2011.4.18.

線形代数・同演習 A　(S-1 クラス)

担当：原　隆（数理学研究院）：伊都キャンパス数理研究教育棟 219 号室，phone: 092-802-4441,
e-mail: hara@math.kyushu-u.ac.jp,　http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html

Office hours: 暫定的に月曜の午後 3 時半〜5 時半頃，僕のオフィスにて．なお講義終了後にも質問を受け付けますし，これ以外でもお互いの都合の良い時間にお相手します．

概要： 理学部物理学科の学生さん向けに,「線形代数」を講義する．通年講義なので，１年が終わった時点で

1. 「行列」「逆行列」,「行列式」などの計算ができるようになり，
2. 「固有値と固有ベクトル」「行列の対角化」も使いこなせて，
3. 「線型とは」「線型空間」「一次独立」などの重要な概念も理解する，

の３点ができるようになることを目標とする．

キーになる概念：行列，逆行列，行列の基本変形，線形空間，線形独立，基底と次元，線形写像,（行列式）,（固有値と固有ベクトル）,（行列の対角化）．括弧の中は主に後期の内容．

内容予定：（以下は大体の目安です．皆さんの理解の程度などにより，ある程度の変更はあり得ます．）

1. ３次元空間のベクトル，平面や直線の表し方，複素数
2. ベクトル（と線形空間），特に「一次独立」「基底」などの概念
3. 行列の演算
4. 線形写像，核空間と像空間，写像の合成
5. 連立一次方程式と逆行列の計算（この一部は秋学期かも）

期末試験は，普通にやれば 8/8 ですが，これを一週間早めて，8/1 などに行う可能性があります．どちらにするかを確定次第，講義で宣言します．

教科書：

- 内田・高木・剱持・浦川「線形代数入門」裳華房

参考書：

- 斉藤正彦「線形代数入門」（東大出版会）．少し難しいだろうが，今でも定番の教科書．物理学科（特に理論を目指す人）にはこのくらいは理解して欲しい．
- Feynman Lectures on Physics, vol. 3（邦訳は「ファインマン物理学第５巻」）これは量子力学に関する本だが，僕は線形代数の本質をこの本から学んだ．量子力学の数学的構造はほとんど線形代数だから，これは不思議なことではない．なお，このシリーズは英語で読むことをお勧めする．理由は大人の事情により略．
- これ以外に，講義ノートのようなものを作成し，皆さんがダウンロードできるようにする（講義で配布することもある）．以下の URL（http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html）から，この科目のページをご覧ください（4/18 現在，改訂版を作成中．）
- 更に，僕の友達の田崎晴明さんの書きかけの本「数学：物理を学び楽しむために」がお勧めだ．これは彼の web page (`http://www.gakushuin.ac.jp/~881791/mathbook/`) からダウンロードできるので，興味のある人は自分で取ってみてほしい．田崎さんはおもしろい日記も書いているから，そちらもお奨め．

評価方法： 主に中間試験（＋レポート）と期末試験の成績を総合して評価する．そのルールは以下の通りだが，優（A）を狙うには特別の関門があるので，後の但し書きを良く読む事．

- 最終成績は一旦，100 点満点に換算してから，この大学の様式に従ってつける．
- その 100 点満点（最終素点）は，以下のように計算する．

– まず,「中間試験の点」「期末試験の点」をそれぞれ 100 点満点で出す.
– 次にこの２つを以下の式で「平均」し，一応の総合点を出す：

$$(\text{総合点 } A) = 0.60 \times (\text{中間の点}) + 0.40 \times (\text{期末の点})$$

– ただし，上の計算式の重みを若干変更する可能性はあることを承知されたい（例えば，総合点 A で，中間と期末の比を 5 : 5 にするなど）.
– 最終素点は

$$(\text{最終素点}) = \max\{\,(\text{総合点 } A), (\text{期末の点})\,\}$$

とする．つまり,（総合点 A）と（期末の点）を比べて，良い方をとるのだ.

- 上の「最終素点」をよく見て，必要ならば全体に少し修正（例：全員に下駄をはかせるとか）を加えたものをつくり，これをこの大学の基準と合わせて最終成績を出す.
- レポートは原則としては総合点 A には加えない．しかし，上の計算では合格基準に少し足りない人（百点満点で 10 点不足が限度）を助けるかどうかに使用する．また，チャレンジ問題などでずば抜けた解答をした人にも特例措置を講ずるかもしれない.

（A をとるための重要な但し書き） 期末試験ではあまり冒険をする訳にはいかず,（A と B の区別をつけるような）極端に難しい問題は出題しにくい．そのため，中間試験にも A, B の峻別を行う機能をある程度持たせて，中間・期末ともに成績優秀な人にのみ，A をあたえるようにする可能性がある —— 特に，期末を簡単にしすぎた場合はこうなる．この意味で，A をとるためには期末だけでの一発逆転は無理かも知れない．A を狙って頑張る人はこの点を考慮して，中間・期末とも確実に受験してほしい.

（期末一発逆転を可能にする理由）この講義では（上位 10%の人だけがわかるような）進んだ話題はあまり扱わない．そのため,「できる」人が退屈することも考えられる．そのような人には自主的な学習を奨める意味で,「期末で一発逆転」も可能なようにした．ただし,「期末の一発勝負」がうまくいく人は少ないだろう（期末試験は中間試験やレポートよりは難しい）から，**あくまで自己責任で**やってくれ．期末の一発勝負で成績が悪くても，苦情は一切受け付けないからね！(この形式をとるのは，僕の美学にこだわっているからである.)

「学習到達度再調査」（？）について：

この大学には「学習到達度再調査」なる変な制度があるらしい．これに変に期待する人がいるかもしれないので，ここではっきり宣言しておこう.

「再調査」は行わない可能性が高い．もし行うとしても，その権利を得るのはギリギリで不合格になった人だけで，誰を対象とするかは，こちらの一存で（もちろん，公平に，しかし厳しく）決めさせていただく．また，再調査をしてもダメな人も出現しうる（過去にもたくさん存在した）.

(再調査とは独立に，正規の理由があれば追試験は行うのでご安心を — ただし，追試験の資格がある場合は，規定の時間内に教務課などに申告すること.)

更に付言するならば，再調査をする方が，こちらとしては厳しく点を付けやすい（厳しく採点して，誰を助けるかは再調査できちんと確かめれば良いから）．だから，このようなものには頼らず，**期末試験でちゃんと合格できるよう，しっかり学習して下さい**．期末試験までなら皆さんの学習を助ける努力は惜しまないつもりで，質問などにも忍耐強く相手することを保証する.

なお，言うまでもないことであるが，いくら進級や卒業がかかっていても，単位の出せないものは出せないことは理解されたい.（いわゆる「泣き落とし」は通用しないばかりか，**逆効果**であるからそのつもりで.）下の合格基準に述べるように，普通に勉強してれば十分に単位が取れる仕組みにはしてあるから姑息なことは考えないように.

合格（最低）基準: 合格のための条件は，講義中に出題する例題（やレポート問題）と同レベルの問題が解けることである．具体的には今学期は大体，以下のようになるだろう（進度の都合で若干の変更があることをご了承願いたい）.

- 一次方程式が解ける．解が不定や不能の場合ももちろん，含む.
- 逆行列が求められる.（ただし，進度によっては，逆行列は来学期に廻すかも）
- 一次従属，一次従属，基底などの意味がわかり，与えられたベクトルの組が独立か従属か判定できる.
- 線形写像の意味が理解できる；具体的には与えられた写像が線形かどうか判定できる，またその像空間や核空間が計算できる.
- （以上は最低基準である．最低でなければ）抽象的な線形空間の概念が理解できている.

レポート，宿題，教科書の問題，演習の問題について：

講義中に何回か，簡単なレポートや「お奨めの宿題問題」を出すだろう．これらの出題の意図は「この程度できれば講義についていけるし，合格も可能だ」という目安を与えることと家庭学習の引き金にすること，である．成績評価に占めるレポートの比重は低いが，この講義をこなす上では重要な意味があるので，やってみること．「レポート」の作成はみんなで協力してやっても構わないし，むしろ協力することを奨励する．ただし、（友達と協力してレポート問題を解いた場合でも）各人のレポートは自分の言葉で記述し、かつ、「○○君と一緒に考えました」とぐらいは書くべきだ．また，教えてもらった事はそのままにせず，自分でもう一回考えて納得しておく事．（これらは高校までで身に付いているべきだが，どうも怪しい人が多いようだから書いておく．）

また，当然のことではあるが，講義で進んだ部分に該当する教科書の問題くらいは全問，やっておくこと．

プリントの使いかた：

教科書に加えて，僕自身の書いたプリントも用いる．**ただし，印刷したものを配布する代わりに，各自で僕の web page からダウンロードしてもらうことにする可能性も高い．** これらのプリントは板書にアップアップしないでも講義が聴けるように，また，教科書の足りないところを補うために，作ったものである．なお，急いで作っているためにタイプミスなどがかなりあると思うので，気づいたらできるだけ指摘してくれるとありがたい．

勉強法などについて：

大学での数学では高校での数学にもまして，論理的思考力が要求されます．特にこの科目（線形代数）では**線型空間の概念**にとまどうことも多いと思います．そのような場合に困らないためには，

１．**最低限の計算力**を身につける．僕の出すレポート問題，教科書の問題，自分で選んだ演習書などをともかく自分でやってみる．

２．**論理的に考える癖**も身につける．何となくウザイと思っても嫌がらずに，教科書や講義での論理展開を自分で追って（再現して）みる

ことがかなり役に立つはずです．

ついでに大学での理想の勉強法について書いておきます．

- 第一原則として，**自分の納得するまで考えて，理解する**ことを目指す．
- でも行き詰まったら，気分転換も兼ねて演習書などをやる．具体的に手を動かすことで,「わかったつもりで全然わかってない」ことが見つかるかもしれない．
- 新しい概念などがわからない時は，その「定義」がそもそもわかってないことが非常に多い（特に線型代数ではそうである）．**重要な概念の定義が言えるか**，自答しよう．定義が言えない時は定義を覚えられるまで，**具体例を考えよう**．（意味もわからずに定義を丸暗記するのは，たいていの場合は無駄だが，やらないよりはましかも．）具体例さえ思い浮かばない時はかなりの重症です．友達や教官に質問しましょう．
- 定義，定理などでは**反例を常に思い浮かべる**ようにする．「定理のこの条件がなくなったらどこが困るのか」などを考えると，より身近に感じられて理解が深まる．
- 「高校の数学では問題演習中心だったので，大学でも問題演習中心にやって下さい」という意見を聞くことがあります．問題演習も，**その前提となる話の筋道（定義，定理，証明など）を理解した上でなら**，非常に有効です．しかし，**話の筋道も理解せず，問題演習だけをやるのは愚の骨頂**といわざるを得ません．大学の数学（に限らずほとんどの科目）では，**「話の筋道」の理解に重点がおかれ**，問題演習は各自にまかせることが多いと思われます．実際，講義で聴いた話の筋道をもとにして，どのように問題を解くかを考えるステップが最重要なのであって，ここのところを「この問題はこのように解きます」と聞いてしまえば，効果は半減します．ですからこの部分は各自で補うようにして下さい（少しの問題はレポートなどとして出題します）．そして何より，意味もわからずに問題演習をやるような間違った勉強法をやってる人は，それから早く脱出しましょう．
- （最後に）ここは大学で，これまでのように手取り足取りはしてくれない（少なくとも僕はしない）ことを思い出そう．皆さんが自分から動けば道は開けるけども，**助けてくれるのを待っているだけでは何も解決しない**よ．

特に一言：この講義に出てくるいろいろな概念は，ゆっくり考えればそれほど難しいものではありません．しかし，**高校までの数学に対して抽象度が高く**，とくに「線形空間」「線形写像」の概念をつかむのにかなり苦しむことも考えられます．決して甘く見ずに，着実に学習することをお奨めします．なお，参考書として掲げた「ファインマン物理学」は案外，役に立つかもしれません．**しつこいけども，答えの丸暗記はお奨めしない．遠回りに見えても，どんなに苦しくても，納得するまで考えることが最短の道である．**

この科目に関するルール：世相の移り変わりは激しく，僕が学生だったときには想像すらできなかったことが大学で行われるようになりました．そのうちのいくつかは良いことですが，悪いこともあります．オヤジだとの批判は覚悟の上で，互いの利益のために，以下のルールを定めます．

- まず初めに，学生生活の最大の目的は勉強すること であると確認する．
- 講義中の私語，ケータイの使用はつつしむ．途中入室もできるだけ避ける（どうしても必要な場合は周囲の邪魔にならないように）．これらはいずれも講義に参加している 他の学生さんへの 最低限のエチケットです．
- 僕の方では時間通りに講義をはじめ、時間通りに終わるよう心がける．
- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義を通して行う（補助として僕のホームページも使う —— アドレスは最初に載せた）．「講義に欠席したから知らなかった」などの苦情は一切，受け付けない．
- レポートを課した場合，その期限は厳密に取り扱う．
- E-mail による質問はいつでも受け付ける（hara@math.kyushu-u.ac.jp）ので積極的に利用するように．ただ，回答までには数日の余裕を見込んで下さい．又，着信拒否にしないでね．

本論に入る前に記号のお約束．

$a<b$ を 2 つの実数，n を非負（負でない）整数とする．

- 整数の全体は $\mathbb{Z}$，自然数（1 以上の整数）の全体を $\mathbb{N}$，有理数の全体を $\mathbb{Q}$，実数の全体を $\mathbb{R}$，複素数の全体を $\mathbb{C}$ と書く．例えば，$x\in\mathbb{R}$ と書けば，「x は実数」と同じことである．
- 集合 A の要素を大学では「元（げん）」ともいう．(例) 2 は $\mathbb{Z}$ の元である．$\sqrt{2}$ は $\mathbb{Q}$ の元ではない．
- 高校までと異なり，「$a<b$ または $a=b$」を $a\le b$ と書く（不等号の下が 2 本線ではなく，1 本線）．同様に，「$a>b$ または $a=b$」を $a\ge b$ と書く．
- $a<x<b$ なるすべての実数の集合を (a,b) と書き，開区間 という．
  $a\le x\le b$ なるすべての実数の集合を $[a,b]$ と書き，閉区間 という．
- 高校と同じく，$n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots2\cdot1$ は n の階乗 である．ただし，$0!=1$ と約束する．

