**のだ．これが線型代数の強みであり，皆さんが線型代数を必修とされている理由である．

ところで，線型写像の表現行列は，基底を決めて初めて確定する．では，異なる基底を用いた表現行列の間にはどんな関係があるのだろうか？この答えは「基底の変換の行列」を用いて与えられるのだが，概念はともかく，式の上ではややこしいので，ここではあまり深入りしないことにする．後半に「行列の対角化」をするところでまた出てくるだろう．

5.3 核空間と像空間

この節では線型写像を特徴づける２つの空間を導入する．

与えられた線型写像 $f : X \to Y$ を特徴づける，一番特徴的なものは何だろうか？なんと言っても，f によって X がどこに移るか，ではないだろうか？もちろん，X の行き先は Y の中にあるが，Y 全体とは限らない．この点を明確にするために以下の定義を行う．

定義 5.3.1 (核空間と像空間) ベクトル空間 X から ベクトル空間 Y への線型写像 f に対して，

$$\mathrm{Im} f \equiv \{f(\boldsymbol{x}) \,\big|\, x \in X\} \qquad f \text{ の像空間} \tag{5.3.1}$$

$$\mathrm{Ker} f \equiv \{\boldsymbol{x} \in X \,\big|\, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\} \qquad f \text{ の核空間} \tag{5.3.2}$$

を定義する.（「核空間」の意味はもうすぐ明らかになる.）

上で「空間」と言う言葉を使ったが，これらは実際に部分空間になっている．そこでまず，部分空間の定義の復習をしよう．

定義 5.3.2 (部分空間) ベクトル空間 X の部分集合 W は，以下の３つの条件を満たすとき，X の 部分空間 である，と言う：

(0) $\boldsymbol{0} \in W$　（この条件が下の２つから出ることは既に注意したが）

(1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ ならば $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$

(2) $\boldsymbol{x} \in W$ ならば，任意のスカラー k に対して $k\boldsymbol{x} \in W$

では，上の像空間，核空間が本当に部分空間かどうか，確かめよう．

（像空間について）

(0) 線型写像の定義から $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ である（なぜなら，$f(\boldsymbol{0}) = f(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}) = f(\boldsymbol{0}) + f(\boldsymbol{0})$）．つまり，$\boldsymbol{0} \in \mathrm{Im}\, f$.

(1) $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \mathrm{Im}\, f$ とする．これはつまり，$\boldsymbol{y}_1 = f(\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{y}_2 = f(\boldsymbol{x}_2)$ なる $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が存在するということ．そこで，線型性から，$\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 = f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)$ がなりたつ．ところが，$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in X$ であるから，これを f で送った先の $f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)$ は $\mathrm{Im}\, f$ の元である．つまり，$\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 \in \mathrm{Im}\, f$.

(2) 上と同じようにすすむ．$\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}\, f$ とすると，これは $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ なる $\boldsymbol{x} \in X$ があるということ．そこで，$k\,\boldsymbol{y} = k\,f(\boldsymbol{x}) = f(k\,\boldsymbol{x})$ である．しかし，$k\boldsymbol{x} \in X$ なので，$f(k\,\boldsymbol{x})$ は $\mathrm{Im}\, f$ の元である．よって，$k\,\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}\, f$.　□

（核空間について）

(0) 像空間のところで $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ を示した．つまり，$\boldsymbol{0} \in \mathrm{Ker} f$.

(1) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathrm{Ker}\, f$ とする．つまり，$f(\boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0}$ ということ．すると線型性から，$f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ がなりたつ．つまり，$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in \mathrm{Ker}\, f$.

(2) 上と同じようにすすむ．$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\, f$ とすると，これは $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ ということ．そこで，$f(k\,\boldsymbol{x}) = k\,f(\boldsymbol{x}) = k\,\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ より，$k\,\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\, f$.　□

これから，核空間，像空間を求める．求めるのだが，そのためには部分空間の効率的な表し方を知る必要がある．(今相手にしているのは一般に無限個の要素を含んだ集合であるから，その要素を総て書き下すことなどできない！従って，この無限個の空間を効率よく表す方法が必要だ.）その答えは「基底と次元」だ —— つまり，以前に次元と基底を勉強した理由は，正に，いまここで使いたいからなのだ．念のために，以下の定義を思い出しておこう．

定義 5.3.3 (ベクトルの張る空間) ベクトル空間 X のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ の一次結合 $k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + k_r\boldsymbol{v}_r$ の全体を $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ の張るベクトル空間 と言い，$S[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r]$ で表す．

数式で書けば，$S[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r] = \{k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + k_r\boldsymbol{v}_r \,\big|\, k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbb{R}\}$ である．

