1 極限と連続性

理学・工学系（特に理論系）の人が将来，必要とする程度の，最低限の微積分の基礎，特に極限の概念についてまとめました．このくらいは一度は勉強しておいても悪くはないはず．

1.1 数列の極限：ϵ-N 論法[9]

まずは数列の極限を考える．数列の方が関数より簡単なはずだから，まずここで数列の極限（ϵ-N 論法）に慣れようという狙いである．

皆さんは高校で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ という式の意味を習ったはずだ．多分，

n が限りなく大きくなるとき，a_n が限りなく α に近づく

などという「定義」を聞いたのではないか？この定義は特に間違ってはいないし，これで十分な場合はこれでやれば良い．しかし，この言い方は以下の理由で困ったものである．

- まず,「限りなく近づく」「限りなく大きく」には「限りなく」という感覚的な言葉が入っていて，あやふやだ．
- 次に,「近づく」「大きくなる」などの「動き」が何となく入っており，考えにくい．
- もっと困ったことに，この言い方には「どのくらい速く極限に収束するのか」の**収束の速さ**に関する言及が全くない．そのため，少しややこしい極限 —— 特に２つ以上の変数が混ざった極限[10]—— を考えだすと，お手上げになる．２つ以上の変数が現れないけど困ってしまう例としては，

  （問）$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ のとき，$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ の極限を求めよ

  がある．この答えは直感的には 0 だろうが，証明できますか？（この答えは後の命題 1.1.7 である）．

これらの欠点を克服すべく，極限への収束の速さまで含めた，定量的な定義が考えられた．これが ϵ-N 論法で，以下のように書かれる．

定義 1.1.1 数列 a_n と実数 α に対して，<u>数列 a_n が $n\to\infty$ で α に収束する</u>，つまり $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ というのは，以下の（ア）が成り立つことと定義する：

（ア）任意の（どんなに小さい）正の数 ϵ に対しても，適当な（大きい）実数 $N(\epsilon)$ を見つけて，

$$\text{すべての } n > N(\epsilon) \text{ で，} \quad \bigl|a_n - \alpha\bigr| < \epsilon \quad \text{とできる．} \tag{1.1.1}$$

（ア）は以下のように言っても良い．

（アの言い換え）任意の（どんなに小さい）正の数 ϵ に対しても，

$$\text{すべての } n > N(\epsilon) \text{ で，} \quad \bigl|a_n - \alpha\bigr| < \epsilon \quad \text{が満たされる} \tag{1.1.2}$$

ような（十分に大きい）実数 $N(\epsilon)$ が存在する．

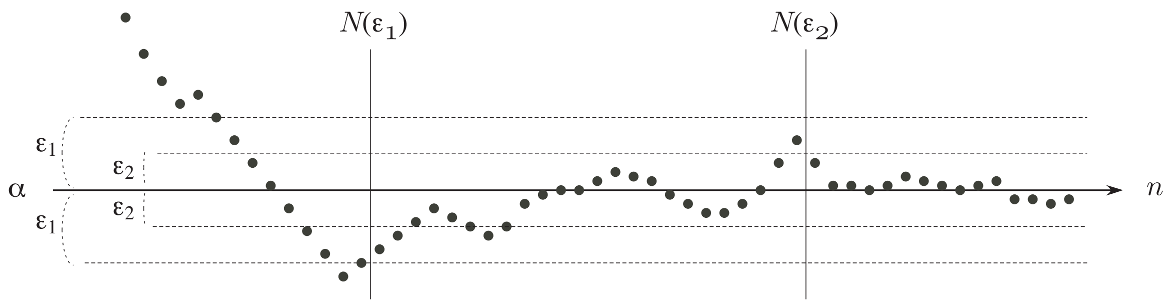
（ア）は数式では以下のように書く（これは数学科の講義ではないので，この書き方は以下では使わない）：

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) \qquad \Bigl(n > N(\epsilon) \implies \bigl|a_n - \alpha\bigr| < \epsilon \Bigr) \tag{1.1.3}$$

