期末テスト（8/1）の解答編 — web version（線型代数 A, 2011.8.4）

> 大切なお願い：各問の得点の合計 —— 特に十の位 —— は間違っている可能性が高いから，各自，一度はチェックして下さい．これに限らず，皆さんには採点結果に対して文句を言う権利があるから，おかしいと思ったら文句を言ってください（もちろん，その文句通りに点が変わるかどうかはわからないけど）．

（得点分布は，さすがに web で公開するとまずいかも知れないので，略.）

全体的な講評

半分くらいの人は，割合に良くできていたと思います．特に問 4 にかなりの人が挑戦して，そこそこの成果を挙げていたのは大変に良いことだと思います．クラスの半分近くは抽象的な線型代数のがわかりつつあると言えるのではないかな．ぜひ，この調子で秋学期も頑張ってください．残りの半分弱の人はもう少し頑張ってね.

なお，非常に実力がありそうだが，計算ミス等であまり点が伸びなかった人も少数，見受けられました．線型代数はどうしても計算ミスがひびいてしまう側面があります．悔しいでしょうが，ここは捲土重来を期して，より励んで頂ければと思います.

（注）努力をしているのが行間からにじみ出ているのだが，なかなか理解が追いつかない人も例年，何人かいます．このような人はなかなかつらいとは思いますが，もう少し努力を続けてほしい．高校とかなり内容が異なるから，始めは大変なのは仕方ないのです．騙されたと思って夏休み中も必死の努力を続ければかなり展望が違ってくるはずです．ただしその際，間違ったやり方でやっていても効果は上がらない．この学期の最初にも言った事であるが，以下のような点をもう一度思い出してください.

- わからない事は鵜呑みにせず，納得するまで考える.「納得できない解答を丸覚え」は時間の無駄だ.
- それでもわからないから，友達や僕（やほかの教官）に訪ねる．考えようとして放っておくよりは，友達などに聞いた方が良い場合も多い．質問すると，わかったつもりの事がわかってないことに気づいたり，自分で解決してしまうこともある.

（以下の解答集にもミスがあるかもしれないから，鵜呑みにしない事.）

問 1：これは中間でも訊いたような問題です．かなり良くできてたので，簡単に行きます.

(1) $\boldsymbol{c} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$ とおいて，成分比較して方程式をたて，x, y を求めます．答えは $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$.（このような問題で間違った答えを堂々と書いてる人は，検算してない訳だから，部分点なし！）

(2) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ に対して $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$，また任意の $\boldsymbol{x} \in W$ と $k \in \mathbb{R}$ に対して $k\boldsymbol{x} \in W$ となることを言えばよろしい．どちらも，$\in W$ と言いたいものが，$\boldsymbol{a}$〜$\boldsymbol{e}$ の線形結合になっていることを言えばおしまいです.

(3) (1) で $\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の線型結合として表せたので，$\boldsymbol{c}$ は基底のメンバーにはならない．$\boldsymbol{d}$ については，$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$ なので，これもいらない．$\boldsymbol{e} = -2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$ なので，これもいらない．最後に $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は比例しないので，独立である.

以上から，基底の一例は $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ で，次元は 2．もちろん，基底としては $\boldsymbol{a}$〜$\boldsymbol{e}$ のどの二つをとっても良い.

問 2：皆さん，健闘してましたが，計算間違いをした人がある程度いましたね...

(1) 核空間から求めよう．f の行き先 $= 0$ の解全体が核空間だ．地道に解くと（とは言っても，下の式から解き登っていけば，ほとんど計算いらないはず）解は ${}^t(1, 3, 1, -1)$ に比例するもののみ，とわかる．よって核空間の次元は 1 次元で，その基底は上のベクトルからなるもの.

像空間を考えるにはこの写像の行き先が

$$x\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix} + w\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$$

と書けていることに注意する．次元定理から，像空間の次元は $4 - 1 = 3$ のはずなので，うえの 4 本のうち，1 本は余分なはず．よく見ると，一つ目，2 つ目，3 つ目のベクトルはそれぞれ，ゼロでない成分がひとつずつ増えてるので独立（実際に「線形結合＝0」を解こうとすればわかる）．4 番目は確かに

$$\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}$$

となって余分．ということで，像空間の次元は 3，基底の一例は

$$\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle$$

である．もちろん，要するに上の３成分は何でも良いということ（なぜなら，うえの３成分のみがゼロ以外になれて，かつ３次元なので）だから，もっとシンプルに

$$\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle$$

なども基底である．

(2) ええと，だんだんとしんどくなってきたので，簡単に書きます．核空間は，やはり「行き先＝０」となるような，元の ${}^t(x, y, z, w)$ の全体だから，ともかく一生懸命「行き先＝０」を解く．結果は例えば

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\3\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix} \qquad (s,\, t\text{ は任意})$$

となるから，核空間の次元は 2，基底の一例は

$$\left\langle \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle$$

である．

像空間は次元定理から $4-2=2$ 次元のはず（注意：ここで $5-2=3$ とした人多数．生兵法は大けがの元だぞ！）．それで像は

$$x\begin{bmatrix}3\\0\\2\\1\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\-3\\-1\\1\\-2\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}3\\0\\2\\1\\1\end{bmatrix} + w\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\1\end{bmatrix} = (x+z)\begin{bmatrix}3\\0\\2\\1\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\-3\\-1\\1\\-2\end{bmatrix} + w\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

と書けているので，右辺の３つのベクトルのうち，一つがほかの２つの線形結合で書けるはずなのだ．実際に

$$\begin{bmatrix}3\\0\\2\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\-3\\-1\\1\\-2\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

であって，予想（今までの計算結果に待ちなければこれ以外考えられないので,「予想」よりも強い言葉を使いたいが）はあってた．ということで，像空間の次元は２，その基底の一例は

$$\left\langle \begin{bmatrix}3\\0\\2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-3\\-1\\1\\-2\end{bmatrix} \right\rangle$$

問３の標準的な解法： 「線形性」をフルに使ってもらう問題です．ここではまず，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ をあらわに残した形での解答を書きます．そのあとで，基底 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ に関する成分表示を用いた方法を紹介します．

(1) 与えられた条件をよくにらむと，f の引数の差がちょうど $\boldsymbol{a}$ である．ので，

$$f(2\boldsymbol{a}) = 2f(\boldsymbol{a}) = 2\{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) - f(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\} = 2(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

(2) 右辺を足し引きして $\boldsymbol{c}$ になるようにしても良いけど，ややこしいから $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$ とおいて，未知数 α, β, γ を求めれば良い．線型性から

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c} &= f(\boldsymbol{x}) = f(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}) = \alpha f(\boldsymbol{a}) + \beta f(\boldsymbol{b}) + \gamma f(\boldsymbol{c}) = \alpha(2\boldsymbol{a}) + \beta(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) + \gamma(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\\ &= (2\alpha+\beta+\gamma)\boldsymbol{a} + (\beta-\gamma)\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

が成り立つはず．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が基底をなすから，その係数は等しくなければならず，これから α, β, γ の連立方程式がでる．これを解いて，最終結果は $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$.

また，表現行列は $g(\boldsymbol{a}), g(\boldsymbol{b}), g(\boldsymbol{c})$ の表現ベクトル，つまり

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

を並べて

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる．**（注意）レポートのときから指摘してるにも関わらず，うえの行列の転置行列を書いてる人が数人いました．さすがにここまで頑固だと，僕もどうしたら良いのかわかんない...**

(3) ランクが２だということは，行き先の３つのベクトルが独立ではあり得ない．(もし独立なら，これらの３つのベクトルで張られる像空間の次元が３になってしまう！）これに気づけば簡単で，行き先の３つのベクトルが一時従属になるように y を決めれば良い．３つのベクトルはゼロではないし，はじめの２つは独立だから，結局，３つ目がはじめの二つの線型結合で書けるしかない．つまり，適当な数 s, t を用いて

$$\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{c} = s(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) + t(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$$

と書けるように，y を決めよ，ということです．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の独立性から係数比較して

$$1 = s + t, \quad 0 = 2s + t, \quad y = s + t$$

と言うことであって，はじめの二つから s, t を求めて３番目に入れて $y = 1$ とわかる．(１番目の式と３番目の式を比べるとすぐに $y = 1$ が必要なことはわかるけども，一応，念のためにこのような s, t, y が存在することを確認する意味で s, t を具体的に求めるのが無難.）

(4) **大変，申し訳なし．出題途中でいろいろいじくってるうちに，式の符号を間違えた出題になってしまいました．本来は (4) の最後の式が $p(\boldsymbol{a} + z\boldsymbol{c}) = 3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ または $p(-\boldsymbol{a} + z\boldsymbol{c}) = -3\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ となるはずだったのですが，符号を間違えたもので出題してしまいました．そのため，元の出題のままだと，「そのような p が存在しない」ことになってしまいました（問題の最後に解説）．採点にあたっては，いかに述べたような道筋を押さえたか，あるいは矛盾があることに気づいてる人を良く評価することにしました．ただし，この小問の配点は５点です．**

以下，本来の出題意図に沿って解説します．本来の出題意図とし，問題の最後の条件が $p(-\boldsymbol{a} + z\boldsymbol{c}) = -3\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$ である場合を考えます．

