

2018.04.10.

## 微分積分学・同演習 A (S1-1 クラス, 理学部物理学科向け)

担当: 原 隆 (数理学研究院): 伊都キャンパス W1 号館 C-601 号室,

phone: 092-802-4441, e-mail: [hara@math.kyushu-u.ac.jp](mailto:hara@math.kyushu-u.ac.jp)

Office hours: 講義終了後に質問を受け付けます (そのうちに, 正式な office hours の時間を決めます). メールでの質問も歓迎.

**概要:** この講義は後期の「微分積分学 B」とあわせて完成し, 一年を通して『本格的な大学の微積分』を学ぶことを目的とする. 前期では特に, 「極限とは何か (その厳密な定義)」「1 変数関数の微分とその応用」「1 変数関数の積分」などを扱う. 後期では「多変数関数の微分 (偏微分)」「多変数関数の積分 (重積分)」および (時間があれば) 「級数論」を扱う予定.

前期でキーとなる概念: (偏微分), 極限, ( $\epsilon$ - $\delta$  論法とコーシー列), 微分, テイラー展開, 積分

後期でキーとなる概念: 偏微分, 重積分, 級数, (微分方程式)

**特に講義を通して身につけて欲しいこと:** この講義で学んでほしい「能力」は以下の 2 つである.

- (最低限) 微分や積分のいろいろな概念を習得し, 実際に応用して使えるようになること
- (可能ならば) 単にやり方を覚えるのではなく, 自分の議論に自信が持てるようになること.

高校までの数学では主に最初の面に力点が置かれていた. ところが, 昨今の中学, 高校でのカリキュラムの制約上, その最初の面ですら, 練習不足と思われる人が増えている. また, 「この問題はどのように解けば良い」ことは知っているけども, 「その方法がなぜ正しいのか」が説明できない人 (「本当にその方法が良いのか, 自信ある?」と問いかけると固まってしまう人) も多いようだ. 一方, 物理学科では (特に理論系) 将来, 少し高度な数学を要する面があり, その場合には, **自分で自信を持って議論を組み立てる能力**が不可欠となる. そこで, この講義ではこれまでの練習不足を補いつつ, 自信を持って議論を組み立てられる人を養成することを目指す.

**内容予定:** (以下は大体の目安で, 「回数」はいい加減です. 皆さんの理解度により, かなりの変更や増減あり. 太字は特に高校よりも新しく重要な概念です — 必ずしも試験での比重が高いわけではないが.)

0. 物理などの講義のために「偏微分」の記号の説明 (初回に定義のみ; 偏微分は後期にちゃんとやります.)

I. 極限, 実数の連続性, 関数の連続性 (4 回程度)

1. 極限の厳密な定義:  $\epsilon$ - $N$  論法,  $\epsilon$ - $\delta$  論法 (教科書 2.1 節).
2. 実数の連続性, 有界単調列の収束, **コーシー列** (教科書 2.2 節前半と 4.1 節の最初)
3. 連続関数の定義, 最大値最小値の定理, **中間値の定理** (教科書 2.2 節後半)

II. 1 変数関数の微分 (4 回程度)

1. 微分の厳密な定義 (定義だけ) と **平均値の定理** (教科書 2.3 節)
2. 関数の増減と凹凸 (教科書 2.4 節)
3. テイラーの定理と **テイラー展開** (教科書 2.5 節) ← 案外, 引つかかるかもしれないから要注意

この辺りで中間試験

III. 1 変数関数の積分 (4 回程度)

1. いくつかの基本概念 (一様連続性, 上限と下限; 教科書 3.1 節)
2. **定積分の定義** (教科書 3.2 節)
3. 定積分の基本性質 (教科書 3.3 節)
4. 数  $e$  および指数関数, 対数関数 (教科書 3.4 節)
5. 広義積分

この辺りで期末試験の予定

**教科書:** 斎藤正彦「微分積分学」(東京図書). 一年生には難しく感じられる部分も多いかもしれませんが, 将来, 特に理論物理に進んだ人には頼りになる教科書です.

**参考書：**上の教科書が合わないという人には、以下の本をお薦めします。また、この講義専用の講義ノートを紹介つづけて、僕の web page に上げます。

- 野村隆昭「微分積分学講義」(共立出版)。九大の数学科の先生が書いた本。進んだ面白い話題も入っているが、語り口は柔らかく、読みやすい。
- 高木貞治「解析概論」(岩波)。今の学生さんには難しすぎる、との意見もあるが、不朽の名著だ。超お奨め。
- 小平邦彦「解析入門 I, II」(岩波)。上の解析概論を少しとっつきやすくした感じ。激しくお奨め。
- 杉浦光夫「解析入門 1, 2」(東大出版会)。かなり分厚いけど、その分、記述は丁寧。お奨め。
- 僕の友達(田崎晴明さん)の書きかけの本「数学：物理学を学び楽しむために」。激しく超お奨め!! 彼の web page (<http://www.gakushuin.ac.jp/~881791/mathbook/>) からダウンロードできる。