---

[9] 教科書の 2.1 節前半

[10] 俺はそんなもん考えたくないわ，と思った人は考えを改めよう．皆さんが高校でやってきたはずの「定積分」の存在を証明するだけでも，このような極限の問題が生じるので，この講義のメインテーマに直結してるのです．



少し補足説明：

- 上の定義の中で，括弧の中の（大きな）（小さな）はココロを述べたものである．これらは通常は省略されるが，慣れないうちは心の中で補うべきだ．
- $N(\epsilon)$ と書いたのは，「この N は ϵ によって決まる数なんだよ」と ϵ-依存性を強調するためである．
- (1.1.3) には 2 つの不等式 $n > N(\epsilon)$，$\bigl|a_n - \alpha\bigr| < \epsilon$ が現れている．ここはどちらも（または片方を）$n \geq N(\epsilon)$ や $\bigl|a_n - \alpha\bigr| \leq \epsilon$（等号入り）に変えても，定義の意味する事は同じである（なぜ同じなのかは重要だから，各自で十分に納得せよ）．この講義では主に等号なしのバージョンを用いるが，等号入りのものを断りなく使うこともある．
- 通常は $N(\epsilon)$ を整数にとる事が多い．しかし，これは整数でなくても困らない上に，整数だとすると具体例の計算がややこしくなる．そこでこの講義では整数でない $N(\epsilon)$ を許すことにした．(気になる人は，後で充分に慣れてから，整数の $N(\epsilon)$ を使えば良い．)

この定義の最大の眼目は，極限という無限（ゼロ）の世界を扱っているのに，**ゼロでも無限でもない，有限の ϵ や N しか登場しない**点にある．有限のものなら（落ち着けば）我々は扱えるから，これは大きな利点だ．ただし，有限の ϵ や N を一つだけ考えても，これでは「極限」にならないのは明らかだ．そこで，上の定義では**その ϵ をいくらでも小さく選ぶ**ようにして，「どんどん大きくなる」「どんどん近づく」を表現している（以下で詳しく説明）．

細かい話に入る前に，$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ なども厳密に定義しておく：

定義 1.1.2 数列 a_n に対して，数列 a_n の $n \to \infty$ の極限がプラス無限大である，つまり $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ というのは，以下の（ア$'$）が成り立つことと定義する：

（ア$'$）任意の（どんなに大きい）正の数 M に対しても，適当な（大きい）実数 $N(M)$ を見つけて，

$$\text{すべての } n > N(M) \text{ で，}\quad a_n > M \quad \text{とできる．} \tag{1.1.4}$$

（注）$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ や $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ の場合は，数列 (a_n) が収束するとは言わない．ただし，上のように「極限が無限大である」などとはいう．

1.1.1 少しでも理解を助けるために

上の定義 1.1.1 の意味するところは，自分でいろいろな例を作って納得するしかない．でも，理解を助けるために，少しだけ書いておこう．

1.「いくらでも大きくなる」（無限大になる）の表現． まず，「無限大」（一番大きい数）などは存在しない，ことを再確認しよう．なぜなら，一番大きい数があったとしたら，それに 1 を足したらもっと大きな数ができるから．だから，「n が無限大」とは「n がどんどん大きくなる状態」ととらえるしかない．これを有限の量のみを用いて表した結果が，**「適当に大きな N に対して，すべての $n > N$ では〇〇が成り立つ」**という表現だ．

この表現には有限の N しか出てこない．けども，「N より大きなすべての n」を考えることで，実質，「無限大」に大きな n を考えてることを噛み締めよう．

2.「いくらでも近づく」の表現. 数列 $a_n = 1/n$ はいつでも正（ゼロではない）だが，極限はゼロになる．このように,「その極限に（$n \to \infty$ で）いくらでも近づく」けれども「その極限には（有限の n では）等しくなれない」ものの表現にも注意が必要だ．ここも「n が無限大」と同様に，有限の量のみを用いて表したい．それを実現するのが，**「どんなに小さな $\epsilon > 0$ をとってきても,（n が大きくなっていくと，そのうちには）$|a_n - \alpha|$ が ϵ より小さくなる」**という表現だ.