(用語の注) あるものがたった一通りに決まる（存在する）とき，業界用語では○○**が一意に決まる（存在する）**という．この表現『一意』は頻出するから覚えよう（英語の unique, uniquely の訳）．

(用語の注) 本来，この科目名は「線**型**代数」とするのが正しい（形と型は違う）．しかし，いつ頃からか「形」を使うのが主流になってしまった．仕方ないので，この科目でも「形」を使うことがあるが，かなりの部分，「型」と書いてしまうこともあるだろう．そのような場合は「線型＝線形」と読み替えて下さい．

わからない記号が出てきたら，また，僕がおかしなことを言ってると思ったら，質問（または指摘）して下さい．僕の言ってることがわからないままに 90 分も座っているのは時間の無駄です．あなたがわからない時は，隣の友達も多分，わかってないでしょう．だから，勇気をだして発言して下さいね．僕は変な人格攻撃以外で激高したことはありません．(かなりの人格攻撃でも表面上は受け流せると思っているのだが，試さないでね．)

4 月 18 日の講義について：今日は第一回なので簡単なところから．大半は高校の復習です．

4 月 25 日：今日は平面の方程式，およびベクトルの一次結合くらいまで．

第１回レポート問題： どこまで進めるかわからないので，ちょっと面白くないですが，平面に関する簡単な計算問題をだしました．なお，講義でも注意したように，黒板ではベクトルは縦ベクトルの形で書きます．でも，講義ノートではスペースの節約のため横ベクトルの形で書くことも多いので，ご了承ください．

問１： 以下の条件を満たす平面の方程式を求めよ．
(i) 点 $(3, 1, 1)$ を通り，ベクトル $(1, 2, -1)$ に垂直な平面
(ii) 点 $(1, 2, 3)$ を通り，平面 $2x + y - z = 0$ に平行な平面
(iii) ３点 $A(2, -1, -1), B(1, 2, -2), C(2, 1, -2)$ を通る平面

問２： 上の問 1 の (i), (iii) の平面のそれぞれを「パラメーター表示」で表せ．(表し方は一通りとは限らないから，ひとつだけ書けば良い．)

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

上の問に解答し，

4 月 28 日（木）14:00 （時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン１号館２階）のレポートボックス　番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

なお，今回は連休が来るので，早いレポート締め切り日時になっています．第 2 回以降のレポートの締め切り日時は，他の曜日になる可能性も高いので，注意して下さい．

5 月 2 日：今日は数ベクトルの定義，線形独立（一次独立）を中心にやります．

第 2 回レポート問題： 1 次結合についての問題です．なお，講義でも注意したように，黒板ではベクトルは縦ベクトルの形で書きます．でも，講義ノートではスペースの節約のため横ベクトルの形で書くことも多いので，ご了承ください．レポート問題は学期を通して番号をつけますので，今日は問 3 からになります．レポート問題は「その題材に関して典型的な問題を 1 個だけ」に限定して出しています．言うまでもないことですが，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問 3： ベクトル $\boldsymbol{a}, ..., \boldsymbol{d}, \boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{d} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする．$\boldsymbol{x}$ を，以下に指定するベクトルの線型結合として表せ．ただし，線型結合として表せない場合もあるとあると思われるので，その際は「表せない」と答えれば良い．

1. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の 2 つのベクトル
2. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の 2 つのベクトル
3. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の 3 つのベクトル

問 4*： （この問題は少し「抽象的」なので，出来なくても悲観するには及ばない）2 次以下の x の多項式の作るベクトル空間を V とし，そのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{p}$ を

$$\boldsymbol{a} = 1, \qquad \boldsymbol{b} = x - 1, \qquad \boldsymbol{c} = (x-1)^2, \qquad \boldsymbol{p} = x^2 + x + 1$$

とする．$\boldsymbol{p}$ を，以下に指定するベクトルの線型結合として表せ．ただし，線型結合として表せない場合もあるとあると思われるので，その際は「表せない」と答えれば良い．

1. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の 2 つのベクトル
2. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の 2 つのベクトル
3. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の 3 つのベクトル

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

上の問に解答し，

5 月 6 日（金）　16:40 （時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，2 枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

先週のレポートの略解

問 1： ともかくやるだけ．

(i) 法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = (1, 2, -1)$ で点 $\boldsymbol{x}_0 = (3, 1, 1)$ を通るから，平面の方程式は $\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$ となるはずだ．これを成分で書き下すと

$$(x - x_0) + 2(y - y_0) - 1(z - z_0) = 0 \qquad \text{つまり} \qquad x + 2y - z = x_0 + 2y_0 - z_0 = 4$$

となる．

(ii) 平面 $2x+y-z=0$ に平行ということは，法線ベクトルが $(2,1,-1)$ ということだ．後は (i) と同様に計算して

$$2x+y-z=1$$

が答え．別解としては答えが $2x+y-z=d$ の形になることを用いて —— この形になるというところで，法線ベクトルが $(2,1,-1)$ であることを使った —— 点 $(1,2,3)$ が平面上にあるように $d=2\times1+2-3=1$ と定めてもよい．

(iii) 地道には平面の方程式を $ax+by+cz=d$ の形に仮定して，この平面上に 3 点が存在する条件，つまり

$$\begin{cases} 2a-b-c=d \\ a+2b-2c=d \\ 2a+b-2c=d \end{cases}$$

を解けば良い．答えは一意には決まらないが，(d を任意の数として)

$$a=-d, \qquad b=-d, \qquad c=-2d$$

と求まる．$d=0$ ならすべてゼロになって意味のない結果になるから，$d\neq0$ を考えると，平面の方程式は

$$-d\,x+(-d)\,y+(-2d)\,z=d \qquad \text{つまり} \qquad x+y+2z=-1$$

となる．

（別解）ベクトルの外積 $\vec{AB}\times\vec{AC}$ を計算すれば，この平面の法線ベクトルが一発で求まるから，後は (i) のように解けば良い．

問 2： (iii) の方が簡単だから，こっちから行こう．この場合，平面上の 3 点 A,B,C が与えられているから，

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_A=s\vec{AB}+t\vec{AC} \qquad (s,t\in\mathbb{R})$$

がパラメーター表示の式である（$\boldsymbol{x}_A$ は点 A の位置ベクトル）—— もちろん，この場合，$\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ が平行であってはいけないが，これは大丈夫．具体的に成分で書くと

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} \qquad s,t\ \text{は任意の実数}$$

が一例である．もちろん，他にもいろいろな表し方はある．これらはすべて，点 A,B,C のいろいろな取り方に対応している．$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+s\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{q}$ と書いたときの $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ の取り方の例は以下の通り：

$$\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}4\\6\\-5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}5\\15\\-9\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

(i) ともかく，法線ベクトルに直交する（平行でない）ベクトルを２つ，求めよう．そのために，平面上の３点を適当に求める．題意から $A(3,1,1)$ が平面上にあることはわかっている．これ以外に（例えば $y=0,z=1$ や $y=1,z=0$ の時の x 座標を，問 [1] の (i) の平面の方程式に代入して求めるつもりになって）$B(2,1,0)$ と $C(5,0,1)$ も平面上にある．更にこの時，$\vec{AB}=(-1,0,-1)$ と $\vec{AC}=(2,-1,0)$ は平行ではない．よって，$\boldsymbol{x}_0=(3,1,1)$ として

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0=s\vec{AB}+t\vec{AC}, \qquad \text{つまり} \qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad s,t\ \text{は任意の実数}$$

がパラメータ表示（の一例）である．もちろん，他にもいろいろな表し方はある．これらはすべて，点 A,B,C のいろいろな取り方に対応している．$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+s\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{q}$ と書いたときの $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ の取り方の例は以下の通り：

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix},$$

実はこれらはすべて，皆さんのレポートにあったものばかりである（これだけ色々出て来たということは，自力でやった人が一杯いたということですね．大変よろしい．）これらはすべて互いに平行でないから，好きなもの２つを選べば良い．

（別解）実は (i), (iii) ともに，既に平面の方程式を求めているのだから，適当に $x=s,y=t$ などとおいて，z を s,t で表せばパラメーター表示になる．この方法が一番簡単だろう．例えば (iii) なら $x+y+2z=-1$ が平面の方程式だから，$x=s,y=t,z=-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$ （s,t は任意の実数）というのが一つの解である．

5 月 9 日：今日は線形独立（一次独立）と基底を中心にやります．
5/16 は創立記念日でお休みです．

第 3 回レポート問題： 1 次独立などについての問題です．レポート問題は「その題材に関して典型的な問題を 1 個だけ」に限定して出しています．言うまでもないことですが，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問 5： ベクトル $\boldsymbol{a}, ..., \boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{d} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする（問 [3] と同じ；$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{e}$ とした）．以下のベクトルの組が 1 次独立か 1 次従属かを判定せよ．また，以下のベクトルの組の中で，$\mathbb{R}^3$ の基底になっているものをすべて挙げよ．

1. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の 3 つのベクトル
2. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の 3 つのベクトル
3. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の 3 つのベクトル
4. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ の 4 つのベクトル

問 6*： 2 次以下の多項式の作るベクトル空間を V とし，そのベクトル $\boldsymbol{a}, \ldots, \boldsymbol{e}$ を

$$\boldsymbol{a} = 1, \qquad \boldsymbol{b} = 2x + 1, \qquad \boldsymbol{c} = (x+1)^2, \qquad \boldsymbol{d} = x^2$$

とする．以下のベクトルの組が 1 次独立か 1 次従属かを判定せよ．また，以下のベクトルの組の中で，V の基底になっているものをすべて挙げよ．

1. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の 3 つのベクトル
2. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の 3 つのベクトル
3. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の 3 つのベクトル

問 7*： 実数値関数 1（恒等的に 1 である関数），$\cos x$, $\cos(2x)$, $(\cos x)^2$ の線型結合の全体を V とし：

$$V := \{\alpha + \beta\cos x + \gamma\cos(2x) + \delta(\cos x)^2 \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$$

この V の元に対して，普通の関数としての「和」と実数倍（スカラー倍）を導入する．また，この V の特別な元として

$$\boldsymbol{a} = 1, \quad \boldsymbol{b} = \cos x, \quad \boldsymbol{c} = \cos(2x), \quad \boldsymbol{d} = (\cos x)^2$$

を定義しておく（V は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の線型結合の全体である）．以下の問いに答えよ．

1. V が線型空間になっていることを示せ．
2. $\boldsymbol{d}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で表すことは可能か？可能なら，具体的な表し方を答えよ．
3. V の基底をひとつ，求めよ．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

上の問に解答し，

5 月 19 日（木）14:00（時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

先週のレポートの略解

問 3： ともかくやるだけ．

1. 線型結合として表す，事の定義をそのまま書いてみると，c_1, c_2 を適当なスカラーとして

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b}$$

ということである．これを成分毎に書くと

$$c_1 + 2c_2 = 1, \qquad c_1 - c_2 = 0, \qquad c_1 + 3c_2 = 0$$

の連立方程式になるが，この 3 つを満たす c_i は存在しない．つまり，$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の線型結合として表す事はできない．

2. うえと同様にして解くと，今度は

$$\boldsymbol{x} = c_2\boldsymbol{b} + c_3\boldsymbol{c} \qquad \Longrightarrow \qquad 2c_2 = 1, \quad -c_2 + c_3 = 0, \quad 3c_2 + c_3 = 0$$

で，やはりこの 3 つを満たす c_i は存在しない．つまり，$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合として表す事はできない．

3. うえと同様にして解くと，今度は

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a} + c_3\boldsymbol{c} + c_4\boldsymbol{d} \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 + c_4 = 1, \quad c_1 + c_3 - c_4 = 0, \quad c_1 + c_3 + c_4 = 0$$

を満たす c_j が欲しい訳だが，これは $c_1 = -c_3 = 1, c_4 = 0$ で満たされる．ので，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + (-1)\boldsymbol{c} + 0\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}$$

が答え．実際に，上の右辺を計算すると $\boldsymbol{x}$ になってる．

なお，このような問の場合，真ん中のように $+0\boldsymbol{d}$ を付けてもらえると，こちらとしても「この人はちゃんとわかってる」と理解できて良いのではあるが，正直，一旦わかってしまえばこんな項はないのと同じだから，右辺のように書いても良い．

問 4： （講義終了直後に訂正したように，3 は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の誤りでした．申し訳なし．）解き方は問 [3] と全く同じです.「線型結合」などの言葉を使ってはいますが，高校（中学？）から皆さんがやって来たことの言い換えに過ぎません．

1. 線型結合として表せ，なので

$$\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$$

という形に書けばよろしい．これは

$$x^2 + x + 1 = \alpha + \beta(x-1)$$

という事であるが，右辺には x^2 がないから，これは絶対に無理．つまり，$\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の線型結合として表す事は不可能．

2. 同じようにして解くと，今度は

$$\boldsymbol{p} = \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} \qquad \text{つまり} \qquad x^2 + x + 1 = \beta(x-1) + \gamma(x-1)^2 = \gamma x^2 + (\beta - 2\gamma)x + (-\beta + \gamma)$$

ということである．係数を比較して

$$\gamma = 1, \beta - 2\gamma = 1, -\beta + \gamma = 1$$

なら必要充分だが，これは無理！つまり，$\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}$ の線型結合として表す事は不可能．

3. 同様に解くと，

$$\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} \qquad \text{つまり} \qquad x^2 + x + 1 = \alpha + \beta(x-1) + \gamma(x-1)^2 = \gamma x^2 + (\beta - 2\gamma)x + (-\beta + \gamma + \alpha)$$