**評価方法：**中間試験 (+レポート)と期末試験の成績を総合して評価する。そのルールは以下の通り：

- 最終成績は一旦、100点満点に換算してから、この大学の様式に従ってつける。
- その100点満点(最終素点)は、以下のように計算する。
  - － まず、「中間試験 (+レポート) の点」「期末試験の点」をそれぞれ100点満点で出す。
  - － 次にこの2つを以下の式で「平均」し、一応の総合点を出す：

$$(\text{総合点 } A) = 0.50 \times (\text{中間 (+レポート) の点}) + 0.50 \times (\text{期末の点})$$

$$(\text{総合点 } B) = 0.10 \times (\text{中間 (+レポート) の点}) + 0.90 \times (\text{期末の点})$$

- － ただし、上の重みを若干変更する可能性はある(総合点 A で、中間と期末の比を 4:6 にするなど)。
- － 最終素点は

$$(\text{最終素点}) = \max\{(\text{総合点 } A), (\text{総合点 } B)\}$$

とする。つまり、(総合点 A) と (総合点 B) を比べて、良い方をとるのだ。

- 上の「最終素点」に、必要ならば全体に少し修正を加えたものをつくり、最終成績を出す。(例外：以下の但し書きを参照)
- レポートの点は原則として、総合点 A, B には加えない。ただし、上の計算では合格基準に少し足りない人(百点満点で10点不足が限度)を助けるかどうかにかんして使用する。また、レポートがずば抜けて良い場合、この事実は最終成績に反映される事もある。

**(A をとるための重要な但し書き)** 期末試験ではあまり冒険をする訳にはいかず、(A と B の区別をつけるような) 極端に難しい問題は出題しにくい。そのため、中間試験にも A, B の峻別を行う機能のある程度持たせて、**中間・期末ともに成績優秀**な人(のみ)、A をあたえるようにする可能性がある —— 特に、期末を簡単にしすぎた場合はこうなる。この意味で、上の(最終素点)の式は完全には正しくなく、A をとるためには期末だけでの一発逆転は無理かも知れない。A を狙って頑張る人はこの点を考慮して、中間・期末とも確実に受験してほしい。

### 「学習到達度再調査」について：

この大学には「学習到達度再調査」とかいう、変な制度がある。この科目は必修科目でもあり、これに更に期待する人がいるかもしれないので、ここではっきり、宣言しておこう。

「再調査」は行わない可能性もある。再調査を行うか、誰を対象とするかは、**こちらの一存で**(もちろん公平に、しかし厳しく)決めさせていただく。

本音を言うと、再調査をする方が、こちらとしては厳しく点を付けやすい(厳しくつけておいて、誰を助けるかは再調査できちんと確かめれば良いから)。その分、皆さんには過酷なものになるでしょう。

だから、再調査には頼らず、期末試験まででちゃんと合格できるよう、しっかり学習して下さい。**期末試験までなら**皆さんの学習を助ける努力は惜しまないつもりで、質問などにも忍耐強く相手することを保証する。

## 合格 (最低) 基準:

合格のための条件 (A, B がとれる条件ではない!) は、**講義中に**出題する例題、レポート問題と同レベルの問題が解けることである。(ただし「時間がなくてレポートは出せないけど試験には出さず」などの指示を講義中に与えることもあり得る。) 具体的には**大体**、以下ようになる (進度の都合で内容に若干の変更があるので、完全なリストを現時点で呈示する事はできないが、講義を追っておれば明らかになるはず)。

- 1 変数関数の微分とその応用について、厳密性を少し犠牲にしても良いから、計算ができること (具体的には、導関数の計算、函数の増減と極値問題、逆関数の計算、テイラー展開など)。
- 1 変数函数の積分とその応用についても、厳密性を少し犠牲にしても良いから、計算ができること。

## レポート、宿題について:

ほぼ毎回、簡単なレポートや「お奨めの宿題問題」を出す予定である。このレポートはレポートボックスに提出してもらい、採点ののち、次の講義時に返却の予定 (詳細は来週)。これらの出題意図は「この程度できれば講義についていけるし、合格も可能だ」という目安を与えることと家庭学習の引き金にすること、である。成績評価に占めるレポートの比重は低いが、この講義をこなす上では重要な意味があるので、是非やること。

**重要: レポートは友達と相談した結果を書いても良い。ただし、誰と相談したかは明記すること。** (「俺は人に教えてやっただけで人からは全く教わってない」と思う人は書かなくても良いが。) 相談した人の名前を書かせるのは、「お世話になった文献、人にはきちんと感謝する」という、学問上の最低ルールを守ってもらうためである。なお、お世話になった人の名前を書いてもレポートの成績が不利になることはない。