ここにも有限，かつ正の ϵ しか登場しないが，この ϵ はこちらでいくらでも小さくとって行くのだ．$\epsilon = 10^{-6}$ より小さいか？ $\epsilon = 10^{-14}$ よりも小さいか？ $\epsilon = 10^{-200}$ なら？ … 「N が無限大」と同じく，ここでも勝手にとってきた（どんなに小さくても良い）ϵ を考えることで，実質的に「$|a_n - \alpha|$ がいくらでも小さくなる」ことを表現していることを噛み締めてほしい.

3. N と ϵ のかけあい さて，上の２つが非常にうまくむすびついて，いわば「掛け合い漫才」のように[11] なっていることをよくよく理解しよう.

a_n が α に近づくか否かは，その距離 $|a_n - \alpha|$ で測っている．この距離は n を十分に大きくしない限りゼロに近づかない（ことが多い —— 上の $a_n = 1/n$ の例を思い出せ）．そこで，本当にゼロに行くか否か判定するために，

「$\epsilon = 0.0001$ になれるか？」「$n > 100$ なら大丈夫」 （つまり，$n > 100$ なら $|a_n - \alpha| < 0.0001$）

「$\epsilon = 10^{-6}$ になれるか？」「$n > 20000$ としたら大丈夫」 （$n > 20000$ なら $|a_n - \alpha| < 10^{-6}$）

「$\epsilon = 10^{-12}$ ならどや？」「$n > 10^{20}$ で大丈夫」

「そしたら $\epsilon = 10^{-100}$ なら？」「それでも，$n > 10^{300}$ で大丈夫やで」

…

などといくらでも細かくしていけるかどうかを問うている訳だ．これがいくらでも小さい（つまり「任意の」）$\epsilon > 0$ でいけるのなら，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と言いましょう，というのが極限の定義.

逆に，上の問答がどこかで切れてしまうなら，例えば,

「$\epsilon = 10^{-300}$ でどうや？」「ううん，N をいくら大きくしても今度はムリ！」

となってしまったら，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とは言わないのだ.

4. N と ϵ の順序の問題 ϵ-N 論法で皆さんが戸惑う一つの理由は，N と ϵ の出てくる順番によると思われる．高校までの言い方は「n がどんどん大きくなると，a_n が α に近づく」または「n を大きくすると，$a_n - \alpha$ がゼロに近づく」というものだ．ϵ が $a_n - \alpha$ を表していたつもりだから，これは「$N \approx n$ が始めに出てきて，それから $\epsilon \approx |a_n - \alpha|$ が出る」構図である．ところが，ϵ-N 論法では順序が逆だ：「どんなに小さな ϵ に対しても適当な $N(\epsilon)$ があって」となっていて，ϵ が先，N が後.

この順序の逆転の理由は，以下のような例を考えるとわかるかもしれない．３つの数列を定義する（$n = 1, 2, 3, \ldots$）：

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad b_n = \frac{1}{\log(2 + \log(2 + \log n))}, \qquad c_n = \frac{1}{\log(2 + \log(2 + \log n))} + 10^{-8} \tag{1.1.5}$$

いくつかの n の値に対する，これらの数列の値を表にしてみると：

n	1	10	100	10^3	10^4	10^5	10^6	10^8	10^{16}
a_n	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-16}
b_n	1.00938	0.80577	0.73645	0.69834	0.67321	0.65494	0.64084	0.62006	0.57692
c_n	1.00938	0.80577	0.73645	0.69834	0.67321	0.65494	0.64084	0.62006	0.57692

a_n の方は順調にゼロに行ってるが（アタリマエ！），b_n と c_n は動きが非常にノロい！また，b_n はゼロに行き，c_n はゼロに行かないはずだが，それもここまでの n では違いが全くわからない.