ということで，今回は $\gamma = 1, \beta = 3, \alpha = 3$ という解がある．つまり

$$\boldsymbol{p} = 3\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$$

の形に，線型結合として表せる．

（注意とお願い）

- $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で表す，という場合，どれかのベクトルの係数が 0 でも構いません．例えば，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ の場合，$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の係数が 0 と思えば良いので，$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合になっています．
- **検算できる場合には検算**して下さい．今回の問題では，問 3 と問 4 のそれぞれ 3 は線型結合で書いたものを実際に足してみて，求める左辺のベクトルになるかどうか，検算が可能です．検算できるところでは確実に検算する癖を身につけておかないと，将来の卒業研究や社会に出てから，非常に困るはずです．そのような理由から，この講義の試験では,「検算できるのに間違った答えを堂々と書いている」場合には厳しく対応 — 場合によっては部分点なし — しますので，そのつもりでね．
- レポートを提出する際には，A4 の紙を使って下さい．また，名前と学生番号は忘れずに書いて下さい．

5 月 23 日：今日は基底，次元，部分空間です．
2 週間か 3 週間後に中間試験の予定です．

第 4 回レポート問題： 部分空間や次元などについての問題です．レポート問題は「その題材に関して典型的な問題を 1 個だけ」に限定して出しています．言うまでもないことですが，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問 8： ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の成分に対して，以下のように制限を付けて，$\mathbb{R}^3$ の部分集合 W を作る．この W が $\mathbb{R}^3$ の部分空間になっているかどうかを考えて，部分空間になっていないものについては「なぜ部分空間でないのか」の理由を答えよ．また，部分空間になっているものについては，その基底を一つ，答えよ．

(1) W は $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ を満たすような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体．

(2) W は $x_1 + x_2 - x_3 = 1$ を満たすような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体．

(3) W は $x_1 - (x_2)^3 = 0$ を満たすような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体．

(4) W は x_1 が整数であるような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体．

(5) W は $x_1 = 0$ または $x_2 = 0$ であるような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体．

問 9*： 実数上で定義された関数の全体を V とし，この V に通常の関数としての「和」と「スカラー倍」を定義する（前回の問 7 と同じように）．念のために書けば，f, g 二つの関数の和は

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{つまり，和 } f+g \text{ の } x \text{ での値は } f(x)+g(x)$$

スカラー倍は

$$(kf)(x) = kf(x) \qquad \text{つまり，スカラー倍 } kf \text{ の } x \text{ での値は } f(x) \text{ の } k \text{ 倍}$$

と定義するのである．この V が線型空間になることは認めて（できれば，各自で確かめるのが望ましい），以下のように定義した集合 W が，V の部分空間になっているか否かをそれぞれ考察せよ．更に，(3),(4),(5) が部分空間になっている場合には，その基底を一組，与えよ．

(1) W は $f(2) = 0$ を満たすような $f \in V$ の全体．（この問題では基底は与えなくて良い）
(2) W は $f(0) = 1$ を満たすような $f \in V$ の全体．（この問題では基底は与えなくて良い）
(3) W は 4 次以下の x の多項式の全体．
(4) W $f(2) = 0$ となる，4 次以下の x の多項式の全体．
(5) W は $\cos x, \cos(2x), \cos(3x), (\cos x)^2, (\cos x)^3$ の線形結合の全体．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

上の問に解答し，

5 月 27 日（金）15:00（時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，2 枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

——— 先週のレポートの略解 ———

問 5： ともかくやるだけ．

1. 一次独立の判定条件，一番簡単なのは，

$$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} = 0$$

を x, y, z について解いてみて，ゼロ以外の解があるかどうかを調べる事だ．成分毎に書くと

$$x + 2y = 0, \qquad x - y + z = 0, \qquad x + 3y + z = 0$$

の連立方程式になるが，この 3 つを満たすのは $x = y = z = 0$ のみである．よって，この 3 つは**一次独立**である．

次に，これが基底になっているか，を調べる．これは $\mathbb{R}$ の任意のベクトルを線型結合で表せるか否か，で判定する．具体的には任意の X, Y, Z に対して，

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$$

となるような x, y, z （大文字と小文字を区別）があるか否か，である．これを成分で書くと

$$x + 2y = X, \qquad x - y + z = Y, \qquad x + 3y + z = Z$$

であり，この解は

$$x = X + \frac{Y - Z}{2}, \quad y = \frac{Z - Y}{4}, \quad z = -X + \frac{Y + 3Z}{4}$$

のように，ちゃんと存在する．つまり，$\mathbb{R}^3$ の任意の元を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で書けることがわかった．

以上より，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ は (1) 一次独立で，(2) $\mathbb{R}^3$ の任意の元を線型結合で書ける，ために $\mathbb{R}^3$ の基底になっている．

2. うえと同様にして解くと，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ は一次独立で，かつ，$\mathbb{R}^3$ の任意の元をそれらの線型結合で書けることがわかる．よって基底である．

3. うえと同様にして解くと，今度は

$$y = -x, \quad z = -2x \qquad (x \text{ は任意})$$

と云う解がある．従って，$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ は一次独立ではない．一次独立ではないと決まった時点で，これが $\mathbb{R}^3$ の基底でないことはわかる．

（実際には，すべての $\mathbb{R}^3$ の元を $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の線型結合で表すこともできないこともすぐにわかるが.）

4. うえと同様にして解くと，今度は

$$y = x, \quad z = x, \quad u = -4x \qquad (x \text{ は任意})$$

と云う解がある．従って，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ は一次独立ではない．一次独立ではないと決まった時点で，これが $\mathbb{R}^3$ の基底でないことはわかる．

（この場合，すべての $\mathbb{R}^3$ の元を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ の線型結合で表すことはできる.）

> 解答例に示したように，あるベクトルの組が基底であるというには，(1) そのベクトルの組が一次独立である事，(2) すべてのベクトルをそのベクトルの組の線形結合で書ける事，の両方が必要だ．次の問 6 でもそうだったが，上の (2) の方の理由がちゃんと書けていた人は全体の 1/4 もいなかったと思う．

（更に補足）今日の講義でやるように，$\mathbb{R}^3$ の基底は必ず 3 つのベクトルからなる．更に，この 3 つのベクトルが一次独立なら，自動的に基底になってる事もわかる（ただし，証明は今学期の最後の辺りで）．これらの事実を使えば，一次独立性の判定をした時点で，1 と 2 の場合は基底になっていて，3,4 の場合は基底になってないことがわかる．ただし，今の時点ではこのような事実はまだやっていないのだから，それは前提にしないで解答してほしい.（もし，このような事実を使うのなら，その旨をはっきり述べるべきである.）

問 6： 解き方は問 5 と同じである．

1. 一次独立か，だから

$$\mathbf{0} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$$

を解けば良い．これは

$$\alpha + \beta(2x + 1) + \gamma(x + 1)^2 \equiv 0$$

が恒等的に成り立つか？ということ．これは

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad 2\beta + 2\gamma = 0, \quad \gamma = 0$$

ということで，この解は明らかに $\alpha = \beta = \gamma = 0$ しかない．よって，一次独立である．

次に基底になってるか否かは任意の係数 p, q, r に対して

$$px^2 + qx + r = \alpha + \beta(2x + 1) + \gamma(x + 1)^2$$

と書けるような α, β, γ が求まるか，ということ．これを解いてみると，

$$\gamma = p, \qquad \beta = -p + \frac{q}{2}, \qquad \alpha = r - \frac{q}{2}$$

となって，確かに α,β,γ が求まる．よって，基底になっている．
2. 同じようにして解く．今度は

$$0=\beta(2x+1)+\gamma(x+1)^2+\delta x^2$$

を満たさせたい．この場合は

$$\gamma=-\beta,\quad \delta=\beta \qquad (\beta\text{は任意})$$

と云う解があるので，一次従属である．また，一次従属だから，基底ではない．
3. 同様に解くと，今度は一次独立，かつ基底である事がわかる．

前問と同様に，この場合も，元の空間の次元が 3 なので，3 つの独立なベクトルをもってくれば，これは基底になっている．

問 7：

1. 定義に従って，やるしかないです．
まず,「和」と「スカラー倍」が定義できてる事を確かめる．そのために，V の任意の 2 元として

$$\boldsymbol{x}=\alpha_1+\beta_1\cos x+\gamma_1\cos(2x)+\delta_1(\cos x)^2,\qquad \boldsymbol{y}=\alpha_2+\beta_2\cos x+\gamma_2\cos(2x)+\delta_2(\cos x)^2$$

をとると，その和は（問題に普通に関数としての和を考えるとあるから）

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}&=\alpha_1+\beta_1\cos x+\gamma_1\cos(2x)+\delta_1(\cos x)^2+\alpha_2+\beta_2\cos x+\gamma_2\cos(2x)+\delta_2(\cos x)^2\\&=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)\cos x+(\gamma_1+\gamma_2)\cos(2x)+(\delta_1+\delta_2)(\cos x)^2\end{aligned}$$

となり，これは各係数が実数であるから，V の元である．つまり,「和」は定義できている．
同様に，スカラー倍も，実数 k に対して

$$k\boldsymbol{x}=k\Big\{\alpha_1+\beta_1\cos x+\gamma_1\cos(2x)+\delta_1(\cos x)^2\Big\}=(k\alpha_1)+(k\beta_1)\cos x+(k\gamma_1)\cos(2x)+(k\delta_1)(\cos x)^2$$

となるが，これも V の元である．つまり,「スカラー倍」も定義できている.（**「和」や「スカラー倍」が定義できてると言ってるが，ここは「和」や「スカラー倍が」<u>V の元として</u> 定義できてる，ということである．つまり,「和」や「スカラー倍が」V の元である事がもちろん，要求されている**.）

さて，これから更に，このように定義した「和」や「スカラー倍が」線型空間の定義の 8 つの性質を満たす事を示さなければならない．ほとんどアタリマエに見えるかもしれないが，本当はこれはやるべきこと．
簡単に見て行くと

- 加法の交換則，結合則，加法とスカラー倍の分配則，スカラー倍の結合則，および $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$，はすべて，普通の実数の交換則，結合則，分配則から導かれる（なぜなら，関数としての和などは，要するに「各 x における値」同士を足したり，スカラー倍したりするものなので，x を止めて考えれば普通の数の演算をやってるにすぎないなら）．
- 問題は $\mathbf{0}$ などの存在である．まず，$\mathbf{0}$ に相当するのは,「恒等的にゼロである関数」である．これはもちろん，V の元である．
- 加法の逆元 $-\boldsymbol{x}$ は，単に $\boldsymbol{x}$ の各係数の符号をひっくり返したやつである．

以上で 8 つの性質すべてをチェックできたので，V は確かに線型空間になっているといえる．

> ほとんどの人が「和とスカラー倍が定義できてる」から線型空間，と答えていたが，これでは全く足りない.「和とスカラー倍が定義できてる」のはあくまで必要条件であって,「それらが線型空間の定義の 8 つの性質を満たす事」をきちんと示さないと行けない．

2. 線型結合で書けるかどうか，やってみれば良い．つまり，

$$\alpha+\beta\cos x+\gamma\cos(2x)=(\cos x)^2$$

となるような α,β,γ があるか否かである．発見法的には，$x=0,\pi/2,\pi$ などを入れて，出てくる条件を連立して解いたらよい．また，ちょっと見通しの良い人は，倍角の公式

$$\cos(2x)=2(\cos x)^2-1$$

を思い出して，

$$(\cos x)^2=\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$$

としてもよい．こんな訳で，線型結合で書けるわけ．
3. V の任意の元は $\alpha+\beta\cos x+\gamma\cos(2x)+\delta(\cos x)^2$ の形をしているが，上から

$$\alpha+\beta\cos x+\gamma\cos(2x)+\delta(\cos x)^2=\Big(\alpha+\frac{\delta}{2}\Big)\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\Big(\gamma+\frac{\delta}{2}\Big)\boldsymbol{c}$$

と書けるので，V の任意の元を $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の線型結合として表す事は可能．
更に，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ は一次独立である．なぜなら，

$$\alpha+\beta\cos x+\gamma\cos(2x)\equiv 0$$

を解きたいのだが，$x=0,\pi/2,\pi$ くらいでやってみると

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\quad \alpha-\gamma=0,\quad \alpha-\beta+\gamma=0$$

となり，この解は $\alpha=\beta=\gamma=0$ しかない．
以上から，(1) 一次独立であり，かつ (2)V のすべての元をその線型結合で表せる，ので，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$ は V の基底である．

5 月 30 日の連絡：2 週間後の 6/13（月）のこの授業時間に中間テストをする予定です．
場所は通常と異なり，2308 です．
範囲はこれまでやった所全部，ですが，ほとんどの問題は 2 章のベクトル空間（ベクトル空間とは，線形独立，従属，基底，次元，部分空間など）です．多項式や関数の空間には困難を感じてる人も多いようですから，半分以上は数ベクトルの話にします．(数ベクトルの問題がちゃんととれれば，中間試験の合格点には達する．)
今日のキーワード：線型空間の座標表示，線型空間のまとめ

第 5 回レポート問題：

部分空間と基底についての念押し問題です．言うまでもないことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問 10： ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ の成分に対して，以下のように制限を付けて，$\mathbb{R}^4$ の部分集合 W を作る．それぞれの場合，W は $\mathbb{R}^4$ の部分空間になっているが，(1) その次元は何か？また，(2) その基底を一つ，答えよ．

(a) W は $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$ を満たすようなベクトルの全体．

(b) W は $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$ かつ $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$ を満たすようなベクトルの全体．

(b) については，連立方程式を解くのがちょっと大変に思えるかもしれないが，地道に変数を一つずつ消去すれば良い（もうちょっと効率の良いやり方は今学期の最後にやります）．

問 11： 実数上で定義された関数の全体を V とし，この V に通常の関数としての「和」と「スカラー倍」を定義する（前回の問 7, 問 9 と同じように）．この V が線型空間になることは認めよう．以下のように定義した集合 W は V の部分空間になっているが（本当はこの事実も各自で確かめるのが望ましい），それぞれの次元と基底を求めよ．(基底は無数にあるから，一例を挙げれば良い．) なお，次元が無限大になる場合には，基底を挙げる必要はない．「○○の理由で，次元は無限大である」と答えればよい．