## プリントの使いかた:

例年、僕は講義でプリントを配っていた。これらのプリントは板書にアップアップしないでも講義が聴けるように、また、教科書の足りないところを補うためだった。

ところが、毎回プリントを印刷するのはなかなか大変だし、講義の前にプリントがほしい、と言う声もあった。

このような理由のため、数年前から**講義の補助プリントはこの講義の web page に上げておいて、皆さんに自由にダウンロードしてもらおう方法に変更し**、講義では最低限のプリント (日々のレポート問題など) のみを配ることとする。この講義のアドレスは <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/18/biseki01a-web.html> だが、「九大 原隆」で検索して僕の web page を見つけた後、下の方の「講義」をクリックすれば、講義の一覧が出る。

なお、プリントにはタイプミスなどがかかなりあると思うので、気づいたらできるだけ指摘してくれるとありがたい。

## 特に注意を要する題材:

1. この講義で一番難しいであろうことは、**極限の厳密理論**で、かなりの人が戸惑うでしょう。これはそんなに難しいものではなく、ゆっくり考えればさえすれば誰でも理解できます。また、将来、とくに理論系に行く人の半分くらいは、この程度が使えることが望ましいと思います。

しかし、新学期早々にここで立ち直れなくなっても困るので、これは最低限に絞りました。興味のある人は、個別に質問するなど、して下さい。

2. この講義の大きな目的は「使える微積分を学ぶ」ことで、**実際に手を動かす** (計算する) ことが大事です。

3. この講義の大半は、「高校でやったことのやり直し」に見えるかもしれませんが、ここに落とし穴があります。色々な題材が、少しずつ進化していて、**油断していると全くわからなくなってる**可能性がありますから、注意。

4. **テイラー展開**は高校では見なかったはずのもので、案外とまどう人が多いことに気づきました。一見簡単そうですが、油断しないで下さい。

## この科目に関するルール:

世相の移り変わりは激しく、僕が学生だったときには想像すらできなかったことが大学で行われるようになりました。そのうちのいくつかは良いことですが、悪いこともあります。皆さんの反発は覚悟の上で、互いの利益のために、以下のルールを定めます。

- まず初めに、学生生活の最大の目的は勉強することであると確認する。

- 講義中の私語、ケータイの使用はつつしむ。途中入室もできるだけ避ける（どうしても必要な場合は周囲の邪魔にならないように）。これらはいずれも講義に参加している他の学生さんへの最低限のエチケットです。
- 僕の方では時間通りに講義をはじめ、時間通りに終わるよう心がける。
- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義を通して行う（補助として僕の web page も使う —— アドレスは <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html>）。「講義に欠席したから知らなかった」などの苦情は一切、受け付けない。
- レポートを課した場合、その期限は厳密に取り扱う。
- E-mail による質問はいつでも受け付ける ([hara@math.kyushu-u.ac.jp](mailto:hara@math.kyushu-u.ac.jp))。ただ、回答までには数日の余裕を見込んで下さい。なお、学生さんのメールが往々にして spam mail に分類されてしまう事があります。見分け易いように、題名には「物理学科の〇〇です」などと書いて下さい。また僕にメールしたのに、2, 3日しても返事がない場合は返事を催促して下さい。たとえどんなに理不尽（例：人格攻撃）なメールであっても、僕は返事はすることにしています。返事がないのはメールが届いていない可能性が高いです。

### 演習書の奨め：

教科書の例題や節末問題、章末問題はできるだけやること。それでもわかった気がしなかったら、演習書（いわゆる問題集）をやることを勧めます。問題をやることによって、自分が曖昧にしかわかっていなかった部分がかきりしてくることが多い。ただし、その際、**解答を鵜呑みにはせず、自分で納得するまで考えること。考えてもわからなかったら、友達や教官（僕を含む）に訊けばよい。**同じ理由で問題の解答を頭から覚える愚だけは避ける事。演習書はどれでも良いが、一応、目についたものを列挙すると：

- 三村征雄編「大学演習 微分積分学」（裳華房）— 僕はこれを使った。ちょっとムズイかもね。
- 蟹江、桑垣、笠原「演習詳説 微分積分学」（培風館）— なかなか良いが、はじめは難しく感じるかも。
- 杉浦ほか「解析演習」（東大出版会）— これもまあ、大変ではありますが、良い本。
- 鶴丸ほか「微分積分 — 解説と演習」（内田老鶴圃）— 一番「普通」かも。
- 飯高茂監修「微積分と集合 そのまま使える答えの書き方」（講談社サイエンティフィック）— 題名は変だけど、馬鹿にはできない、なかなかの本。流石は飯高さん監修だけあるな。案外、おすすめ。