$S[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r]$ は X の部分空間になっている（各自確かめよう）．

この定義によると，部分空間を規定するのに，その部分空間を張るようなベクトルの組を用いよう，という発想が湧いてくる．湧いてくるのだが，それでは少し不十分だ．と言うのは，上の定義の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ のなかに,「余分な」ベクトルが入っているかもしれないからだ.（例えば，$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ となっていたら，この $\boldsymbol{v}_3$ はあってもなくても，張る部分空間に変わりはない.）そこで,「余分」なベクトルを排除する目的で，以下の定義に到達する（この辺りは既にやったが，重要なのでもう一回載せておく）.

定義 5.3.4 (部分空間の基底と次元) ベクトル空間 X の部分空間 W がある．W のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ が以下の２条件を満たすとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ を W の基底という．また，r を W の次元という.

(0) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r \in W$

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は一次独立

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は W を張る，つまり，$S[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r] = W$

このような定義を用いて，部分空間をその基底と次元で規定しよう，と考える.

少し例をやってみよう．線型写像 $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y-z \\ 2x+3y+8z \\ 3x-2y-z \end{pmatrix}$ の核空間と像空間を求める.

核空間から求める．$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が核空間に属すると言うことは，これの行き先がゼロベクトル，つまり，

$$\begin{pmatrix} x-y-z \\ 2x+3y+8z \\ 3x-2y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.3.3}$$

と言うこと．これを解くと，$x = -z, y = -2z$ （z は任意）．よって核空間は $\left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$ で，その次元は 1.

像空間を求めるには，まず，像空間がどのようなベクトルで張られうるのか，を考える（この段階では「余分」なベクトルがあってもよい；つまり基底にならないようなベクトルでもよい．後で余分なベクトルを排除して基底にする）．そのために，以下の性質を用いる.

補題 5.3.5 $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle$ をベクトル空間 X の基底とする．線型写像 $f : X \to Y$ の像空間は，ベクトル $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)$ で張られる.

（注意）ベクトルの組 $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)$ は一次独立かどうかはわからない．従って，これが像空間の基底になっているかどうかは，個々の例で確かめてみないとわからない.

（証明）$f(\boldsymbol{v}_j)$ のそれぞれが像空間の元であることは，定義から明らか．写像の線型性から，$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)$ で張られる空間が像空間の部分集合であることもすぐに出る（各自，確かめよ．何を証明する必要があるかな？）

問題は，これで取りこぼしがないのか，つまり，$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)$ の線型結合で書けないような像空間の元はないのか，ということである．しかし，これはないことが以下のようにしてわかる.

像空間の任意の元 $\boldsymbol{y}$ にたいしては，適当な $\boldsymbol{x} \in X$ があって，$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ と書けているはずである．この $\boldsymbol{x}$ は X の元であるから，その基底の線型結合として $\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + k_m\boldsymbol{v}_m$ と書けるはず．この両辺に f を施すと，$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = f(k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + k_m\boldsymbol{v}_m) = k_1 f(\boldsymbol{v}_1) + k_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \ldots + k_m f(\boldsymbol{v}_m)$ となる．つまり，像空間の任意の元 $\boldsymbol{y}$ は $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)$ の線型結合で書けた．ということで，取りこぼしがないことがわかる.　□

上の補題を用いて像空間を求めよう．X の基底としてはその標準基底を用いる．f の定義から，

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{5.3.4}$$

なので，像空間は上の右辺の３つのベクトルで張られるはずだ．この中から基底を選ぶには，一次独立なものを探し出せば良い．３つのベクトルの内，どの２つをとっても一次独立ではあるが，３つあわせると独立でないかもしれない．実際にやってみると，

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\8\\-1\end{pmatrix} \tag{5.3.5}$$

であるとわかる．従って，

$$\text{像空間の基底（の一つ）は}\ \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} \right\rangle,\qquad \text{像空間は}\ \left\{ s\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}\ \middle|\ s,t\in\mathbb{R} \right\} \tag{5.3.6}$$

で，その次元は 2.