(1) W は 偶関数の全体．つまり，$f(x) = f(-x)$ となるような $f \in V$ の全体．

(2) W は (i) x の 4 次以下の多項式で，かつ (ii) 偶関数になっているもの，の全体（つまり，条件 (i)(ii) を両方満たしているものの全体）．

(3) W は (i) x の 4 次以下の多項式で，かつ (ii) 偶関数になっているもの，かつ (iii) $f(0) = 0$ となっているもの，の全体（つまり，条件 (i)(ii)(iii) のすべてを満たしているものの全体）．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：

上の問に解答し，

　6 月 3 日（金）　15:00（時刻は 24 時間制）までに，
　全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，2 枚以上にわたる場合は何らかの方法（ゼムクリップは不可）で綴じてくだされ．

先週のレポートの略解

今回のレポートには皆さん，かなり苦戦していましたね．特に，部分空間と基底で手こずっているようです．5/30 には復習を兼ねてもう少し説明します．講義の始めの方で断ったように，スペースを省略するため，縦ベクトルを ${}^t(x, y, z)$ のように書いたところがあります．

問 8： 部分空間の条件をすべてチェックする．とは言っても，「和」と「スカラー倍」が自分自身の中に入ってるかどうか，を見るだけだから，簡単．

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ が W の元である場合，条件から

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0, \qquad y_1 + y_2 - y_3 = 0$$

が共になりたつ．

2 つの和は，もともとのベクトルの足し算によって定義されていて $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ であるが，これが W の元か否かが問題．それを確かめるには，W の元である条件を確かめる．つまり，

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) - (x_3 + y_3)$$

がゼロになるか否か，ということだ．この場合，

$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)-(x_3+y_3)=x_1+x_2-x_3+y_1+y_2-y_3=0+0=0$$

で確かに成り立つから，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in W$ であって，メデタシメデタシ．

次にスカラー倍を考える．k をスカラーとして，$k\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}kx_1\\kx_2\\kx_3\end{bmatrix}$ が W の元であるか否かを考える．チェックすべき条件は

$$kx_1+kx_2-kx_3$$

がゼロか否か，ということであり，これも

$$kx_1+kx_2+kx_3=k(x_1+x_2-x_3)=0$$

でなりたつ．よって，和とスカラー倍が共に W 内にあるから，W は線型部分空間になっている．

最後に基底を求める．基底の定義は，しつこいけど,「一次独立」かつ「すべての元をそれらの線形結合で書ける」ことだった．条件

$$x_1+x_2-x_3=0$$

があるから，常に $x_3=x_1+x_2$ でないといけない．つまり，W の任意の元は

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_1+x_2\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

の形に書ける．つまり右辺の二つのベクトルの線型結合で書ける．

更に，右辺の二つのベクトルが独立であるのは（比例しないから）明らか．よって，この二つのベクトルが基底を作っている．つまり，基底の例は

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

もちろん，他にもいくらでも基底の例はある．以下のベクトルの 2 本をとってきたら，どれでも基底になっている：

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \ldots\ \text{（こんな感じでいくらでもあります）}$$

(「2 本とって来たら基底になっている」ことは，その 2 本が独立である限りは，この部分空間の次元が 2 であることから保証される.)

非常に重要な注意：部分空間 W の基底は，その部分空間 W に入ってるベクトル から作る必要がある —— 定義を参照．かなりの人が，W に入っていないベクトルを持って来て「基底」としていた．そんな事したら,「部分空間を過不足なく表す」役に立たないから，全く無意味だよ．

（注意）「基底が与えられれば，それが基底である事は納得できるが，どうやって基底を見つけたら良いかわからない」との質問がありました．これはまあ，無理もないことで，ある程度の勘は必要です．が，一応，一般的な攻め方を書いておくと，

- 考えている空間を十分に張れるだけのベクトルを用意して，余分なベクトルを取り去って行く方法
- 逆に，少数の一次独立なベクトルから出発して，足りないベクトルを足して基底にする方法

があります.（まあ，すぐにおもいつく二つの方法を書いただけですが...）どちらが良いかは場合によるでしょう．この小問 (1) では十分な数のベクトルを用意して，それらが独立であることを示しました．

(2) 第一問をかなり詳しく説明したので，以下は簡単に行きます．(2) の W は部分空間ではありません.（理由）「和」や「スカラー倍」が W の外に出てしまうから．これは

$$x_1+x_2-x_3=1,\qquad y_1+y_2-y_3=1$$

から

$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)-(x_3+y_3)=x_1+x_2-x_3+y_1+y_2-y_3=1+1=2,$$
$$kx_1+kx_2+kx_3=k(x_1+x_2-x_3)=k$$

となることから明らか.（反例を一個だけ挙げるなら，例えば，${}^t(1,0,0)$ を考えれば良い.）なお，スカラー倍が W の外に出る，というのは厳密ではありません．正しくは「外に出る事もある」というべき.（$k=1$ なら外に出ないからね.）

(3) 部分空間ではない．まあ，条件が $x_1=(x_3)^2$ であって，これは放物線（曲がってる !!）から無理なのは直感的に明らか．より説得力を出すには,「和」と「スカラー倍」が一般には W に入らないことを示せば良い．例えば，${}^t(1,0,1)$ 同士の「和」は ${}^t(2,0,2)$ だが，これは W の元ではない．

(4) 部分空間ではない.「和」は W に入る．しかし，整数ではない数による「スカラー倍」は成分が一般には整数にならないから，W に入らない（ことが多い）.

(5) 部分空間ではない.「スカラー倍」は W に入る．しかし,「和」がダメである．例えば，${}^t(0,1,0)+{}^t(1,0,0)\notin W$.

（重要な注意） 高校でやってるはずなのだが「または」の使い方がおかしい人が散見された．数学で「$a = 0$ または $b = 0$」というのは，(1)$a = 0, b \neq 0$, (2) $a \neq 0, b = 0$, (3) $a = b = 0$ の 3 通りのどれでも指す．(要するに，a, b の少なくとも一つがゼロということ．) こんな基本的なところでは間違わないで下さいね．

なお，上の例ほど罪は深くないと思うが,「$x_1 = 0$ または $x_2 = 0$」を変に場合分けして，別々の W を設定してしまった人もある程度いた．問題を素直に読めば,「$x_1 = 0$ または $x_2 = 0$」を満たしているベクトルの全体を W とする（考える W は一つだけ）なのは明らかだと思うのだが...

問 9：

(1) 部分空間である．(証明) $f, g \in W$ の場合，$f(2) = g(2) = 0$ が成り立つ．その和 $h = f+g$ は $h(2) = f(2)+g(2) = 0+0 = 0$ で条件をみたす．またスカラー倍 $p = kf$ も $p(2) = kf(2) = k \times 0 = 0$ でやはり条件を満たす．つまり和とスカラー倍が W の中で定義できてるので部分空間．

（注意）特殊な例（例えば $f(x) = (x-2)^4$ と $g(x) = (x-2)^3$）のみを考えて，和やスカラー倍が W 内に入ってる，だから部分空間だ，とやった人がかなりいた．特殊な例をいくらやっても，証明にはなりません．**（もちろん，問題を解くとっかかりとして特殊な例から始めるのは非常に有効です．）**

(2) これは部分空間ではない．上と同じように考えると $h(0) = 1+1 = 2$ でダメ．スカラー倍も $p(0) = k \times 1 = k$ でダメ．

（注意）部分空間ではない，ことを示すには反例を一つ挙げれば十分です．上では一応，一般的にダメなことを示していますが,「$f(x) = g(x) \equiv 1$ のときに $h(x) \equiv 2 \neq 1$ で和がダメ」と言っても十分．

(3) これは部分空間である．4 次以下の多項式を足したら，やはり 4 次以下の多公式だから和は W 内に入ってる．スカラー倍しても 4 次以下の多項式ではあるから，スカラー倍も OK. 基底の例は $\langle 1, x, x^2, x^3, x^4 \rangle$. (詳細は省略するが，この 5 つの単項式が独立な事は明らか．また，4 次以下の多項式はもちろん，この 5 つの単項式の線型結合で書ける．)

(4) これは上の小問 (1) と小問 (3) の組み合わせ（それぞれの W の共通部分）．これが部分空間であるのは，(1) と (3) の両方の条件が成り立つから OK.

問題は基底であるが，(3) の $1, x$ などはダメである（なぜなら，W の元ではない）．ので，$f(2) = 0$ という条件をちゃんと考える必要がある．さて，**多項式**f が $f(2) = 0$ ということは，f が $(x-2)$ で因数分解できる，ということだ．つまり，W のすべての元は $(x-2)$ を因数に持つ形で因数分解できて，

$$f(x) = (x-2)g(x)$$

の形に書けるはず．ここで，f が 4 次以下なので，g は 3 次以下の多項式（ここまでは必要条件）．

逆に，上の形で g が 3 次以下の多項式なら，絶対に W の元になっている（なぜなら，こんな f は 4 次以下であるし，$f(2) = 0$ は自動的に O.K.）．よって，うえの形に書けることが $f \in W$ の必要十分条件なのだ．

というわけで，あとは 3 次以下の多項式 g をどう表すか，を考えればよいが，それは $1, x, x^2, x^3$ で書く事ができる．ので，前の因子 $(x-2)$ とあわせて，

$$\Big\langle (x-2), (x-2)x, (x-2)x^2, (x-2)x^3 \Big\rangle$$

が基底の一つである．(うえの 4 つの式が独立であることは一応，確かめたほうがよいかもしれないが，次数が違うものの集まりだから，これは明らかでしょう —— でも一度は自分で確かめた方が良い．)

（注）基底の別の例として $\Big\langle (x-2), (x-2)^2, (x-2)^3, (x-2)^4 \Big\rangle$ もある．こっちの方が形としてはきれいだね．($x-2 = y$ と思って，y の多項式を探すつもりになれば，この形に自然にたどり着くだろう．)

(5) 部分空間であることは,「和」と「スカラー倍」が W 内にある事を確かめれば良く，前回のレポートに酷似しているので略．

問題は基底だが，ともかく独立なベクトルを探してやる必要がある．「倍角の公式」「3 倍角の公式」を使ってできるだけ似た形のものにそろえよう．

$(\cos x)^n$ の形にそろえてみよう．高校の時に習った

$$\cos(2x) = 2(\cos x)^2 - 1, \qquad \cos(3x) = 4(\cos x)^3 - 3\cos x$$

を思い出すと，$\cos(2x), \cos(3x)$ は $1, \cos x, (\cos x)^2, (\cos x)^3$ の線型結合で書ける事がわかる．この 4 つが独立であることも

$$c_0 + c_1 \cos x + c_2(\cos x)^2 + c_3(\cos x)^3 \equiv 0$$

を解けば，c_j がみんなゼロであることからわかる．

そこで 1 が W の元である事がわかれば（ここ重要！），基底の一つとして $\langle 1, \cos x, (\cos x)^2, (\cos x)^3 \rangle$ がとれることがわかる．さて，1 が W の元であるか否かは，例えば倍角の公式を変形して $1 = 2(\cos x)^2 - \cos(2x)$ と書けば，(このような線型結合で書けるのだから）W の元であることがわかる．

もちろん，基底の例としては他にもいろいろある．他の自然な取り方としては $\Big\langle 1, \cos x, \cos(2x), \cos(3x) \Big\rangle$ があるが，別に 1 を入れる必要はない．例えば，$\Big\langle (\cos x)^2, \cos x, \cos(2x), \cos(3x) \Big\rangle$ なども立派な基底の例である．

6 月 6 日の連絡：1 週間後の 6/13（月）のこの授業時間に中間テストをする予定です．**場所は通常と異なり，2308 です．**

「線型空間の定義」は試験問題の最初に載せます．それ以外の事項はもちろん，皆さんの頭の中が頼りです．

範囲はこれまでやった所全部，ですが，ほとんどの問題は 2 章のベクトル空間（ベクトル空間とは，線形独立，従属，基底，次元，部分空間など）からです．
多項式や関数の空間には困難を感じてる人も多いようですから，半分以上は数ベクトルの話にします．(数ベクトルの問題がちゃんととれれば，中間試験の合格点には達するということ.)

今日のキーワード：線型空間のまとめと行列など
なお，今日出題のレポートはありません．

先週のレポートの略解

今回はできていた人が前回よりも増えました．

問 10： (a) $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$ ということは，$x_4 = x_1 + x_2 + x_3$ さえ満たせば，x_1, x_2, x_3 は任意で良い，ということだ．つまり，W の任意の元は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad x_1, x_2, x_3 \text{ は任意}$$

と書ける．右辺に出ている 3 つのベクトルは一次独立である（注意：試験ではなぜ線型独立か，ある程度の理由や計算も述べる事！）．また，上に示したように，この線型結合で W の任意の元を表せる．従って，この 3 つのベクトルは基底になっている．よって，次元は 3，基底の一つは

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

(b) $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$ かつ $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$ を解くと，

$$x_2 + x_3 = 0 \quad \text{かつ} \quad x_1 - x_4 = 0 \qquad (\text{これらを満たす限り}, x_j \text{ は任意})$$

となる．上の 2 つが同値なのは，元の 2 式を足し引きすると新しい 2 式になり，逆に新しい 2 式を仮定すれば元の 2 式が成り立つことからわかる．このような連立方程式の解き方は，もっと系統的に，後でやります．

従って，W の任意の元は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad x_1, x_2 \text{ は任意}$$

と書ける．よって次元は 2，基底の一つは

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

である．

（注）小問 (a) の W を W_a，小問 (b) の W を w_b と書くと，W_b は W_a の部分空間になっている（why?）．このような場合，W_a の基底をうまくとってやると，その基底を作るベクトルから何個かを取り除いて W_b の基底を作ることができる．別の言い方をすると，W_b の基底を作るベクトルに何個かを付け加えて W_a の基底を作ることができる．今の場合，W_a の次元が 3，W_b の次元が 2 であるから，付け加えるベクトルは 1 個である．

実際，上で示した (b) の基底にベクトル ${}^t(0, 0, 1, 1)$ を付け加えて

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

を作ってみると，これは W_a の基底になっていることがわかる（基底になっていることはどうやったら示せるか？）．

問 11： 部分空間になっていることのチェックは略．

(1) 次元は無限大なので，基底は挙げにくい．次元が無限大の理由は，V の元 $1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots, x^n$ がすべて独立だからである．ここで n は任意なので，結局，有限個のベクトルをとって，V の元を園線型結合で表すことはできない．

(2) まず，(i) の条件を満たす多項式は $1, x, x^2, x^3, x^4$ の線型結合で書ける．つまり，$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ の形をしている（a_j は任意の実数）．ここで (ii) の条件も課すと，偶関数であるとは $f(x) \equiv f(-x)$ ということなので，これから $a_1 = a_3 = 0$（a_0, a_2, a_4 は任意）となる．つまり，題意を満たすのは $1, x^2, x^4$ の任意の線型結合である．よって基底の一つは $\langle 1, x^2, x^4 \rangle$ で，次元は 3.