さてともかく，ランクが３だということで z が決まるのは，非常に奇異な感じがします．行き先が３次元になってたらいつでもランクが３のはずですから．でも，行き先が２次元しかないなら話は別．ということで，行き先の３つのベクトルが何次元の空間を張ってるかを考えると

$$2(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) - (2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = 3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = (-1) \times (-3\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})$$

であるので，行き先は２次元分しかありません．つまり，このままでは，この線型写像のランクは２である可能性が高いのです．

では，どういう場合にはランクが３になれるかというと，p の引数（写像の元）の３本のベクトルが，これまた３次元の空間を張ってない場合です（もし，写像の元が次元を張ってしまってると，これ以上，像がのびることはできないので，像空間は２次元のままでランクは２）．つまり，**必要条件として，「p の引数である３つのベクトルが一時従属であること」が得られます．** さて，この条件は，実は小問 (3) で考えたのと非常に似ていて，今回は

$$-\boldsymbol{a} + z\boldsymbol{c} = s(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) + t(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$$

となるように z, s, t を決めろ，ということ．これは (3) の符号を変えたバージョンにあたるので，$z = -1$ が必要，となり，これが答えです．(ここまでは出題通りの，ミスのあるままでも成り立つ.）試験では以下は要求しませんが，本当にこんな p が存在するのか，などを以下で考えます．

（元々の出題では何が困るのか？） 上で解説したように，**必要条件として** $z = -1$ が得られます．これはもともとの出題でも同じです．ただ，これでは必要条件を求めただけなので，本当にこんな p が存在するのか，不安ですね．(そして実際，以下に示すように，元々の出題では p が存在しなくなってしまいます.）

問題の条件の前の二つの式から

$$p(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \qquad p(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) = 3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$$

が得られますが，出題通りだと，２番目の式の右辺は $p(-\boldsymbol{a} + z\boldsymbol{c}) = p(-\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}) = -p(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c})$ に等しいはずで，つまり

$$p(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) = 3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = -p(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c})$$

で，これは矛盾ですね... これが元々の出題での矛盾点です．上に訂正したものでは符号を変えたので，この矛盾はありません．

矛盾点が生じた原因は，p の引数の３つのベクトルが独立でない（一時従属の関係がある）にも関わらず，それを反映した右辺になっていなかったことにあります．

（訂正したものでは，本当にそんな p が存在するのか？） 一度間違ったらなかなか信用は取り戻せません．上のように $p(-\boldsymbol{a}+z\boldsymbol{c})=-3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ と訂正したのですが，これで本当に矛盾なく p を作れているのかどうか，疑問に思ってる人もいるでしょうから，そこを確かめておきましょう．つまり問題は（上で $z=-1$ は必要条件として見つけたから）

$$p(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\qquad p(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\qquad p(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=-3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$$

を満たすような線型写像 p が存在するか，ということです．この問題は，与えられた条件をできるだけ整理すれば解決できます．

つまり，今の場合，(第２式）ー（第１式）×2 を考えると，丁度第３式が出てきます．つまり，第３式は最初の二つから導けるから，独立な条件ではなく，最初のふたつだけを考えれば良い．しかし，最初の二つは適当に足し引きすると

$$p(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\qquad p(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

で，独立な $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{b}$ の値を勝手に決めてるだけなので，全く問題ありません．というわけで，確かにこのような p は無数に存在します．

問３の成分表示を使ったやり方： 基底 $E=\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$ に関する成分を用いた方法を紹介します．

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ は基底 E で成分表示すると ${}^t(1,1,1)$，$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ は 基底 E で成分表示すると ${}^t(1,2,1)$，などとなるので，題意より，f の作用を成分表示で書くと，

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$$

となっている．また問題は，${}^t(2,0,0)$ が何に移るか？ということである．うえの２つをにらめば

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\qquad \text{よって}\qquad \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}\mapsto 2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\2\\0\end{bmatrix}$$

が得られる．これを $\boldsymbol{a}$ などの言葉に翻訳して，$f(2\boldsymbol{a})=-2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$.

（注意）答えを ${}^t(-2,2,0)$ と書いた人がいた．気持ちはわかるが，これは何の基底に関する成分かを明記していないので，本当は間違いである．

(2) (1) と同様に考えると，g の作用は

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

となってるから，右辺を並べて，表現行列は $\begin{bmatrix}2&1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$ となる．求める $\boldsymbol{x}$ の成分表示を ${}^t(x,y,z)$ とすると，これは

$$\begin{bmatrix}2&1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=[\boldsymbol{c}]_E=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

を満たすべきである．これは x,y,z に対する連立方程式なので，解いて，$z=y=1, x=-1$．後はこれを $\boldsymbol{a}$ などの言葉に翻訳して，$\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

(3) この問題，行き先の空間が２次元になってくれないと困る．行き先の空間を張る３つのベクトルの基底 E に関する成分表示は

$$\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}1\\0\\y\end{bmatrix}$$

なので，この３つが独立でないように y を選べ，という問題である．この数ベクトルの問題は今までも何回もやったので，後は略.