（問 8.1 の解答終わり）

ここで，像空間と核空間の意味に戻って考えよう.「像空間」の意味は最初に説明したとおりだ．f によって X 全体を写像していった先が，どのくらい広い空間か（特に Y 全体になっているのか）ということの目安になる．

「核空間」の意味付けは，以下の定理によって与えられる．

定理 5.3.6 $f: X \to Y$ を線型写像とするとき，以下がなりたつ：

$$\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(X) \tag{5.3.7}$$

ここで $\dim(W)$ は W の次元を表す．

この定理は割合自然に理解できる．f で送る前の空間が X でその次元が $\dim(X)$ であったのだが，送られた先の次元は $\dim(\operatorname{Im} f)$ なのだ．足りない部分はどこに消えたのかというと，$\dim(\operatorname{Ker} f)$，つまり，$f$ によってゼロに写されてしまった部分である．つまり，$\operatorname{Im} f$ として現れている部分と $\operatorname{Ker} f$ としてゼロにされてしまった部分をあわせるともともとの X 全体になる，と言うわけだ．

（定理の証明の要点）

教科書にもあるので，簡単にすませる．いろいろな方法があるが，やはり $\operatorname{Ker} f$ の基底を特定してかかるのが簡単だろう．$\operatorname{Ker} f$ の基底を $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r \rangle$ とすると，これに適当にベクトルを付け加えて X の基底にできる．それを $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \boldsymbol{v}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ とする．言いたいことは，$\operatorname{Im} f$ の基底が $\langle f(\boldsymbol{v}_{r+1}), f(\boldsymbol{v}_{r+2}), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m) \rangle$ である事だ．そのためには（１）これらが一次独立,（２）これらが $\operatorname{Im} f$ を張る，の２つを言えばよい．

（１）の一次独立性を確かめるには，いつも通り，$k_{r+1}f(\boldsymbol{v}_{r+1})+k_{r+2}f(\boldsymbol{v}_{r+2})+\ldots+k_m f(\boldsymbol{v}_m)=\boldsymbol{0}$ を解けばよい．線型性から，これは $f(k_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1}+k_{r+2}\boldsymbol{v}_{r+2}+\ldots+k_m\boldsymbol{v}_m)=\boldsymbol{0}$ と同じ事で，$k_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1}+k_{r+2}\boldsymbol{v}_{r+2}+\ldots+k_m\boldsymbol{v}_m \in \operatorname{Ker} f$ を意味する．ところが，$\operatorname{Ker} f$ の基底は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ であって，これらのベクトルは $\boldsymbol{v}_{r+1}, \boldsymbol{v}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ とは一次独立だ（なぜなら，両者併せて X の基底だから）．と言うことは，$k_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1}+k_{r+2}\boldsymbol{v}_{r+2}+\ldots+k_m\boldsymbol{v}_m$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ の線型結合で表そうとして $k_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1}+k_{r+2}\boldsymbol{v}_{r+2}+\ldots+k_m\boldsymbol{v}_m = k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2+\ldots+k_r\boldsymbol{v}_r$ を解いてみても，その解は総ての $k_j=0$ しかない．つまり，特に $k_{r+1}=k_{r+2}=\ldots=k_m=0$ が得られた．これで $f(\boldsymbol{v}_{r+1}), f(\boldsymbol{v}_{r+2}), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)$ の一次独立性が証明された．

（２）の「張る」方は簡単である．先の補題 5.3.5 により，$\operatorname{Im} f$ は $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)$ で張られることがわかっている．ところが，$\boldsymbol{v}_1$ は $\operatorname{Ker} f$ の基底なんだから，$f(\boldsymbol{v}_1)=\boldsymbol{0}$ である．同様に，$f(\boldsymbol{v}_j)=\boldsymbol{0}$（$j=1,2,\ldots,r$）である．従って，$\operatorname{Im} f$ は $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)$ からこれらのゼロになるベクトルを除いた，$f(\boldsymbol{v}_{r+1}), f(\boldsymbol{v}_{r+2}), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)$ で張られる． □

5.4　線型写像の合成と逆

線型写像の合成と逆を考えよう．

定義 5.4.1 (線型写像の合成) 線型空間 X, Y, Z があり，線型写像 $f : X \to Y$ および $g : Y \to Z$ が与えられているとき，f と g の 合成写像 $g \circ f$ （順序に注意！）を

$$g \circ f : \ x \mapsto g(f(x)) \tag{5.4.1}$$

として定義する．要するに，x を f で送ってから g で送る，この２段階をまとめて $g \circ f$ と書くのだ．
（この定義そのものは線型に限らず，一般の写像でも使う.）

上のは単なる定義だが，これで漸く，行列のかけ算の定義が動機付けされる．すなわち：

定理 5.4.2 (合成写像の表現行列) 定義 5.4.1 の状況で，f の表現行列を A，g の表現行列を B とすると，$g \circ f$ の表現行列は BA となる．つまり f が「ベクトルに行列 A をかけること」，g が「ベクトルに行列 B をかけること」と表されていると，$g \circ f$ は「ベクトルに行列 BA をかけること」となるのである．