(3) 上の問で，条件を満たす必要条件として $f(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4$ というのが出ていた．これに更に (iii) の条件を課すと，$a_0 = 0$ となる．つまり，題意を満たすのは x^2, x^4 の任意の線型結合である．よって基底の一つは $\langle x^2, x^4 \rangle$ で，次元は 2.

重要な注意： 前回に注意したにもかかわらず，今回も基底の書き方がおかしい人がかなり，いました．基底というのは，あくまで，**考えている線型空間のベクトルの集まり**です．以下の 2 つの例は，その意味で，意味を持ちません．

(1) 問 10 で基底を $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ と書いた例．問 10 で考えているのは，$\mathbb{R}^4$（成分が 4 つある，縦ベクトルの空間）です．だから，基底はこのような縦ベクトルの集まりになるはず．一方，$\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ は単に数 x_1, x_2, x_3 の集まりですよ．

まあ，言いたい事はわかります．$\boldsymbol{x}$ を線型結合の形で書いたので，x_1, x_2, x_3 がかかっているベクトルを書きたかったんですよね．でも，上に述べたように，この書き方は酷すぎる．

(2) 問 11 で，前回に引き続き $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ などと書いた例．問 11 では「関数の集合」や「多項式の集合」を考えているのだから，今度は基底を作るベクトルの一つ一つは多項式や関数であるべきで，上のような縦ベクトルが入る事はあり得ません．

これも言いたい事はわかります．もともとの関数の空間に $\langle 1, x^2, x^4, x^6, \ldots \rangle$ という基底を導入して，その前の 3 つをとるつもりなんでしょう．でもそれならそのように書けば良いのです．

数学において，余り神経質に記号にこだわるのは良くない事です．しかし，上の二つの例は，自分が何を書いているのかに余りに無頓着すぎます．このような解答は試験では該当部分を零点とせざるを得ません．「なんとなくそれっぽい答えを書いてみる」のではなく，自分が書いてるのが何なのかを是非，自覚して頂きたいと思います．

なお，細かな注意として，基底を書く時は $\langle 1, x^2, x^4, x^6 \rangle$ のように，括弧で挟んで下さい．(これもなかなか定着しない人がいます.)

6 月 27 日の連絡：中間試験で，連立方程式で苦戦していた人が多かったので，**予定を急遽変更し，今日は連立方程式の解法をやります**．
また，お約束通り，補講を一回入れます．いつ入れるかは現在，考慮中です．
今日のキーワード：掃き出し法による連立方程式の解法

第 6 回レポート問題：

連立方程式を解く問題です．言うまでもないことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．特に今回は「連立方程式の解き方」で，後々まで実際上は大事ですよ！

問 12： 以下の連立方程式を解け．未知数はもちろん，x, y, z, w などである．解がない場合，解が無数にある場合もあるだろうから，注意すること．なお,「掃き出し法」が効率が良いので，できるだけ掃き出し法で解くのが望ましい（将来の試験でも役に立つ）．なお，見ての通り，(1) と (2) は左辺は同じである．

$$(1)\quad \begin{cases} \phantom{x+{}} 3y + 3z - 2w = -4 \\ x + y + 2z + 3w = 2 \\ x + 2y + 3z + 2w = 1 \\ x + 3y + 4z + 2w = -1 \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \phantom{x+{}} 3y + 3z - 2w = 0 \\ x + y + 2z + 3w = 2 \\ x + 2y + 3z + 2w = 1 \\ x + 3y + 4z + 2w = -1 \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} x - y = -2 \\ 3x - y + z = -2 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

なお，この問題の採点は非常に難航する事が予想される.「どこが間違っているのか」をすべて指摘する事は不可能であろう事は初めからお断りしておく．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：

上の問に解答し，

7 月 1 日（金）　15:00 （時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，2 枚以上にわたる場合は何らかの方法（ゼムクリップは不可）で綴じてくだされ．

7 月 4 日の連絡：お約束通り，補講を一回入れます．
補講は 7/20（水）の 3 限に決定しました．場所は（予約するのを忘れたので，7/4 時点では）未定です．場所が決まり次第，連絡します．
以前からの予告通り，8/1（月）の 3 限に教場試験をします．場所は中間試験と同じく，2308 です．
今日のキーワード：線型写像,（核空間と像空間）

第 7 回レポート問題：線型写像の基本的な問題（線形性を理解するための）です．

言うまでもないことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問 13： 講義に配った「講義ノート」p.28 の問 2 を解け．再録すると問 2 とは以下の通り：

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が線型写像で，$f(3) = 1$ だと言う．このとき，$f(5)$ はいくらか？
- 上の f に対して，$f(x) = 10$ となる x を求めよ．

問 14： 講義に配った「講義ノート」p.28 の問 3 を解け．再録すると問 3 とは以下の通り：

- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が線型写像で，$g\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ かつ，$g\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ だと言う．このとき，$g\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$ と $g\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$ を求めよ．
- 上の g に対して，$g(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$ となるようなベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ を求めよ．

問 15： 講義に配った「講義ノート」p.28 の問 4 を解け．再録すると問 4 とは以下の通り：

- $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ が線型写像で，$h\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$，$h\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ かつ，$h\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ だと言う．このとき，$h\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)$ と $h\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$ を求めよ．
- 上の h に対して，$h(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$ となるようなベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ はあるか？

ここには問 16 がありましたが，今日は問い 16 ができるようになるまで進まなかったので，問 16 は今回のレポート範囲からはずれます．混乱を避けるため，問 16 は一旦，削除しました．(7/4 夜記)

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：

上の問に解答し，

　7 月 8 日（金）　15:00 （時刻は 24 時間制）までに，
　全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法（ゼムクリップは不可）で綴じてくだされ．

先週のレポートの略解

問 12： 掃き出し法で，ともかく解きます．x, y などを書くのがうるさいので，係数だけ取り出して書きました．以下はあくまで，一例です．

実のところ，(1) と (2) は右辺の第一行以外はみんな同じなので，そこを a として，(1)(2) 一緒に解きました．

(1) と (2)　右辺の第一行を a を書くと，係数行列は

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 & | & a \\ 1 & 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & | & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & | & -1 \end{bmatrix}$$

となっている．ここで先週やった「基本変形」3 つを行う．

まず，折角 1 行目の最初がゼロなんだから，これを最後の行にしよう．他の行は順に上に送る．(これを基本変形で実現するには,「1 行と 2 行を入れ換え」「2 行と 3 行入れ換え」「3 行と 4 行入れ換え」をくり返せば良い)

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 & | & a \\ 1 & 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & | & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & | & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & | & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & | & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & | & a \end{bmatrix}$$

続いて，1,2,3 行目を引く．ただし，よく見ると，3 行から 2 行を引いたのを新しい 2 行目にし，次に新しい 2 行目から 1 行目を引くと，かなり係数が簡単になる．このように係数が「辺々引いて下さい」と訴えかけているところを見逃さないようにすると，楽．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & | & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & | & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & | & a \end{bmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行}-2\text{ 行}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & | & a \end{bmatrix} \xrightarrow{2\text{ 行}-1\text{ 行}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & | & a \end{bmatrix}$$

第 3 行が綺麗な形をしてるから，これと第 2 行を入れ替えた上で，新 2 行（の定数倍）を第 3 行から引く．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & | & a \end{bmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行と }2\text{ 行入れ換え}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & | & a \end{bmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行}-2\text{ 行}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & | & a \end{bmatrix}$$

2 行の 3 倍を 4 行から引く．引いた後を見ると，3 行と 4 行が近い形なので...

$$\xrightarrow{4\text{ 行}-2\text{ 行}\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & a+6 \end{bmatrix} \xrightarrow{4\text{ 行}-3\text{ 行}\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & a+4 \end{bmatrix}$$

これで階段状にできた．x, y, z, w を戻して書けば，これは

$$\begin{cases} x + y + 2z + 3w = 2 \\ \qquad y + z = -2 \\ \qquad\qquad -w = 1 \\ \qquad\qquad 0 = a+4 \end{cases}$$

となる．

これで (1)(2) を解く事ができる．が，これでは特に第 1 行が複雑なので，もう 2 段階，やっておこう．

$$\xrightarrow{1\text{ 行}+3\text{ 行}\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & a+4 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\text{ 行}-2\text{ 行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & a+4 \end{bmatrix}$$

(最後に，3 行全体の符号を変えた)．これは

$$(**) \qquad \begin{cases} x + z = 7 \\ \quad y + z = -2 \\ \qquad w = -1 \\ \qquad 0 = a+4 \end{cases}$$

ということである．以下，これを解く．

(1) の場合は $a = -4$ だったので，第 4 行目の式は $0 = 0$ でいつも満たされている．ので，上の 3 行を見れば良い．第 3 行から $w = -1$ がわかる．第 1 行，第 2 行はそれぞれ x, y を z で決める式の形になっているが，z そのものは決められない．つまり，z は任意で，この任意の z を介して x, y が決まる．最終的な結果は

$$x = 7 - t, \quad y = -2 - t, \quad z = t, \quad w = -1 \qquad (t\text{ は任意})$$

というのが解である．わかりやすいようにベクトルの形で書くと

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (t \text{ は任意})$$

となる．もちろん，この解は（何を t にするかで）いろんな書き方がある．どんな書き方をしても，t の係数ベクトルは同じ方向をむいてるはずではある．また，w はどうやっても -1．いくつか例を挙げておくと

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (t \text{ は任意}) \qquad \text{とか} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (t \text{ は任意})$$

(2) に進もう．(2) では $a = 0$ だったので，(**) の第 4 式が $0 = 4$ となってしまう．これは矛盾であって，x, y, z, w をどのようにとっても満たす事ができない．かつ，(**) は（もともとの連立方程式と同じく）4 つの式すべてを満たすものが解である．

ということで，(2) の場合に (**) を満たす事はできない．かつ，今まで同値変形をして来た訳だから，(**) が満たせないということは，もともとの方程式も満たせないという事だ．つまり，(2) の場合，解は存在しないのだ．

(3) 同じようにともかく，解く．未知数が 3 つなのに方程式が 4 つある．けども，解がないとは今の段階では言い切れないことに注意．係数行列を取り出して，

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{2\text{ 行}-1\text{ 行}\times 3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{3\text{ 行}-1\text{ 行}\times 2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2\text{ 行}-4\text{ 行}\times 2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{3\text{ 行}-4\text{ 行}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

第 2 行と第 3 行が全く同じになった！

$$\xrightarrow{3\text{ 行}-2\text{ 行}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{2\text{ 行}\times(1/3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{4\text{ 行}+2\text{ 行}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5/3 \end{array}\right] \xrightarrow{1\text{ 行}+4\text{ 行}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5/3 \end{array}\right]$$

ということで，もとの x, y, z で書けば

$$\begin{cases} x & & & = & -1/3 \\ & & z & = & 2/3 \\ & & 0 & = & 0 \\ & y & z & = & 5/3 \end{cases} \qquad \text{つまり} \qquad x = -\frac{1}{3}, \quad y = \frac{5}{3}, \quad z = \frac{2}{3}$$

というのが，答えである．

注意など

- 小問 (1) のように「不定」の場合,「不定」とだけ書いて，解を具体的に書いていない人がいました.「不定」の場合は解が一意に定まらないだけで，無数にある解は立派な解です（日本語が変）．だから，ちゃんと具体的に解を書き下してください．
- 同じ問題,「解は $w = -1, y + z = -2, x - y = 9$ を満たす x, y, z, w 全部」などと書いた人がいました．これは間違いではありませんが，最後の 2 式を「解ききっていない」(特に，解の自由度がどれくらいなのか，ぱっと見ではわかりにくい) 印象があります．実際，この先，この解を使って何かをする場合，上のような書き方では前に進みにくいでしょう．というわけで，不定の場合は適切な任意パラメーターを用いて，解を具体的に書き下して下さい（上の解答例のように）．
- 計算間違いをするのは仕方ない事ですが，解になってないものを堂々と解だと書いてる人が散見されました．解であるかどうかは，代入すればわかります．出て来た答えは代入して，**検算する事**が重要です.（解が本当は不定なのに，一つしか出て来なかった場合は，不定である事は検算では見抜きにくいので，これは仕方ないけど.）これまでにも言ったと思いますが，容易に検算できる問題なのに答えが間違っている場合，部分点は与えない方針なので，試験の際にはご注意を．

7 月 11 日の連絡：前回の相談通り，**補講を 7/20（水）の 3 限に，2208 教室で**行います．
以前からの予告通り，8/1（月）の 3 限に教場試験（期末試験の代わり）をします．場所は中間試験と同じく，**2308** です．
今日のキーワード：線型写像，核空間と像空間

第 8 回レポート問題：

線型写像に関する問題です．なお，次回の補講時（7/20）に出題予定の問題も後ろに付けてあります．多分，できるところまで進んでいると思うので，早めにやっておく事をお勧めします．

ただし，レポートの提出に当たっては，必ず，今回の分と次回の分は別々に出して下さい．次回の分も既に解いたから，ということで今週末に提出したりはせず，次回の分は来週末に提出して下さいね．

問 16： 写像 f が以下の性質を満たしている．それぞれの場合について，f が 線型写像ではあり得ない ものを挙げ，その理由（なぜ線型写像でないか）を説明せよ．

(a) f は実数から実数への写像で，$f(1) = 2, f(3) = 4$

(b) f は 2 項縦ベクトルの空間 $\mathbb{R}^2$ から実数 $\mathbb{R}$ への写像で，$f\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = 1$ かつ $f\left(\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\right) = 2$

(c) f は 3 項縦ベクトルの空間 $\mathbb{R}^3$ から実数 $\mathbb{R}$ への写像で，$f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = 1$ かつ $f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = 2$ かつ $f\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right) = 3$

(d) f は 3 項縦ベクトルの空間 $\mathbb{R}^3$ から実数 $\mathbb{R}$ への写像で，$f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = 1$ かつ $f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = 2$ かつ $f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = 4$

問 17： 行列 A，および $\mathbb{R}^3$ の基底 E, F を以下のように定義する：

$$A = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\2&2&2\end{bmatrix}, \qquad E = \left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle, \qquad F = \left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \right\rangle$$

また，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に $A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を対応させる写像として，線型写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を定義する（ここで $A\boldsymbol{x}$ は行列 A とベクトル $\boldsymbol{x}$ の積である）．

(1) 基底 E, E に関する f の表現行列は何か？（アタリマエの答えになるが，念のために訊いた．）

(2) 基底 F, F に関する f の表現行列を求めよ．（この基底 F がどんな意味を持っているかは来学期のお楽しみ．）

問 18： V を x の 2 次以下の多項式の空間（和とスカラー倍はいつも通り定義）とし，線型写像 f を「$p(x)$ を $q(x) := p(x+1)$ にうつす写像」として定義する．V の基底 $\langle 1, x, x^2 \rangle$ に関する f の表現行列を求めよ．

問 19： 以下のように行列 A を定義し，それぞれの行列による線型写像 f_A を考える．つまり，$\mathbb{R}^4$ の元 $\boldsymbol{x}$ に $A\boldsymbol{x}$ を対応させる写像を f_A とする．（注意：行列 A の方は問 12 と深い関係がある．）

$$A = \begin{bmatrix}0&3&3&-2\\1&1&2&3\\1&2&3&2\\1&3&4&2\end{bmatrix},$$

(1) f_A の核空間の次元と基底を求めよ．

(2) f_A の像空間の次元と基底を求めよ．

なお，これまでにも言った通り，基底の取り方は何通りもあるから，上の小問のそれぞれに対しては，基底を一例ずつ与えれば良い．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：

上の問に解答し，

　7 月 15 日（金）　15:00（時刻は 24 時間制）までに，
　全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，2 枚以上にわたる場合は何らかの方法（ゼムクリップは不可）で綴じてくだされ．

先週のレポートの略解

問 13： f が線型なので，任意の $k, x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$f(kx) = kf(x)$$

が成り立つはず.（共に実数で区別しにくいが，k はスカラー倍の k，x はベクトルの x のつもり）.

よって，

$$f(5) = f\Big(\frac{5}{3}\cdot 3\Big) = \frac{5}{3}f(3) = \frac{5}{3}.$$

また，$f(x) = 10$ のとき，$x = k\cdot 3$ と表せる k を探すと（$x \neq 0$ は明らかゆえ，こんな k は絶対にある），

$$10 = f(x) = f(k\cdot 3) = kf(3) = k$$

より，$k = 10$．よって $x = 30$ が答え.

問 14： ノリは問 13 と同じである．$\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ のとき，$f(\boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{a}) + \beta f(\boldsymbol{b})$ であるから，求めたいベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して，上のような表現を行えば良い．具体的には

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

であるから，

$$f\Big(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\Big) = \frac{1}{2}f\Big(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\Big) + \frac{1}{2}f\Big(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\Big) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \qquad f\Big(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\Big) = \frac{1}{2}f\Big(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\Big) - \frac{1}{2}f\Big(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\Big) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

次に，$\boldsymbol{x} = \alpha\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ が $f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$ を満たすなら，

$$\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix} = f(\boldsymbol{x}) = \alpha f\Big(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\Big) + \beta f\Big(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\Big) = \frac{\alpha}{2}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} + \frac{\beta}{2}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\alpha+\beta\\4\alpha+2\beta\end{bmatrix}$$

となっているはずで，$3\alpha + \beta = -6, 4\alpha + 2\beta = 10$．これを解くと，$\alpha = -11, \beta = 27$．よって，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}-11\\27\end{bmatrix}$.

問 15： ノリは問 14 と全く同じである.

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

なので（右辺の 3 つのベクトルは一次独立ゆえ，表し方は一通り），

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) - f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}, \qquad f\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) - f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$$

となる.

最後に，$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$ となる $\boldsymbol{x}$ を求める.

$$\boldsymbol{x} = \alpha\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix} = f(\boldsymbol{x}) = \alpha f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) + \beta f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) + \gamma f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \alpha\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

となるはずだから，$2\alpha + \gamma = -3,\ 2\beta + \gamma = 5$ となれれば良い．これは $\beta = \alpha + 4,\ \gamma = -2\alpha - 3$ なら任意の α でなりたつ．ので，こんな $\boldsymbol{x}$ は存在し，その具体形は（$\alpha \in \mathbb{R}$ は任意）

$$\boldsymbol{x} = \alpha\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + (\alpha+4)\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + (-2\alpha-3)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\0\\1\end{bmatrix}$$

となる．うえで任意のスカラー α がでてきたのが変に思える人もいるかもしれないが，これはベクトル ${}^t(2,1,0)$ が f の核空間を張っていることを理解すればわかる．詳しくは講義で.

別解

上の問 14，15 は問題の線型写像の表現行列を求めて計算しても良い．先週の最後にやったところで，「$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線型写像 f は，適切な $m \times n$ 行列 A_f を用いて，$f(\boldsymbol{x}) = A_f\,\boldsymbol{x}$ と書ける」というのがあった．これを用いて，A_f を一気に求めてしまうわけ．

問 14 なら，2×2 行列 A を用いて $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となるはずで，題意より

$$A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \qquad A\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

となっているはずだ．これはまとめて

$$A\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 1\end{bmatrix}$$

とも書ける．ので，A は（高校の時にやったかもしれない）逆行列を用いて

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 1\end{bmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}-1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 1\\4 & 2\end{bmatrix}$$

と求められる．ので，後はこの行列に $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ や $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ をかければ，答えが得られる．また，$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$ となる $\boldsymbol{x}$ は

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{x} = A^{-1}\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$$

となるので，逆行列を計算すればよい．(ただし，この講義では逆行列の計算法などは秋学期の始めごろにまとめてやります．2×2 なら高校で知ってると思うけど．）実のところ，このようにやっても，あんまり得にはならない — 問 14 そのものの答えを知れば，表現行列がすぐにわかる，という進み方なので．

第 9 回レポート問題（7/20 出題予定）の予告：

来週の月曜は休日でお休みなので，予告通り，来週水曜（7/20）に補講をします．レポートはいつも通り金曜に集めます．しかし来週水曜に出題すれば，皆さんに解いてもらう時間があまりありません．そこで，予告問題を以下に並べておきます．

問 20： 行列 A を $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\\2 & 2 & 2\end{bmatrix}$ と定義する．さらに $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に $A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を対応させる写像として，線型写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を定義する（ここで $A\boldsymbol{x}$ は行列 A とベクトル $\boldsymbol{x}$ の積である；またこの行列 A は問 17 と同じものである）．

(1) f の核空間と像空間をそれぞれ求めよ（集合の形で書け）．
(2) f の核空間と像空間の次元と基底を求めよ．もちろん，基底は何通りもありうるから，基底の一つを答えれば良い．

問 21： $X = \mathbb{R}^3$ から $Y = \mathbb{R}^3$ への線型写像 f が以下を満たしているという．

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} \qquad \text{かつ} \qquad f\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \qquad \text{かつ} \qquad f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = 3\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$$

このとき，

(1) f の核空間と像空間をそれぞれ求めよ（集合の形で書け）．
(2) f の核空間と像空間の次元と基底を求めよ．
(3) 標準基底に関する f の表現行列を求めよ．

問 22： 上の問 21 の状況で，

$$X\text{ の基底として } E = \left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle, \qquad Y\text{ の基底として } F = \left\langle \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} \right\rangle$$

を採用した場合，この基底に関する f の表現行列を求めよ．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について（次回の予告）：

上の問に解答し，

7 月 22 日（金）　15:00 （時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法（ゼムクリップは不可）で綴じてくだされ．

7 月 20 日（今日は補講日）の連絡：コンピューターの調子が悪く，僕の web page にファイルを上げる事ができていません．数日中に何とかするつもりですが，欠席等でこのようなプリントが欲しい人がいたら，ともかく原までメイルするように伝えてあげてください．

以前からの予告通り，8/1（月）の 3 限に教場試験（期末試験の代わり）をします．
場所は中間試験と同じく，**2308** です．
試験範囲は今学期にやったところ全部，です．が，特に 2 章の線型空間（線型空間とは，線型独立と従属，基底と次元，部分空間など）と 5 章の線型写像（線型写像とは，像空間と核空間，表現行列など）が主になるでしょう．ただし，連立方程式が解けないと答えにたどり着けないと思うので，連立方程式を確実に解けるようにもなっていて下さい．

8/1 の試験では「A4 の紙一枚（片面だけに書いたもの；原則として手書き）」の持ち込みを認めます．学生番号と氏名を書いて，試験当日，答案とともに提出して下さい．「自分は持ち込み無しで受ける」という人は，学生番号と名前を書いた「A4 の紙」を提出して下さい．

（補足説明）

- 持ち込みを認める理由：ある程度の分量の概念（特に表現行列）が出て来たため，**持ち込み用紙を自分で書いて，全体を整理する手助けとしてもらいたい**，というのが最大の狙いです．
- 「持ち込み用紙を自分で準備することを通して勉強する」ことが最大の狙いですから，皆さんには，自分で持ち込み用紙を準備する事を奨めます．友達と協力して持ち込み用紙を作成した場合は，「○○さんと一緒に作りました」と明記して下さい．このような明記がないのに，非常によく似たものが複数現れた場合には，それなりの措置を講じるかもしれません．
- まちがっても，試験対策委員の作成したものを多数の人間が持ち込む，などはやらないでくださいね．しつこいけども，自分で勉強してまとめる，のが最大の目的です．試験対策委員の作ったものを持ち込んでも何の役にも立ちません．(自分でまとめが作れない人は，その程度の実力だということです．その時点で諦めるか，死にものぐるいで勉強するかしかないでしょう．)
- 例題とその解答を延々と書く事はルール違反ではないけども，勉強にならないので，お勧めしません．あまりに酷い場合には減点する可能性があります．
- 「線型空間の定義」などは試験問題には書きません．必要と思う人は上の A4 の範囲内に自分で書いて下さい．

言わずもがなの注意：持ち込みを認めるという事は，それだけ問題が厄介になる可能性があるということです．決して「持ち込みだから楽勝」などと思わないでください．

今日のキーワード：核空間と像空間，線形写像の階数

第 9 回レポート問題：予告通り，以下の問題を出題します．

問 20： 行列 A を $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ と定義する．さらに $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に $A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を対応させる写像として，線型写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を定義する（ここで $A\boldsymbol{x}$ は行列 A とベクトル $\boldsymbol{x}$ の積である）．この行列 A は問 17 と同じものである．

(1) f の核空間と像空間をそれぞれ求めよ（集合の形で書け）．
(2) f の核空間と像空間の次元と基底を求めよ．もちろん，基底は何通りもありうるから，基底の一つを答えれば良い．

なお，この問は問 17 の結果（の一部）を使うと，かなり簡単に答えが出る．どうすれば一番簡単か，できるだけ考えてみてほしい．

問 21： $X = \mathbb{R}^3$ から $Y = \mathbb{R}^3$ への線型写像 f が以下を満たしているという．

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{かつ} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{かつ} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

このとき，

(1) f の核空間と像空間をそれぞれ求めよ（集合の形で書け）．
(2) f の核空間と像空間の次元と基底を求めよ．
(3) 標準基底に関する f の表現行列を求めよ．

問 22： 上の問 21 の状況で，

$$X \text{ の基底として } E = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \qquad Y \text{ の基底として } F = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

を採用した場合，この基底に関する f の表現行列を求めよ．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：

上の問に解答し，

7 月 22 日（金）　15:00 （時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法（ゼムクリップは不可）で綴じてくだされ．

——— 先週のレポートの略解 ———

問 16： 結論から言うと，線型写像ではあり得ないものは (a) と (d) です．一方，(b) と (c) はこれだけの条件では線型写像の条件を全く破っていないので，線型写像である可能性が十分にあります．(本当に (b) や (c) が線型写像であるかどうかを判断するには，問題に与えた以外のベクトルに対する行き先をすべて見る必要があります；これは問題の条件だけではできません．)

(a) が線型写像だとすると $f(3) = 3f(1) = 3 \times 2 = 6$ のはずだが，これは $f(3) = 4$ と与えられたことに矛盾する．

(d) が線型写像だとすると $f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = 1 + 2 = 3$ のはずなのに，問題では $f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = 4$ となっていて，これは矛盾である．

(b), (c) については，f の引数に入っているベクトルがそれぞれ，一次独立なので，これだけでは何とも断定できません．(d) の方は，3 つのベクトルが線型従属であったので，それぞれの行き先もその線型従属の関係を満たすべきだったのですが，これが満たされてない，というわけです．

問 17： 簡単のため，$E = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle$，$F = \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3 \rangle$ と書く．