この例からわかるのは「同じ nの値で比べると，数列によってはなかなかその極限の振る舞いが見えない」ということだ：a_n の方は $1/n$ だからまあまあ速くゼロに行くが，b_n は log が重なっている為に非常にゆっくりである．つまり,（アタリマエのことだが）考える数列に応じて，極限が見えやすいような大きな nをとってくる必要がある

[11] 学習院大学物理学教室の田崎晴明氏の用語

わけだ．数列 c_n に至っては，初めは減っていくがそのうちに 10^{-8} に漸近して止まってしまう訳で，n を大きくしたら収束が見えると思ってるとそのうちに裏切られる．

ここで困った理由は，n の大きさを同じにして（n を先にとって）3 つの数列を比べようとしたことにある．これを避けるためには，順序を逆転させて，N ではなくて ϵ を優先すれば良い．つまり，$|a_n-\alpha|$ が（勝手にとってきた，非常に小さい）ϵ より小さくなるかどうかを知りたいわけだから，**「$|a_n-\alpha|$ の大きさの目安である ϵ を先に決めて，これに応じて n がどのくらい大きければ良いのか」**を（またはいくら大きい n でも $|a_n-\alpha|$ が ϵ より小さくなれないのかを）考えるのが良い．これが ϵ-N 論法がこの順序で掛け合い漫才になっている理由である．

1.1.2 いろいろな例と定義の応用

この定式化の威力を知ってもらうには，下の命題 1.1.7 が良い例になってくれるだろう．しかしその前に，単純な例で具体計算をやって定式化に慣れる事が必要だ．以下の例をすべてやることを奨める．

問題 1.1.3 以下の数列が $n\to\infty$ で何に収束するのか（しないのか），よくよく納得すること．その場合，$N(\epsilon)$ がどのようにとれるのかを明示することが大切だ（いうまでもなく，$n=1,2,3,\dots$ である）．

$$a_n=3,\qquad b_n=\frac{1}{n},\qquad c_n=\frac{1}{\sqrt{n}},\qquad d_n=\frac{1}{n^2+1} \tag{1.1.6}$$

$$e_n=\begin{cases}1 & (n \text{ が } 10,10^2,10^3,10^4,10^5,10^6,\dots \text{ のとき})\\ 0 & (\text{上以外のとき})\end{cases} \tag{1.1.7}$$

(1.1.5) の 3 つの数列も同様に考えてみよう．もう少し複雑な例も挙げておくから，考えてみよう（$n\to\infty$）：

$$f_n=\frac{n+3}{n},\qquad g_n=\frac{\sin n}{n},\qquad h_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n},\qquad p_n=\frac{2n+1}{n+1},\qquad q_n=\frac{1}{\log(n+1)} \tag{1.1.8}$$

具体的計算に少し慣れたら，以下のほとんどアタリマエに見える性質を ϵ-N を用いて証明しよう．

問題 1.1.4 極限に関する以下の性質を ϵ-N 論法を用いて厳密に証明せよ．

- $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ のとき，$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$.
- $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta$.
- $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ （$\beta\neq 0$）のとき，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ ．この問題では分母の b_n がゼロになるかどうか，少し気になるところだ．実際，ある m では $b_m=0$ となるような数列 $\{b_n\}$ もあるのだが，それでもこの性質が成り立つと言えるだろうか？

問題 1.1.5 （論理に弱い人にはキツいだろうから，できなくてもがっかりしないこと）数列 $a_n=1+\dfrac{1}{n}$ はゼロには収束しない．このことを収束の定義に従って証明せよ．(「収束する」ことの定義は知っているから，その否定命題を考えればよい.）なお，以下の問題 1.1.6 を使って「この数列は 1 に収束するからゼロには収束しない」という証明も可能だが，これではなく，直接証明すること．

問題 1.1.6 （気がつけば簡単だが，これも慣れないと苦労するかも.）数列 a_n が $n\to\infty$ で収束することがわかっている．収束先はただ一つであることを証明せよ.(収束先が 2 つあるとすると，つまり，$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n=\beta$ であるとすると，結局は $\alpha=\beta$ であることを証明せよ.）証明すべき結論はアタリマエと思えるだろうが，そのアタリマエが証明できるかが問題だ．

少しは ϵ-N 論法に慣れたかな？ではこの辺りで，この論法の威力を示す命題を紹介しよう．この節の冒頭でも出したものである．

命題 1.1.7 数列 a_n から $b_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$ を定義する．$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ ならば，$\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$ である．