表現行列を用いても解けるが，基底 E,E で考えるとなかなか大変である．むしろ，基底 $E'=\langle \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}\rangle$ を導入して，基底 E',E に関する表現行列を考えるのが簡単である（もちろん，E' が基底になっていること，つまりこの３本のベクトルが独立であること，はちゃんと確かめるべし）．この場合の表現行列は

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&0\\1&1&y\end{bmatrix}$$

となるから，この行列のランクを２にするように y を選べば良い．

なお，基底 E,E に関する表現行列を用いて解くこともできるが，回りくどい．足したり引いたりして

$$f(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1+y}{2}\boldsymbol{c},\quad f(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b},\quad f(\boldsymbol{c})=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1-y}{2}\boldsymbol{c}$$

を得て，これから表現行列が

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1+y}{2} & 0 & \frac{1-y}{2} \end{bmatrix}$$

と求められる．この行列のランクが２であれば良い．行列のランクは基本変形すればわかる（ここは講義ではまだやっていないが）．結果は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1-y}{2} \end{bmatrix}$$

となっていて，ランクが２であるには，最後の行がゼロでないと困る．つまり，$y=1$.

(4) ええかげん，しんどくなって来たので，この辺りで問３の解答例はおしまい...

問４：

(1)「和」と「スカラー倍」が定義できていること，はかなりの人が書いていましたが，これだけではダメで,「線型空間」の定義の８つの条件を満たしていることを示す必要があります.

(2) 次元は 4，基底の一例は

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

です．この辺りについては，教科書の pp.57–58 を見てください.

(3) 示すべきことがわかっていない人が目立ちました．示すべきは $X, Y \in V$ と $k \in \mathbb{R}$ に対して

$$F(X+Y) = F(X) + F(Y), \qquad F(kX) = kF(X)$$

が成り立つこと，あるいは同じことですが，$X, Y \in V$ と $k, l \in \mathbb{R}$ に対して

$$F(kX + lY) = kF(X) = lF(Y)$$

がなりたつこと，です.（上の式は F の定義からすぐにわかります.）よくあった間違った解答は $F(X+Y) \in V, F(kX) \in V$ だから O.K. というものでした．これでは「線型」のいちばん重要なところに触れていないので，零点としました.

(4) 具体的に書いてみるのが良いだろう.

$$(*) \qquad X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \quad \text{に対して} \quad F(X) = AX - XA = \begin{bmatrix} z-y & w-x \\ x-w & y-z \end{bmatrix} = (z-y)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + (x-w)\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

となる．像空間は右辺に出ている二つの行列の線形結合であり，かつ，この二つは独立である（なぜなら

$$s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} t\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

を解けば，$s = t = 0$ となるから）．よって，像空間の次元は２，基底の一例は

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

である.

次に，核空間．$F(X) = 0$（右辺のゼロは，零行列）となる X の全体を求めたい．うえの (*) から，この条件は $x = w, y = z$ であるから，核空間は

$$\left\{ s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \middle| s, t \text{は任意} \right\}$$

であることがわかる．右辺に出ている二つの行列はまたもや独立なので，核空間の次元は２，その基底の一例は

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

である．なお，解いてしまった後で考えてみると，上の二つの行列は A と可換なものになっていて，まあ，当然ではある.

なお,「上のような基底を表したい」という気持ちは読み取れるが，基底のメンバーが行列になっていないなど，基底の基本からできてない例がよくあった．これらの人はもう一回，基底とは何だったのかを考えてほしい.

(5) 最後に表現行列を求めよう．基底としては (2) で掲げたものをとって，これを E と書こう．その場合,

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \qquad \text{の表現ベクトル（成分表示）は} \qquad [X]_E = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

となる．また，その行き先については

$$F(X) = \begin{bmatrix} z-y & w-x \\ x-w & y-z \end{bmatrix} \qquad \text{の表現ベクトル（成分表示）は} \qquad [F(X)]_E = \begin{bmatrix} z-y \\ w-x \\ x-w \\ y-z \end{bmatrix}$$

となっているので，表現行列を B と書けば，B は

$$\begin{bmatrix} z-y \\ w-x \\ x-w \\ y-z \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

と書けるものである．このような B は（すぐにわかるけど，$x = 1, y = z = w = 0$ などを考えてもよい）

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので，これが答え．