(1) $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ の E に関する数ベクトル表現は $[\boldsymbol{x}]_E = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ である．つまり，$\boldsymbol{x}$ を基底 E で表現したものは，数ベクトルとしての普通の $\boldsymbol{x}$ の表し方になっている．

問題は要するに，$\boldsymbol{x}$ の行き先 $A\boldsymbol{x}$ を基底 E で展開したものが行列 A とベクトル $[\boldsymbol{x}]_E$ の通常のかけ算で与えられる，と主張している．つまり $[f(\boldsymbol{x})]_E = A[\boldsymbol{x}]_E$ ということである．これはすなわち，この f の表現行列が A そのものであることを意味する．

(2) 今度は基底 F での表現を具体的に作ってやらねばならない．$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ は $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{f}_1 + x_2\boldsymbol{f}_2 + x_3\boldsymbol{f}_3$ と展開できる．これを f で送ると，線型性から

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{f}_1 + x_2\boldsymbol{f}_2 + x_3\boldsymbol{f}_3) = x_1 f(\boldsymbol{f}_1) + x_2 f(\boldsymbol{f}_2) + x_3 f(\boldsymbol{f}_3)$$

がなりたつ．また，$\boldsymbol{f}_j$ の行き先は定義通り計算すると

$$f(\boldsymbol{f}_1) = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\2&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\0\\6\end{bmatrix} = 3\boldsymbol{f}_1, \quad f(\boldsymbol{f}_2) = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\2&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-2\\2\end{bmatrix} = 2\boldsymbol{f}_2, \quad f(\boldsymbol{f}_3) = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\2&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

となっている．従って，行き先が

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{f}_1 + x_2\boldsymbol{f}_2 + x_3\boldsymbol{f}_3) = x_1 f(\boldsymbol{f}_1) + x_2 f(\boldsymbol{f}_2) + x_3 f(\boldsymbol{f}_3) = 3x_1\boldsymbol{f}_1 + 2x_2\boldsymbol{f}_2$$

と展開できた．表現行列の定義を思い出すと，これから直ちに，F に関する表現行列が $\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ とわかる．

問 18： V の任意の元は $\boldsymbol{p} = p_0 + p_1 x + p_2 x^2$ と展開できる．これを f で送ると，

$$q(x) = p(x+1) = p_0 + p_1(x+1) + p_2(x+1)^2 = p_0 + p_1 + p_2 + (p_1 + 2p_2)x + p_2 x^2$$

に移る．従って，これは

$$\boldsymbol{p} \text{ の数ベクトル表現が } [\boldsymbol{p}]_E = \begin{bmatrix}p_0\\p_1\\p_2\end{bmatrix} \quad \text{である場合，その行き先が} \quad \begin{bmatrix}p_0+p_1+p_2\\p_1+2p_2\\p_2\end{bmatrix} = [f(\boldsymbol{p})]_E$$

ということを主張している訳である．したがって，$[f(\boldsymbol{p})]_E = A_{EE}\,[\boldsymbol{p}]_E$ となるような表現行列は $A_{EE} = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$．

問 19： $A\boldsymbol{x}$ というのは，問 12(1),(2) ででてきた連立方程式の左辺と同じです．

(1) 核空間とは，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ となるような $\boldsymbol{x}$ の全体である．これは $\boldsymbol{x}={}^t(x,y,z,w)$ と書くと，問 12 の (1)(2) の連立方程式の右辺をゼロにしたものと同じ．従って，問 12 の (1),(2) の右辺がゼロの場合を解けばよい．そのときの解を思い出すと，変形の途中は省略して

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

つまり

$$\begin{cases} x \phantom{{}+y} + z \phantom{{}+w} = 0 \\ \phantom{x+{}} y + z \phantom{{}+w} = 0 \\ \phantom{x+y+z+{}} w = 0 \\ \phantom{x+y+z+{}} 0 = 0 \end{cases}$$

ということになる．これを解けば，$w=0$, z は任意で，$x=-z, y=-z$．つまり

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (t \text{ は任意})$$

というのが解であるとわかる．つまり，上の形をしたベクトルの全体が核空間だ．

よって，この空間の基底（の一例）は

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

で，その次元は 1.

(2) 講義でやった通り，$\mathbb{R}^4$ の基底を $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4 \rangle$ とすると，像空間は $f_A(\boldsymbol{e}_1), f_A(\boldsymbol{e}_2), f_A(\boldsymbol{e}_3), f_A(\boldsymbol{e}_4)$ の線形結合の全体である．ここでは特に，$\boldsymbol{e}_j$ として $\mathbb{R}^4$ の標準基底をとってやろう（ほかの基底を使っても最終結果は同じ）．具体的に計算すると，

$$\boldsymbol{f}_1 = f_A(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}_2 = f_A(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}_3 = f_A(\boldsymbol{e}_3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}_4 = f_A(\boldsymbol{e}_4) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

であるから，この 4 本で張られる空間が像空間.

像空間の基底を求めるには，左端のベクトルから出発して，独立なベクトルを加えていくのが一番，地道であろう.（もちろん，どのベクトルから出発してもよい）．出発点は $\boldsymbol{f}_1$ で，これ一本なら独立だから，これは像空間の基底に残す．次の $\boldsymbol{f}_2$ は $\boldsymbol{f}_1$ に比例していないので，これも独立で，基底に残す.

$\boldsymbol{f}_3$ は前の 2 本には比例していないが，これだけでは独立とはいえない．実際，よく見ると,（よくみなくても，線形結合を作って $=\boldsymbol{0}$ を解いてみれば）$\boldsymbol{f}_3-\boldsymbol{f}_2=\boldsymbol{f}_1$ であって，線形独立ではないのだ．従って，$\boldsymbol{f}_3$ は像空間の基底には入らない.

最後に $\boldsymbol{f}_4$ であるが，これは「$\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_4$ の線形結合 $=\boldsymbol{0}$」を解いてみると，係数がゼロ以外にないことがわかるので，線形独立だ．従って，$\boldsymbol{f}_4$ は像空間の基底のメンバーに残る.

以上から，$\boldsymbol{f}_3$ を排除して，像空間の基底は

$$\langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_4 \rangle$$

であり，その次元は 3.

もちろん，像空間の基底はほかの取り方もある．上では $\boldsymbol{f}_3$ を排除したけども

$$\langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_4 \rangle, \qquad \langle \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_4 \rangle$$

なども もちろん，アリだ（$\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ が 3 本とも現れるのはダメ）．さらに，別の解き方（以下を参照）をやると，以下のようなベクトルが基底のメンバーとして出てくることがある（皆さんのレポートから抽出）.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

問 19(2) の別解

以下のような，一見，全く異なる解き方もある．像空間とは，要するに $A\boldsymbol{x}$ の全体であった．$\boldsymbol{x} = {}^t(x,y,z,w)$ と書くと，これは

$$(***) \qquad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \qquad (x,y,z,w \in \mathbb{R})$$

の全体である．講義では，この全体は

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

で張られる空間だから，うえの４つのベクトルを計算して，その中から最大限に一次独立なものをとる方法を紹介した．しかし，これには異なるアプローチも可能である．

まず，(***) の右辺（像空間の元）を ${}^t(X,Y,Z,W)$ とおいてみよう：

$$(****) \qquad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{bmatrix}$$

これは X,Y,Z,W が与えられたときに，右辺がこのような X,Y,Z,W になるような x,y,z,w を求めるための方程式，と解釈することは可能である．つまり，もし ${}^t(X,Y,Z,W)$ が像空間の元であれば，うえの方程式を成り立たせるような x,y,z,w が存在する．逆に，${}^t(X,Y,Z,W)$ が像空間の元でなければ，うえの方程式を成り立たせるような x,y,z,w は存在しない．

このように考えると，可能な X,Y,Z,W の組み合わせを考えるということは，うえの方程式 (****) が解 x,y,z,w をもつような右辺（非斉次項）X,Y,Z,W を考えるということと同じだ．ということで，うえの (****) を解いてみれば良いのである．（このようにすると，核空間を求めるときと同じような計算になるので，場合によっては簡単である.）

やってみるとまたもや (****) の係数行列だけ取り出して

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 3 & -2 & X \\ 1 & 1 & 2 & 3 & Y \\ 1 & 2 & 3 & 2 & Z \\ 1 & 3 & 4 & 2 & W \end{array}\right] \xrightarrow{\text{がんばる}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2Y+7Z-4W \\ 0 & 1 & 1 & 0 & W-Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2Z+Y+W \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -X-2Y+Z+W \end{array}\right]$$

となる．第１行〜第３行は w と x,y を z が表すのに使える（この時点では X,Y,Z,W に制限なし）．しかし第４行は X,Y,Z,W への制限になる（これが唯一の制限）．つまり，像空間の元 ${}^t(X,Y,Z,W)$ には

$$-X-2Y+Z+W=0 \qquad \text{つまり} \qquad X=-2Y+Z+W$$

という制限がつくが，それ以上はつかない．ので，像空間の元は

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + Z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + W \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (Y,Z,W \text{ は任意})$$

を表せるわけだ．右辺に出ている３つのベクトルは一次独立（なぜなら，第２成分がゼロでないのは一つ目のベクトルのみ，第３成分がゼロでないのは２つ目のベクトルのみ，第４成分がゼロでないのは３つ目のベクトルのみ）だから，これらが像空間の基底をなす．つまり，基底の一例は

$$\left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

で次元は 3.

この別解の解き方は基底として簡単なベクトルを与えることが多いが，途中の計算間違いなどを考えると，必ずしもベストな方法ではない．実際，この方法で解こうとした人が 5〜6 人いたが，最後の答えまであっていた人は二人だったと記憶している．（他の人は掃き出し法のところで計算間違い.）

7 月 25 日の連絡：何とか予定通り，前期の内容を終える事ができそうで，ほっとしています．
以前からの予告通り，8/1（月）の 3 限に教場試験（期末試験の代わり）をします．
場所は中間試験と同じく，**2308** です．
試験範囲は今学期にやったところ全部，です．が，特に 2 章の線型空間（線型空間とは，線型独立と従属，基底と次元，部分空間など）と 5 章の線型写像（線型写像とは，像空間と核空間，表現行列など）が主になるでしょう．ただし，連立方程式が解けないと答えにたどり着けないと思うので，連立方程式を確実に解けるようにもなっていて下さい．
　なお，前回の授業の頃から，「表現行列について」の質問が増えています．特に「基底○○に関して」がわからないようですね．その原因の大きな部分は，そもそも「基底○○に関する表現ベクトル（成分表示）」がわかっていないことにあると思われます．どうもわからなくて困っている人は，まず，「基底 E に関する成分表示」$[\boldsymbol{x}]_E$ が何だったのか，まずはそこから復習する事をお奨めします．

8/1 の試験では「A4 の紙一枚（片面だけに書いたもの；原則として手書き）」の持ち込みを認めます．学生番号と氏名を書いて，試験当日，答案とともに提出して下さい．「自分は持ち込み無しで受ける」という人は，学生番号と名前を書いた「A4 の紙」を提出して下さい．

（補足説明；大半は 7/20 の注意と同じ）

- 原則として，持ち込み用紙は採点しません．ただし，(以下の方針から判断して）非常に良いものを作った場合には，ホンの少しだけ良いことがあるかもしれません．
- 持ち込みを認める理由：ある程度の分量の概念（特に表現行列）が出て来たため，**持ち込み用紙を自分で書いて，全体を整理する手助けとしてもらいたい**，というのが最大の狙いです．
- 「持ち込み用紙を自分で準備することを通して勉強する」ことが最大の狙いですから，皆さんには，自分で持ち込み用紙を準備する事を奨めます．友達と協力して持ち込み用紙を作成した場合は，**「○○さんと一緒に作りました」と明記**して下さい．このような明記がないのに，非常によく似たものが複数現れた場合には，それなりの措置を講じるかもしれません．
- まちがっても，試験対策委員の作成したものを多数の人間が持ち込む，などはやらないでくださいね．しつこいけども，自分で勉強してまとめる，のが最大の目的です．試験対策委員の作ったものを持ち込んでも何の役にも立ちません．(自分でまとめが作れない人は，その程度の実力だということです．その時点で諦めるか，死にものぐるいで勉強するかしかないでしょう．)
- 例題とその解答を延々と書く事はルール違反ではないけども，勉強にならないので，お勧めしません．あまりに酷い場合には減点する可能性があります．
- 「線型空間の定義」などは試験問題には書きません．必要と思う人は上の A4 の範囲内に自分で書いて下さい．
- なお，このように持ち込み用紙は提出してもらうので，提出前にコピーを取っておく方が無難です — 持ち込み用紙も答案と一緒に返却の予定ですが，返却までのタイムラグがありますから．

言わずもがなの注意：持ち込みを認めるという事は，それだけ問題が厄介になる可能性があるということです．決して「持ち込みだから楽勝」などと思わないでください．

今日のキーワード：核空間と像空間，線型写像の合成と逆，線形写像の階数

先週のレポートの略解

問 20：　（問題の解答に入る前に注意）「集合の形で書け」と言うことなので，単に像と核を縦ベクトルの集まりとして書けば形式上は正解です．最も手抜きの書き方としては

$$\text{像は}\ \left\{ A\boldsymbol{x} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \right\}, \qquad \text{核は}\ \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \right\}$$

というものですが，これはちょっと騙されたみたいな感じがするかもしれませんし，まあ，常識的に考えてもうちょっと「解いて」から書いて下さい，とは思います．ということで，本当は以下に示すようなものを望んでいました．試験の場合はこのようなややこしさを避けるため，「基底と次元」を訊きますからご安心を．

(では解答例の本論．まずは，深く考えない場合の解答.)
　以下，(1)(2) をまとめて解答します．
　まず，具体的に写像を書いてみると

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \text{の行き先は} \qquad A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ 2y \\ 2x+2y+2z \end{bmatrix}$$

となっている．
　核空間は上の右辺が零ベクトルになるような $\boldsymbol{x}$ の全体だ．具体的には x, y, z が連立方程式

$$x + z = 0, \qquad 2y = 0 \qquad 2x + 2y + 2z = 0$$

を満たすような $\boldsymbol{x}$ の全体である．この連立方程式は３つの式からなるが，３番目の式は１番目と２番目からすぐにでる．従って，これははじめの２つ，つまり

$$x+z=0, \qquad y=0$$

と同値であり，要するに，$y=0$ かつ $z=-x$（x は任意）というわけ．従って，

$$\mathrm{Ker}\ f=\left\{x\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\ \middle|\ x\ \text{は任意}\right\}\ \text{であり，その基底の一つは}\ \left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\rangle\ \text{で，次元は 1}$$

像空間の方は

$$\begin{bmatrix}x+z\\2y\\2x+2y+2z\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=(x+z)\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}+2y\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

の全体が作る空間である．これは右辺に出ている２つのベクトルで張られており，またこの２つのベクトルは線形独立である（今は二つのベクトルが独立か否かを知りたいので，比例するかどうかを考えればよろし）．従って集合の形で書くと，

$$\mathrm{Im}\ f=\left\{s\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\ \middle|\ s,t\ \text{は任意}\right\}\ \text{である．その基底の一つは}\ \left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\rangle\ \text{で，次元は 2}$$

となる．

(次に，前回の問 17(2) を利用する方法)

前回と同じく F のベクトルを $F=\langle\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3\rangle$ と書く．前回のレポート問 17 の (2) の解答によると，

$$f(\boldsymbol{f}_1)=3\boldsymbol{f}_1,\quad f(\boldsymbol{f}_2)=2\boldsymbol{f}_2,\quad f(\boldsymbol{f}_3)=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{f}_3$$

であった．従って，$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{f}_1+x_2\boldsymbol{f}_2+x_3\boldsymbol{f}_3$ と展開した場合，行き先が

$$(*)\qquad f(\boldsymbol{x})=f(x_1\boldsymbol{f}_1+x_2\boldsymbol{f}_2+x_3\boldsymbol{f}_3)=x_1f(\boldsymbol{f}_1)+x_2f(\boldsymbol{f}_2)+x_3f(\boldsymbol{f}_3)=3x_1\boldsymbol{f}_1+2x_2\boldsymbol{f}_2$$

となることがわかっている.（以上，既に前回の解答で出したことの復習.）

これから像と核を出してみよう．まず像の方は，(*) の線型結合全体（x_1,x_2 は任意だから）になるから，

$$\mathrm{Im}\ f=\left\{s\boldsymbol{f}_1+t\boldsymbol{f}_2\ \middle|\ s,t\ \text{は任意}\right\}\quad\text{となって，その基底の一つは}\ \langle\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2\rangle\ \text{で，次元は2}$$

となる．また，核の方は (*) が零ベクトルになるものだから，$x_1=x_2=0$ が必要充分である．つまり，$x=x_3\boldsymbol{f}_3$（x_3 は任意）であるから，

$$\mathrm{Ker}\ f=\left\{s\boldsymbol{f}_3\ \middle|\ s\ \text{は任意}\right\}\quad\text{となって，その基底の一つは}\ \langle\boldsymbol{f}_3\rangle\ \text{で，次元は1}$$

となる．もちろん，この答えは最初に示したものと一致する．

問 21： いちいち縦ベクトルを書くのは大変なので，

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{b}_2=2\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{b}_3=3\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}\tag{1}$$

とおく．問題の条件は，f が

$$f(\boldsymbol{a}_1)=\boldsymbol{b}_1,\qquad f(\boldsymbol{a}_2)=\boldsymbol{b}_2,\qquad f(\boldsymbol{a}_3)=\boldsymbol{b}_3\tag{2}$$

を満たしている，ということである．

まず，事前に $\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\rangle$ は一次独立であり（これをチェックする方法は今までに散々やったのでここでは略），３本からなっているので，$\mathbb{R}^3$ の基底をなしていることに注意しておこう．これはつまり，$\mathbb{R}^3$ の任意の元をこの３つのベクトルの線型結合で書けることを意味する．よって任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ に対して $f(\boldsymbol{x})$ が計算できることになる．具体的に書くと，$\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3\tag{3}$$

と線型結合の形で表すと，

$$f(\boldsymbol{x})=f(c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3)=c_1f(\boldsymbol{a}_1)+c_2f(\boldsymbol{a}_2)+c_3f(\boldsymbol{a}_3)=c_1\boldsymbol{b}_1+c_2\boldsymbol{b}_2+c_3\boldsymbol{b}_3\tag{4}$$

となるはずなのだ．

また，$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ も一次独立かどうかを見ておこう．これは

$$c_1\boldsymbol{b}_1+c_2\boldsymbol{b}_2+c_3\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{0}\tag{5}$$

を解けばわかる．この解は

$$c_1=-6c_3,\quad c_2=\frac{9}{2}c_3\quad(c_3\ \text{は任意})\tag{6}$$

となって，**一次独立ではない**．特に

$$12\boldsymbol{b}_1 = 9\boldsymbol{b}_2 + 2\boldsymbol{b}_3 \tag{7}$$

が成り立つことに注意しておく．以下ではこれらの事実をふんだんに用いる．

像空間 からやる．上で見たように，任意の $\boldsymbol{x}$ に対する $f(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ の線型結合で書ける．ので，像空間はこの 3 つのベクトルで張られる空間だ．この 3 つのベクトルは一次独立ではなく，(7) の関係を満たしている（また，$\boldsymbol{b}_2$ と $\boldsymbol{b}_3$ は明らかに一次独立である）．従って像空間の基底は $\langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 \rangle$，その次元は 2 であって，

$$\mathrm{Im}\ f = \{ s\boldsymbol{b}_2 + t\boldsymbol{b}_3 \,|\, s \text{ と } t \text{ は任意のスカラー} \} \tag{8}$$

となる．もちろん，ここは $\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$ や $\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3 \rangle$ を基底として採用してもよい．

核空間 をやろう．これは表現行列を求めてから出す方法もある．けども，あえて今の段階でやってみる．核空間というのは，$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ となるような $\boldsymbol{x}$ の全体だ．(3) と (4) を思い出すと，

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0} \tag{9}$$

となるような c_1, c_2, c_3 を求めた場合，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3$ の全体が Ker f なのである．ところが (9) は (5) と全く同じでその解は (6) で与えられている．よって核空間とは（$c_3/2$ を c にした）

$$\mathrm{Ker}\ f = \left\{ c(-12\boldsymbol{a}_1 + 9\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3) \,\middle|\, c \text{ は任意のスカラー} \right\} \tag{10}$$

とわかる．$\boldsymbol{d} = -12\boldsymbol{a}_1 + 9\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3$ とおくと，この空間の基底は $\langle \boldsymbol{d} \rangle$，次元は 1 である．具体的に計算すると，

$$\boldsymbol{d} = -12\boldsymbol{a}_1 + 9\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -10 \\ -3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

となっている．

（注意！）かなりの人が上のような解き方をした上で，$-12, 9, 2$ という係数に反応して，核空間の基底を ${}^t(-12, 9, 2)$ としていました．しかしこれは上の解き方を見ればわかるように，「核空間の基底をベクトル $\boldsymbol{a}_j$ の線型結合で書いた時の係数（の比例定数）」です．つまり，このベクトルはこの「核空間の基底を $\mathbb{R}^3$ の基底 $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$ で展開した場合の係数ベクトル」を表しています．もし，この事情を明記して解答した人がいれば，それも正解ですが，そのように明記しない場合，これらのベクトルはすべて，標準基底に関する係数だと解釈され，不正解です．もちろん，「基底は $-12\boldsymbol{a}_1 + 9\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3$」と書いてあれば，完全な正解ですが．

実のところ，この事情を理解してそのように解答した人は皆無と思われます（なぜなら，${}^t(-12, 9, 2)$ としている人は，像空間の基底では ${}^t(2, 0, 1)$ などと，標準基底に関するこたえを書いていました．これでは基底の選び方をきっちり理解しているとはとても思えない．）

この解き方をしたかなりの人は，最初の方では $\boldsymbol{a}_j$ の線型結合として解き始めています．これは完全に正しいことです．しかしそれなら最終結果にも $\boldsymbol{a}_j$ の線型結合の係数であることを明記すべきです．上に書いたように，像空間の方は無造作に書いている事からしても，多分，「$\boldsymbol{a}_j$ の線型結合」であることを答えを書く時点では忘れていたものと推測します．

正直，数ベクトルの空間にいろいろな基底を入れるのは，却ってわかりにくいだろうとは思います．（だからこそ，「多項式の空間」などをやった訳です．）問題で与えられた数ベクトルの表現を与えるものともかく基本的な基底（出題者，解答者にとっての標準基底），それ以外の基底は標準ではない基底（なので，どんな基底かは明記すべし），と区別する必要があります．

さて最後に 表現行列 ですが... 先週までの講義結果によると，$\boldsymbol{e}_j$ を基本ベクトルとして

$$A = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_3) \end{bmatrix} \tag{11}$$

が表現行列のはず．そこで，標準基底 $\boldsymbol{e}_j$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線型結合として表し，(3) と (4) を用いれば，計算できるはずだ．

これはまあ，地道にやるしかない（逆行列を使えば少しは見通しが良くなるけど）．$\boldsymbol{e}_1$ なら

$$x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2 + z\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{e}_1 \qquad \text{つまり} \qquad \begin{bmatrix} x+z \\ x+y \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

を解けば良い．がんばってやると，

$$x = z = 1/2,\ y = -1/2, \qquad \text{つまり} \qquad \boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) \tag{13}$$

がわかる．同様に計算すると

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3), \qquad \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) \tag{14}$$

もわかる．そこで (4) を用いると，

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 + 3\boldsymbol{b}_3) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\11\\7\end{bmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{e}_2) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-11\\-5\end{bmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{e}_3) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\7\\5\end{bmatrix} \tag{15}$$

となる．よって，表現行列は

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 1 & 3\\11 & -11 & 7\\7 & -5 & 5\end{bmatrix} \tag{16}$$

と求められる．なお，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{x}$ の全体を求めると Ker f がわかるが，これはもちろん，上で求めたものに一致する．

問 22： 問 21 と同じ記号を用い，更に新たに加わったベクトルを $\boldsymbol{g} = {}^t(1,2,2)$ と書く．問 22 は，問 21 の状況で，X と Y の基底として

$$E = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle, \qquad F = \langle \boldsymbol{b}_1, \frac{1}{2}\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{g} \rangle$$

を採用して，この基底に関する f の表現行列を求めよというものだ．

これまでの講義でやったように，基底 E, F に関する表現行列とは，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ の基底 E に関する表現ベクトルを $[\boldsymbol{x}]_E$，行き先 $f(\boldsymbol{x})$ の基底 F に関する表現ベクトルを $[f(\boldsymbol{x})]_F$ とした場合に，この 2 つの縦ベクトルをつなぐような，つまり

$$(**) \qquad [f(\boldsymbol{x})]_F = A\,[\boldsymbol{x}]_E$$

となるような行列 A のことだった．今，問 21 の小問群を解いた時に，(3) のように

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3$$

と表した．この行き先は (4) のように $f(\boldsymbol{x}) = c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3$ と書けるが，これは基底 F のベクトルで書けば（$\boldsymbol{b}_3 = 6\boldsymbol{b}_1 - \frac{9}{2}\boldsymbol{b}_2$ であるから）

$$f(\boldsymbol{x}) = c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 = (c_1 + 6c_3)\boldsymbol{b}_1 + \left(c_2 - \frac{9}{2}c_3\right)\boldsymbol{b}_2 = (c_1 + 6c_3)\boldsymbol{b}_1 + (2c_2 - 9c_3)\frac{1}{2}\boldsymbol{b}_2 + 0\boldsymbol{g}$$

と表される．これは表現ベクトルの言葉で言えば，行く前と行った後のベクトルが

$$[\boldsymbol{x}]_E = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}, \qquad [f(\boldsymbol{x})]_F = \begin{bmatrix}c_1 + 6c_3\\2c_2 - 9c_3\\0\end{bmatrix}$$

と書けているということ．以上から

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 6\\0 & 2 & -9\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

というのが，答えである．(もちろん，この表現行列から核空間や像空間を見つける事もできる.)

（疑問）前回の問 17 の (2) と同じ答えを書いた人が数人いた．多分，この人たちは基底の 3 番目のベクトルを見誤ったのだろう．なぜ，基底の 3 番目が変なベクトルになってるかというと，そうしなければ基底にならないからだ．(なぜ，基底にならないかというのは，像空間の次元が 2 次元である事を考えれば納得できる．像空間が 2 次元しかないのだから，そこから基底を作る事は不可能だ．一方．前回の問 17 の (2) と同じ答えの表現行列になるのなら，像空間の次元は 3 次元のはずだぞ.)

（注）この問題の題意がわかりにくい，と言う指摘がありました．どういうことかというと，基底 E, F をそれぞれ X, Y の基底として導入しているのですが，「表現行列を E, F に関して求めるのか，それとも E, E や F, F のも求めるのか」があやふやである，という指摘です．もちろん，題意は E, F に関する表現行列を求める事ですが，一年生への出題としては「E, F に関する表現行列」と明記した方が良かったかもしれません．

ただし，そのように明記しなくても，題意は本当は明らかです．この問では「X に基底 E，Y に基底 F」を導入するとなっています．X, Y は結果的には同じ線型空間と看做す事はできますが，線型写像を定義した時点では一応は別の線型空間と考えられています．(簡単なことを難しくしているように見えるかもしれませんが，数学では何と何をどのように同一視するかということには非常に敏感です．今回も X と Y を同じと看做せる可能性があるけども，そうするかどうかは，本当は「どのように同一視するか」を宣言してからやるのが基本です —— つまり，今の X, Y の標準基底が悪くて，別の基底をとって別の同一視の仕方をすれば，もっと見通しが良くなる事もあるから.) このようなわけで，表現行列を作る際にも「X に基底 E，Y に基底 F」とあれば，元の空間には E，先の空間には F を用いると解釈すべきなのです．