これ以外にもいくらでも出版されてるから、図書館や本屋さんで自分にあった（読みやすい、やる気になる）ものを選べば良い。ただしその際、解答や解説の詳しいものがよい。また、無理をして難しすぎるものを選ぶ必要はない。自分が簡単だと思うことでも、（人間はアホやから）わかってないことが一杯あり、むしろ簡単ところが盲点になって先に進めないのだ。簡単な演習書でもやれば、大きな効果があるはず。

### 本論に入る前に記号のお約束。

$a < b$  を 2 つの実数、 $n$  を非負（負でない）整数とする。

- 整数の全体は  $\mathbb{Z}$ 、自然数（1 以上の整数）の全体を  $\mathbb{N}$ 、有理数の全体を  $\mathbb{Q}$ 、実数の全体は  $\mathbb{R}$  と書く。
- 集合  $A$  の要素を大学では「元（げん）」ともいう。（例）2 は  $\mathbb{Z}$  の元である。 $\sqrt{2}$  は  $\mathbb{Q}$  の元ではない。
- 高校までと異なり、「 $a < b$  または  $a = b$ 」を  $a \leq b$  と書く。同様に、「 $a > b$  または  $a = b$ 」を  $a \geq b$  と書く。
- $a < x < b$  なるすべての実数の集合を  $(a, b)$  と書き、开区間という。教科書ではこの开区間に変な記号（括弧のうえに  $\circ$  がついてる）を使ってるが、打ち込むのが大変だし、標準的ではないので使わない。
- $a \leq x \leq b$  なるすべての実数の集合を  $[a, b]$  と書き、閉区間という。
- 高校と同じく、 $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$  は  $n$  の階乗である。ただし、 $0! = 1$  と約束する。

（用語の注）あるものがたった一通りに決まる（存在する）とき、業界用語では  $\circ\circ$  が一意に決まる（存在する）という。この表現『一意』は頻出するから覚えよう（英語の unique, uniquely の訳）。

4月17日:今日は極限の話. 厳密な話は「これぞ大学の数学」ですが, ちょっと難しく感じる人もいます. その場合には諦めずに「高校のノリに毛の生えた程度」でも良いから大筋をつかむようにして下さい.

**第1回レポート問題:**今回は極限について, 簡単な計算(高校の復習), および少しだけ厳密な話です. 問1で問題番号や数列の名前が変なのは, 「講義ノート」と同じにしたためです. なお, \*印のついた問題は進んだ話題なので, できなくても悲観するには及びません.

**問1:**以下の数列の  $n \rightarrow \infty$  での極限を, 高校のノリで(厳密性にはあまりこだわらずに)求めよ. ただし, 極限の存在しない数列も混じっているかもしれないよ.

$$g_n = \frac{\sin n}{n} \quad h_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad p_n = \frac{2n+1}{n+1} \quad q_n = \frac{1}{\log(n+1)} \quad (1)$$

以下は極限の厳密な定義に関する, 少し進んだレベルの問題である. できなくても悲観する必要は全くない. でもみんな, 一度は挑戦してほしい.

**問2\*:**「すべての  $\epsilon > 0$  に対して」の意味を実感する問題. 以下の (i),(ii) のうち, どれが正しくてどれが正しくないか, 判定せよ. 正しくないと思うものには反例(正しくない例)を与えよ. ( $a, b$  は未知の定数で, もちろん,  $\epsilon$  には依存しない).

$$(i) \text{ (すべての } \epsilon > 0 \text{ に対して } |a-b| < \epsilon) \implies a=b$$

$$(ii) \text{ (ある } \epsilon > 0 \text{ に対して } |a-b| < \epsilon) \implies a=b$$

**問3\*:**以下の小問に答えよ.(本当は  $n$  は正の整数のつもりだが, 小問 1), 2) では  $n$  は正の実数と思って良い. つまり, 条件を満たすような正の実数  $n$  の範囲を求めればよい.)

1)  $\frac{1}{\sqrt{n}} < 10^{-2}$  となる  $n$  の範囲を求めよ.

2)  $\epsilon > 0$  を非常に小さい正の実数として,  $\frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$  となる  $n$  の範囲を  $\epsilon$  を用いて表せ.

3) 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  を,  $\epsilon$ - $N$  論法を用いて求めよ. その際,  $N(\epsilon)$  をどのようにとれば良いかを明記する事.

**番外問題:**これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ, わかりにくかったところ, 講義への要望などがあれば自由に書いてください. また, 質問があれば, それもどうぞ. この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから, 次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります.

**レポート提出について:** レポートには 学生番号と氏名を明記 のうえ,

4月23日(月)の13:00までに, 基幹教育事務室のレポートボックス4番に

入れて下さい. 整理の都合上, 用紙はA4(この用紙と同じ大きさ) を使ってください(B5だとなくなっても知らんぞ). また, 2枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくださる.