中間テスト（6/13）の解答編 — web version（線型代数 A, 2011.6.20）

大切なお願い：各問の得点の合計 —— 特に十の位 —— は間違っている可能性が高いから，各自，一度はチェックして下さい．これに限らず，皆さんには採点結果に対して文句を言う権利があるから，おかしいと思ったら文句を言ってください（もちろん，その文句通りに点が変わるかどうかはわからないけど）．

（得点分布は，さすがに web で公開するとまずいかも知れないので，略.）

全体的な講評

まあ，大体は予想通りの点数分布でした．問 4，問 5 が難しいだろうとは思っていましたので．みなさん，そこそこ健闘していたと思います.（もちろん，部分空間，基底，次元などの「直感的意味」がわからないという人も多いとは思いますが，まずは問 4，問 5 以外の問題ができることが必要です．問 4，問 5 以外の配点は 65 点ですから，上の分布から見ても，このクラスの大半はまあまあ頑張っていると言えるでしょう.）

なお，非常に実力がありそうだが，計算ミス等であまり点が伸びなかった人も少数，見受けられました．線型代数はどうしても計算ミスがひびいてしまう側面があります．悔しいでしょうが，ここは捲土重来を期して，より励んで頂ければと思います.

（注）努力をしているのが行間からにじみ出ているのだが，なかなか理解が追いつかない人も例年，何人かいます．このような人はなかなかつらいとは思いますが，もう少し努力を続けてほしい．高校とかなり内容が異なるから，始めは大変なのは仕方ないのです．騙されたと思って夏休みまででも必死の努力を続ければかなり展望が違ってくるはずです．ただしその際，間違ったやり方でやっていても効果は上がらない．この学期の最初にも言った事であるが，以下のような点をもう一度思い出してください.

- わからない事は鵜呑みにせず，納得するまで考える.「納得できない解答を丸覚え」は時間の無駄だ.
- それでもわからないから，友達や僕（やほかの教官）に訪ねる．考えようとして放っておくよりは，友達などに聞いた方が良い場合も多い．質問すると，わかったつもりの事がわかってないことに気づいたり，自分で解決してしまうこともある.

（以下の解答集にもミスがあるかもしれないから，鵜呑みにしない事.）

問 1：思ったよりも，皆さん，苦戦してました．特に (3) ができた人は 1/3 くらい？

(1) ベクトル $\overrightarrow{OX} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ は $z = x + y$ を満たしている．このようなベクトルを $\overrightarrow{OX_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ と $\overrightarrow{OX_2} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ とすると，$z_j = x_j + y_j$ $(j = 1, 2)$ がなりたっている．従って，その和は $\overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OX_2} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}$ であるが，これは $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = (x_1 + y_1 - z_1) + (x_2 + y_2 - z_2) = 0 + 0 = 0$ となるので，ちゃんと W の元である．スカラー倍も同様にして，$k\overrightarrow{OX} \in W$ が言える．和とスカラー倍が W の中で定義されているので，部分空間である.

基底は $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ で，次元は 2.（ここのところもちゃんと説明してほしいが，その辺りはレポートで散々やったので，ここでは略.）

(2) 部分空間ではない．例えば，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ は W の元だが，その 2 倍 $2\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ は W の元ではないから.

(3) これは図形として考えれば，(1) を平行移動しただけなので，全く同じ解答になるはずなのですが，あまりできていませんでした．数式を使ってやれば，以下のようになります．問題のベクトルは $\overrightarrow{AY} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 1 \\ y \\ z \end{bmatrix}$ で，$x - 1 + y - z = 0$ が満たされている．そこで，$x - 1$ を X とおいてやれば，問題のベクトルは $\begin{bmatrix} X \\ y \\ z \end{bmatrix}$ with $X + y - z = 0$ となって，これは (1) と全く同じ形である．従って，(1) と同じ結論になる.

(4) 部分空間でない．例えば，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は W の元だが，$2\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ はそうではないから.