（注意）話をややこしくしないために明記しなかったが，線型写像の表現行列は基底を指定しなければ決まらない．上の定理は，X, Y, Z それぞれの基底を定めた上で，定理 5.2.3 で定まる表現行列を考えた場合のことを述べている．

証明：
行列のかけ算の定義が，モロにこうなるように作ってあるのだ．各自チェックすること．　□

次に線型写像の逆を考える．

定義 5.4.3 (線型写像の逆) 線型空間 X, Y と線型写像 $f : X \to Y$ が与えられていて，f は全単射であるとする．このとき，f の 逆写像 f^{-1} を

$$f^{-1} : \ f(x) \mapsto x \tag{5.4.2}$$

として定義する．

f^{-1} は $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} =$ 恒等写像 となるような写像のことである（恒等写像とは $\boldsymbol{x}$ をそれ自身に写す写像のこと）．つまり，f で送ったものを逆に送り返してくるのが f^{-1}．

定理 5.4.4 (逆写像の表現行列) 定義 5.4.3 の状況で，
(1) f^{-1} は $Y \to X$ の線型写像になる．
(2) f の表現行列を A とすると，f^{-1} の表現行列は A^{-1} （A の逆行列）となる．

証明：
f^{-1} が線型写像になることは定義通り確かめるとわかる．
f^{-1} の表現行列を B とすると，定理 5.4.2 により，$f^{-1} \circ f$ の表現行列は BA になる．これが恒等写像であるから，$BA = 1$ でないといけない．後で連立方程式をちゃんとやるところで証明するように，これは行列 B と A が逆行列の関係にあることを示している．　□

以上の定理は，いままで闇雲にやってきた 行列演算の定義に意味を与える ものとして，非常に重要である．

逆写像に関連して，以下の事実にも注意しておく．

定理 5.4.5 (写像が単射である条件) 線型写像 $f : X \to Y$ が単射である必要十分条件は $\mathrm{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$ である．

証明の概要：

線型性から $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$ であることに注意.

（必要条件）f が単射であれば，$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$ を満たす $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ に限られる.（両辺を引き算して）$f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ なるベクトル $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ はゼロベクトルに限られるのだ．つまり，$\mathrm{Ker}f = \{\boldsymbol{0}\}$.

（十分条件）$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ であれば，$\mathrm{Ker}f = \{\boldsymbol{0}\}$ から，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ が保証される．つまり，単射． □

定理 5.4.6 (逆写像が存在するのは？) 線型写像 $f : X \to Y$ の逆写像が存在する条件，つまり f が全単射である条件は，$\dim(X) = \dim(Y)$ かつ，$\mathrm{Ker}f = \{\boldsymbol{0}\}$ であること.

証明の概要：

$\mathrm{Ker}f = \{\boldsymbol{0}\}$ が単射と同値であることは上で見た.

全射であれば $\mathrm{Im}f = Y$ であるから，$\dim(\mathrm{Im}f) = \dim(Y)$ である．$\dim(\mathrm{Ker}f) = 0$ であるので，定理 5.3.6 から $\dim(X) = \dim(\mathrm{Im}f) + \dim(\mathrm{Ker}f) = \dim(Y)$.

逆に，$\dim(X) = \dim(Y)$ かつ，$\mathrm{Ker}f = \{\boldsymbol{0}\}$ であれば，定理 5.3.6 から $\dim(\mathrm{Im}f) = \dim(Y)$ となって，全射である. □

5.5 線型写像の階数

重要な「階数」の概念を定義しよう．まず，教科書にはないけれど，おおもとの定義から.

定義 5.5.1 線型空間 X から線型空間 Y への線型写像線型写像 $f : X \to Y$ が与えられたとき，f の像空間 $\mathrm{Im}\ f$ の次元をこの線型写像 f の 階数（rank）という.

次に，上の定義をもとにして「行列の階数」を以下のように定義する.

定義 5.5.2 $m \times n$ 行列 A が与えられたとき，線型空間 $X = \mathbb{R}^n$ から線型空間 $Y = \mathbb{R}^m$ への線型写像 f を $\boldsymbol{x} \in X$ に $A\boldsymbol{x}$ を対応させる写像として定義する．このとき，f の階数（すなわち $\mathrm{Im}\ f$ の次元）を行列 A の 階数（rank）といい，rank A または $r(A)$ と書く.

行列の階数は以下のように言い換えることもできる.

命題 5.5.3 $m \times n$ 行列 A が与えられたとき，A の n 個の列の作る m 項列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ と書こう．このとき A の階数 rank A は，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の中の一次独立なベクトルの最大数に等しい.