問２：皆さん，健闘してましたが，計算間違いをした人がかなりいた模様です．

(1) W の全ての元は定義から，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ の線型結合として書けているので，このうちのどれだけが最大限に一次独立にとれるか，ということが問題．簡単なものを基本にして行く方が楽だろう．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{d}$ は（平行でないから）独立．なので，この 2 つは基底のメンバーになる．残りはどうか？と思って線型結合で書いてみると：

$$\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{d}\quad \text{を解くと}\quad x=2,y=1\ \text{となるので，}\quad \boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}$$

とわかる．よって，$\boldsymbol{b}$ は「余分」だった．同様に $\boldsymbol{c}$ もやってみると，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}$ となる．やはり，$\boldsymbol{c}$ も「余分」．
結果として，W のすべての元は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{d}$ の線型結合で書ける上に，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{d}$ は独立．よって，W の基底の一例は $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}\rangle$，次元は 2.

（注）次元が 2 であり，$\boldsymbol{a}\sim\boldsymbol{d}$ のどの 2 つも平行でないから，W の基底としては $\boldsymbol{a}\sim\boldsymbol{d}$ の相異なる二つのベクトルなら，どれを選んでも良いことがわかる．

(2) 今度は $\boldsymbol{e}$ が加わったので，これが $\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}$ の線型結合で書けるか否かが問題．実際に $\boldsymbol{e}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{d}$ を解こうとしても，こんな x,y は存在しない．つまり，$\boldsymbol{e}$ を $\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}$ の線型結合で書く事は不可能．なので，$\boldsymbol{e}$ まで入れたのが基底．U の次元は 3 で，基底の例は $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}\rangle$.

(3) $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{d}+z\boldsymbol{e}$ を実際に解いてみると，$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{d}$ が得られる.（もちろん，(2) で別の基底を書いた人は，その基底のメンバーで展開する事.）

問３：
(1) （あ）から．線型結合を作ってみると

$$\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}+\gamma\boldsymbol{z}=(\alpha-7\beta+\gamma)\boldsymbol{a}+(2\alpha+2\beta-2\gamma)\boldsymbol{b}+(\alpha+\beta-\gamma)\boldsymbol{c}$$

となっている．これが $\boldsymbol{0}$ に等しいためには（$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が一次独立なので）

$$\alpha-7\beta+\gamma=0,\qquad 2\alpha+2\beta-2\gamma=0,\qquad \alpha+\beta-\gamma=0$$

が必要充分である．実は 2 つ目の式は 3 つ目の 2 倍だから，条件は実質二つしかない．だから，ゼロでない α,β,γ が存在するのはほとんど当たり前にみえるのだが，ここは具体的に示してほしいところだった．
実際上のを解くには，例えば，第一式と第 3 式をたすと $2\alpha-6\beta=0$ がでる．これを第一式または第三式に代入して，$\gamma=4\beta$ を得る．結局，$\alpha=3\beta,\gamma=4\beta$（$\beta$ は任意）というのが出るから,（あ）は一次従属である．
（い）も同様にやる．こんどは

$$\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{w}=(\alpha-7\beta+3\delta)\boldsymbol{a}+(2\alpha+2\beta+\delta)\boldsymbol{b}+(\alpha+\beta+2\delta)\boldsymbol{c}$$

なので，これが零ベクトルに等しいためには

$$\alpha-7\beta+3\delta=0,\qquad 2\alpha+2\beta+\delta=0,\qquad \alpha+\beta+2\delta=0$$

が必要充分である．
これを解くと，$\alpha=\beta=\delta=0$ 以外の解はないことがわかる（例えば，第 2 式から第 3 式の 2 倍をひくと $\delta=0$ が出る．これから $\alpha-7\beta=0$ と $\alpha+\beta=0$ が得られるので，片々たしたり引いたりしたら $\alpha=\beta=0$ もでる．よって（い）は一次独立である．

(2) （あ）について．$\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}+\gamma\boldsymbol{z}=\boldsymbol{p}$ の両辺の $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の係数を等しいとおくと，こんどは

$$\alpha-7\beta+\gamma=-5,\qquad 2\alpha+2\beta-2\gamma=-2,\qquad \alpha+\beta-\gamma=-1$$

となる．またもや，第 2 式は第 3 式の 2 倍なので，実質，第 1 式と第 3 式を解けば良い．第 1 式と第 3 式を足して 2 で割ると $\alpha-3\beta=-3$，第 1 式から第 3 式を引いて 2 で割ると $-4\beta+\gamma=-2$，が得られ，これは（足し引きしたので）もとの第 1 式，第 3 式と同値である．したがって，

$$\alpha=3\beta-3,\quad \gamma=4\beta-2,\qquad \beta\ \text{は任意}$$

と解けるので，

$$\boldsymbol{p}=(3\beta-3)\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}+(4\beta-2)\boldsymbol{z}\qquad \beta\ \text{は任意}$$

というのが，線型結合で表した結果である．もちろん，β の代わりに α や γ を用いて表しても良いが，大事なことは**表し方は一通りではない**，ことだ．

（い）について．こんどは

$$\alpha-7\beta+3\delta=5,\qquad 2\alpha+2\beta+\delta=-2,\qquad \alpha+\beta+2\delta=-1$$

を満たす α,β,δ を求めたい．これを解くと，$\delta=0,\alpha=-3/2,\beta=1/2$ となるので，

$$\boldsymbol{p}=-\frac{3}{2}\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\boldsymbol{y}$$

が答え．

（重要な注意）　（あ）に関して,「表し方が一つに決まらないので，線型結合では書けない」とした人が多数いた（この間違いは今年が初めて）．線型結合の定義を思い出してもらえば，一通りだろうが無限通りだろうが，ともかく線型結合の形で書けるか否かがここで問われている訳だ．(僕の講義ノートにも,「線型結合で書けるけども何通りにもなる場合」「線型結合で書けない場合」「線型結合で書けて，かつ，書き方が一つに決まる場合」を区別していたのだが...）折角ではあるが，余りに基本的な用語の使い方の間違いなので，この間違いをした人はこの部分の部分点（6 点）はあげていない．どうもここ数年，数学の言い回しに無頓着な人が増えているように思うのは気のせいか？

(3) （あ）では既に $3\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+4\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$ であることがわかっている．ので，$\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}$ の線型結合で書ける．更に，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{z}$ は平行でないから（$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の係数が比例しないから）独立である．従って，基底の一例は $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle$ で，次元は 2.

問４：

(1) レポートでも散々やったので，答えだけ．次元は 4 で，基底の一例は $\langle 1,x,x^2,x^3\rangle$.

(2) W が部分空間になることをまず，示す．$f,g\in W$ とすると，

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=0,\quad \int_{-1}^{1} g(x)dx=0$$

がなりたっている．従って，任意の実数 k に対して，みんなの知ってる積分の性質から

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)+g(x)\}dx=\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{-1}^{1} g(x)dx=0+0=0$$

$$\int_{-1}^{1}\{kf(x)dx=k\int_{-1}^{1} f(x)dx=k\times 0=0$$

となるので,「和」も「スカラー倍」も W の中で定義できる．従って，部分空間である．

次に，W の基底と次元を求めよう．V の任意の元は

$$f(x)=a+bx+cx^2+dx^3\qquad (a,b,c,d\in\mathbb{R})$$

と書けるので，積分で課された条件を満たすために，a,b,c,d がどうあるべきかを考えると，

$$0=\int_{-1}^{1}\left\{a+bx+cx^2+dx^3\right\}dx=2a+\frac{2}{3}c\qquad \text{つまり}\qquad 3a+c=0\quad \text{が必要十分}$$

となる．よって，W の任意の元は

$$a+bx-3ax^2+dx^3=a(1-3x^2)+bx+dx^3\qquad (a,b,d\in\mathbb{R})$$

と書けることがわかる．ここに出ている 3 つの関数 $1-3x^2,x,x^3$ は一次独立だから（高校以来やってるように，$a(1-3x^2)+bx+dx^3\equiv 0$ のためには，各自の係数がゼロである必要があるから），これが W の基底を作る．つまり W の次元は 3 で，基底の例は $\langle x,x^3,1-3x^2\rangle$.

(注) ほとんどの人が,「積分がゼロならば，奇関数」としていた．ついうっかりだとは思うが，必要条件と十分条件を間違えないようにしよう．

(3) 2 通りのやり方を示す．まずは地道に，上で求めた W の基底から出発して，W の元である

$$f(x)=a(1-3x^2)+bx+dx^3$$

に，どのような条件を付けたら U の元になるのかを考えてみよう．$f(\pm 1)=0$ ということは

$$-2a+(b+d)=0\quad \text{かつ}\quad -2a-(b+d)=0$$

が成り立て，と言う事であり，これは

$$a=0,\qquad \text{かつ}\qquad d=-b$$

と同値である．つまり，上の形の f が U の元であるための必要十分条件は

$$f(x)=bx-bx^2=bx(1-x^2)\qquad (b\in\mathbb{R})$$

と書ける事である．従って，U の基底は $\langle x(1-x^2)\rangle$ で，次元は 1.

(別解) (2) での結果は一旦，忘れて，まず V に戻って，$f(\pm 1)=0$ を満たすようにしてみると，$f(x)$ は $1-x^2$ で因数分解できるはずなので，$f(x)=(a+bx)(1-x^2)$ と書けるはず．ここで積分条件 $\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$ を課すと，$a=0$ が必要十分とわかる．後は上の解と同じ．

問５：

(1) まず,「和」と「スカラー倍」が定義できている事をチェックする.

$$f(x) = A_1 \sin x + B_1 \sin(2x) + C_1 \sin(3x) + D_1 (\sin x)^2 + E_1 (\sin x)^3$$
$$g(x) = A_2 \sin x + B_2 \sin(2x) + C_2 \sin(3x) + D_2 (\sin x)^2 + E_2 (\sin x)^3$$

と任意の実数 k に対して,

$$(f+g)(x) = (A_1 + A_2)\sin x + (B_1 + B_2)\sin(2x) + (C_1 + C_2)\sin(3x) + (D_1 + D_2)(\sin x)^2 + (E_1 + E_2)(\sin x)^3$$

$$(kf)(x) = kA_1 \sin x + kB_1 \sin(2x) + kC_1 \sin(3x) + kD_1 (\sin x)^2 + kE_1 (\sin x)^3$$

となり,V の元である.確かに和とスカラー倍が定義できている.

更に,C1〜C8 の 8 つの性質を確かめねばならないが,これは(講義中にも説明したように)それぞれの x で考えれば,実数の加法と乗法の性質から成り立つ.

よって,すべての性質が成り立つので,V は線型空間である.

(注)問題文に「V に和とスカラー倍を導入する」と書いてあるので和とスカラー倍は定義できている,とした答案が多数,ありましたが,みなさん,そんなに人の言う事を信用してはいけません.僕が間違って(または皆さんを騙そうとして)定義できないものを定義できると言い張っている可能性だってあるのです.皆さんの仕事は,実際に和やスカラー倍が定義できてるのか,ちゃんとチェックする事です.

(2) 公式集から

$$(\sin x)^3 = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x)$$

なので,V の元は $(\sin x)^3$ 以外の 4 つの関数の線型結合で書ける事はすぐにわかる.

問題はこれらが一次独立か否かであるが,それはやってみるしかない.実際に

$$A \sin x + B \sin(2x) + C \sin(3x) + D (\sin x)^2 \equiv 0$$

を解いて,$A = B = C = D = 0$ 以外の解があるかどうかを調べる訳だ.こういう問題は x に特殊な値を入れてみるのが良いだろう.

$$\begin{array}{rcll}
x = 0, \pi & \text{では} & 0 = 0 & \text{(意味なし)} \\
x = \pm\pi/2 & \text{では} & \pm A + 0 \mp C + D = 0 & \text{(もちろん,複合同順)} \\
x = \pi/4 & \text{では} & \dfrac{A}{\sqrt{2}} + B + \dfrac{C}{\sqrt{2}} + \dfrac{D}{2} = 0 & \\
x = \pi/6 & \text{では} & +\dfrac{A}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}B + C + \dfrac{D}{4} = 0 &
\end{array}$$

2 段目の式($\pm$ 両方)から,$D = 0$ かつ $A = C$ が出る.これを残りの二つに放り込んで A, B について解くと,結局 $A = B = C = D = 0$ が出る.よって,この 4 つは一次独立で,V の基底は $\langle \sin x, \sin(2x), \sin(3x), (\sin x)^2 \rangle$ ということになる.(もちろん,他のチョイスも可能).

(注)理由もなく $\sin x, \sin(2x), \sin(3x), (\sin x)^2$ は一次独立,と書いた人が多かったけども,この問題ではそれを示すのが大きなポイント(そうでなかったらレポート問題とほとんど変わらん)なので,そこは辛めに採点しました.

なお,レポート問題に引きずられたのか,$1, (\cos x)^2$ などが基底のメンバーに入った人もかなりいましたけど,これらは V の元ではありません.(従って,基底のメンバーにはなれません.)また,$\sqrt{\quad}$ を使った人もいましたが,「線型」代数にこれは反則です.(線型の意味をもう一度確認しよう.)