証明：

$\mathbb{R}^n$ の標準基底を $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ とすると，$\mathrm{Im}\ f$ は $f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)$ で張られることは既に注意した．しかし，$f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{a}_j$ であるから（$j = 1, 2, \ldots, n$）$\mathrm{Im}\ f$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ で張られることがわかる.

さて，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ で張られる線型空間の基底は，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の中から線型独立なものをうまく取り出せば得られる．その際，基底を構成するベクトルの数は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ 中に含まれる線型独立なベクトルの最大数に等しい. □

（補足かつ復習）上の証明の中で使ったことを整理しておこう．n 個の m 項列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ で張られる，$\mathbb{R}^m$ の部分空間 W を考える．この W の基底はどのようにすれば求められるだろうか？（$\boldsymbol{a}_j$ の中に零ベクトルがあったら，それははじめから基底のメンバーにはなれないから，$\boldsymbol{a}_j$ はどれもゼロでないと仮定して考える.）

- まず，$\boldsymbol{a}_1$ を基底のメンバーにする.
- 次に，$\boldsymbol{a}_2$ を見る．これが $\boldsymbol{a}_1$ と一次独立ならば，$\boldsymbol{a}_2$ も基底のメンバーに加える．もし，一次従属ならば，$\boldsymbol{a}_2$ は捨てる.

- 次に $\boldsymbol{a}_3$ を見る．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の３つが一次独立なら，$\boldsymbol{a}_3$ も基底のメンバーに加える．そうでないなら，$\boldsymbol{a}_3$ は捨てる．
- 以下同様に進む．具体的には $\boldsymbol{a}_j$ まで見た結果，メンバーに入ってるのが $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{a}_q, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ だったとすると，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{a}_q, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ に $\boldsymbol{a}_{j+1}$ を加えたものが一次独立なら $\boldsymbol{a}_{j+1}$ を基底のメンバーとする．そうでないなら $\boldsymbol{a}_{j+1}$ は捨てる．
- 以上を最終的に $\boldsymbol{a}_n$ まで行い，その最後に「基底のメンバー」として残っていたものが基底を構成する．

この作り方で確かに基底が構成できることは（１）W の任意の元がこのように作った「基底」の線形結合で書けること（２）この「基底」は一次独立であること，の２つを確かめることで証明できる.（１）も（２）も上の作り方から容易に証明できる（各自で確かめること）．

以下の定理は線型写像の合成と階数についての重要な性質である．

定理 5.5.4 X，Y，Z を（有限次元の）線型空間とする．また，X から Y への線型写像を f，Y から Z への線型写像を g とし，f と g の合成写像を $h = g \circ f$ とする．このとき，これらの階数について

$$r(h) \le \min\bigl\{r(f), r(g)\bigr\} \tag{5.5.1}$$

が成り立つ．

（注意）この定理は線型空間の次元が何であっても（それらが有限である限り）成り立つ．

証明：

$r(h) \le r(g)$ の方はほとんどアタリマエである．というのは，$h = g \circ f$ とは（出発点は X だったけど，ともかく途中からは）Y（の一部分である $\mathrm{Im}\ f$）から Z への線型写像 g である．その像空間は Y 全体から Z への線型写像 g の像空間 $\mathrm{Im}\ g$ より大きくはなれない．つまり，$r(h) \le r(g)$ である．

$r(h) \le r(f)$ の方が少し直感的ではないが，これは $g \circ f$ における g の出発点，つまり $\mathrm{Im}\ f$ の次元が $r(f)$ であることに注目すればわかる．線型写像 g をやった場合，その像空間の次元が出発点の空間の次元より大きくなることはない[2]．従って $r(g \circ f) \le r(f)$ である．□

上の定理を $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m, Z = \mathbb{R}^l$ の場合に行列の言葉に直すと，教科書の定理 4.5.1 になる：

定理 5.5.5 A を $m \times n$ 行列，B を $l \times m$ 行列とする．このとき，これらの階数について

$$r(BA) \le \min\bigl\{r(A), r(B)\bigr\} \tag{5.5.2}$$

が成り立つ．

（重要な注意）行列の階数に関しては，次の節（秋学科かな）で，もっと簡単な計算法（行列の基本変形）を学ぶ．でも今日のところは定義に基づいて求められるようになろう．

[2]これまでにも何回か注意したように，一般に線型空間 X から線型空間 Y への線型写像 p があったとき，$\mathrm{Im}\ p$ は $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ で張られる（X の次元を n，その基底を $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ とした）．ここには n 個のベクトルしかないから，$\mathrm{Im}\ f$ の次元は最大でも n である