微分積分続論　講義ノート (2010 年，理学部数学科 2 年用，担当：原隆)

1　重積分

まずは，多変数函数の重積分について学びましょう．

1.1　１変数関数の積分

この小節の内容は完全に一年生のものである．しかし，リーマン積分の定義を一年のときの教科書と少し異なったものにしたいこと，および，以下の議論は重積分でも全く同じ形で出てくること，を考慮してここに書いておくことにした．2 年生の内容は次の 1.2 節から始まるので，そこまで跳ばしても全く問題ない．

まず，一年生までの復習をも兼ねて，「1 変数関数の積分」を簡単に見ておこう．このところがはっきりしていれば，この講義で出てくるいろんな積分など簡単なはず．

$f(x)$ を適当な（例えば連続な）関数とし，簡単のために $f(x) > 0$ としておこう．$a < b$ を定めたときの定積分 $\int_a^b f(x)dx$ とは直感的には区間 $[a, b]$ 上での $y = f(x)$ のグラフと x-軸との間の図形の面積である（$f(x)$ が負のときはもちろん，面積の符号を変えたもの）．この積分の数学での定義は以下のようなものだった．

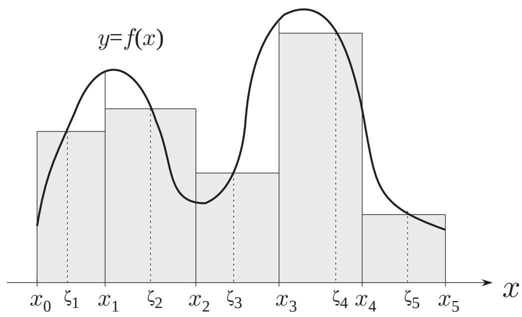
定義 1.1.1 (定積分) $a < b$ と．区間 $[a, b]$ で定義された関数 $f(x)$ に対して，定積分 $\int_a^b f(x)dx$ を以下のように定義する（下図を参照）．

- まず，区間 $[a, b]$ を n 個（n は大きな整数）の小区間に分ける：$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. これを区間 $[a, b]$ の <u>分割</u> といい，Δ で表す．できる小区間は $[x_{i-1}, x_i]$ である（$i = 1, 2, \ldots, n$）．小区間の幅の最大値を $|\Delta|$ と書く：$|\Delta| = \max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$.
- 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ に勝手に点 ζ_i をとる（$i = 1, 2, \ldots, n$）．簡単のために $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ をまとめて $\vec{\zeta}$ と書く．
- 上のように決めた Δ と $\vec{\zeta}$ に対して，f の**リーマン和**
$$R(f; \Delta, \vec{\zeta}) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i) \times (x_i - x_{i-1}) \tag{1.1.1}$$
を定義する．
- さて，$|\Delta| \to 0$（区間の幅がゼロ）を満たすような任意の Δ と，Δ に対して上のようにとった任意の $\vec{\zeta}$ を考える．$|\Delta| \to 0$ の極限で $R(f; \Delta, \vec{\zeta})$ の値が（$\Delta, \vec{\zeta}$ の取り方によらず）一定の値に**近づくならば**，$f(x)$ **は** $[a, b]$ **上で積分可能**（または**可積分**）といい，その極限値を定積分 $\int_a^b f(x)dx$ の値と定める．模式的に数式で書けば
$$\int_a^b f(x)dx \equiv \text{“}\lim_{|\Delta|\to 0}\text{”}\ R(f; \Delta, \vec{\zeta}) \tag{1.1.2}$$
とするのである（上の極限はかなり複雑なので “ ” を付けた）．

なお，$a = b$ の場合は $\int_a^a f(x)dx = 0$ と定義する．

また，$a > b$ の場合は $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ と定義する．($a > b$ の時の定義はもちろん，$\int_b^a f(x)dx$ が定義できる時のみ有効である.）このようにして定義した積分をリーマン式積分，または**リーマン積分**という．

$f(x) > 0$ の場合の模式図（$n = 5$）を以下に示した．図で陰をつけた部分の面積がこの場合の $R(f; \Delta, \vec{\zeta})$ である．



上の極限値はいつもあるとは限らない．例えば，

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ が有理数の時}) \\ 1 & (x \text{ が無理数の時}) \end{cases} \qquad \text{に対して} \qquad \int_0^1 f(x)dx \tag{1.1.3}$$

を考えても，これは定義できない．（このような関数に対しても「積分」を定義しよう，というのが「ルベーグ積分」なのであるが，この講義ではルベーグ積分は扱わない．）

ともかく，定積分の基本は，グラフの下の図形を細い短冊の和で近似する，ということなのだった．これからいろいろな積分が出てくるが，これらはすべて，上のような意味での「うまく近似した和の極限」として理解すべきものである．

1.1.1 定積分はいつ定義できるのか？

二重積分でも同様の議論を行うので，リーマン積分の厳密な構築を説明する．その際にキーになるのは

- 定積分は定義できなくても，**「上積分」「下積分」はいつでも定義**できること（Darboux の定理，定理 1.1.2）
- 定積分が定義できる必要十分条件は**上積分と下積分の値が等しい**こと（定理 1.1.3）
- 定積分が定義できる十分条件の一つは f **が連続関数であること**（定理 1.1.4）

である．特に 3 番目の「連続関数は可積分である」は非常に重要だから，結果だけでも頭に叩き込んでおくように！

まず，「上積分」などの定義から始めよう．ここでは区間 $[a,b]$ で定義された有界な関数 $f(x)$ に話を限る．

- 分割 Δ に対して以下のように定義する：区間 $[x_{i-1}, x_i]$ における $f(x)$ の下限と上限を $m_i(f;P), M_i(f;P)$ と書く．そして

$$\underline{R}(f;\Delta) \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i(f;P) \times (x_i - x_{i-1}), \qquad \overline{R}(f;\Delta) \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i(f;P) \times (x_i - x_{i-1}) \tag{1.1.4}$$

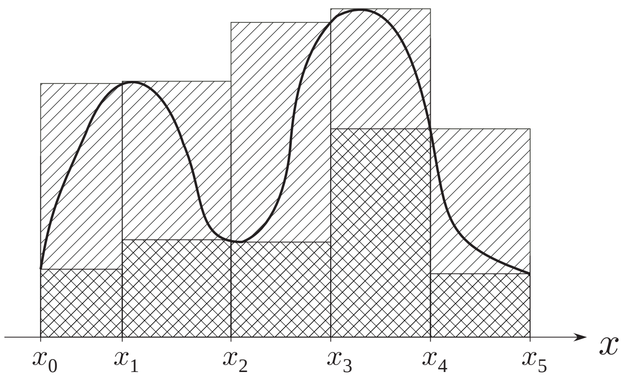
  を定義する．$\underline{R}(f;P)$ を下限和，$\overline{R}(f;P)$ を上限和という．

- 更に，様々な細かさの Δ を考え，

$$\underline{R}(f) = \sup\{\underline{R}(f;\Delta) \,\big|\, \Delta \text{ は } [a,b] \text{ の分割 }\}, \qquad \overline{R}(f) = \inf\{\overline{R}(f;\Delta) \,\big|\, \Delta \text{ は } [a,b] \text{ の分割 }\} \tag{1.1.5}$$

  も定義する．$\underline{R}(f)$ を 下積分，$\overline{R}(f)$ を 上積分 という．

$n=5$ の場合の例を以下に示した．右上から左下への斜め斜線のところの面積が上限和，左上から右下への斜め斜線のところの面積が下限和である．ただし，図では下限和に相当する部分は両方の斜め線が入って十文字の模様になっている．



上の定義から，分割内の分点 $\vec{\zeta}$ の取り方にかかわらず，

$$\underline{R}(f;\Delta) \le R(f;\Delta,\vec{\zeta}) \le \overline{R}(f;\Delta) \tag{1.1.6}$$

であることに注意しておこう（上の２つの図を比べてみよ）．

以上の準備の下に，リーマン積分に関する基本的な定理を述べることが出来る（定理の証明は後で）．まず，1 つめの定理は，$\underline{R}(f;\Delta)$ や $\overline{R}(f;\Delta)$ は，それぞれが極限を持つことを保証する．

定理 1.1.2 (1 次元積分に対する Darboux の定理) 分割 Δ を限りなく細かくする（$|\Delta| \to 0$）とき，下限和と上限和はそれぞれ一定の値に収束し，その行き先は (1.1.5) で定義された $\underline{R}$ と $\overline{R}$ である．つまり，

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \underline{R}(f;\Delta) = \underline{R}(f), \qquad \lim_{|\Delta|\to 0} \overline{R}(f;\Delta) = \overline{R}(f) \tag{1.1.7}$$

がなりたつ.（ただし，$\underline{R}(f) = \overline{R}(f)$ とは限らない.）

では，上積分・下積分と積分可能性の関係はどうか？それぞれの Δ に対しては $\underline{R}(f;\Delta) \le \overline{R}(f;\Delta)$ だったから，

$$\underline{R}(f) \le \overline{R}(f) \tag{1.1.8}$$

であることはわかる．問題は上積分と下積分がいつ等しいかだ — 関数 f や区間 $[a,b]$ の取り方によってはこの２つは等しくないこともある．しかし，この２つが等しいことは定義 1.1.1 の積分可能性と同値だ，というのが次の定理である．

定理 1.1.3 (1 次元積分の積分可能性の必要十分条件，教科書ではこれを積分可能の定義にしている) f が区間 $[a,b]$ 上で積分可能である必要十分条件は，上積分と下積分が一致することである．つまり

$$\underline{R}(f) = \overline{R}(f) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \text{ は可積分で，} \int_a^b f(x)dx = \underline{R}(f) = \overline{R}(f) \tag{1.1.9}$$

これで積分可能性の一般論はおしまいである．しかしこのままでは，与えられた関数に対して上積分，下積分を計算しないと積分可能かどうかがわからない．これは不便だから，積分可能性の簡単な十分条件を挙げておく：

定理 1.1.4 (連続関数は積分可能) 関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ 上で連続なら，f は $[a,b]$ 上で積分可能である．また，有限個の点を除くと連続な場合も積分可能である．

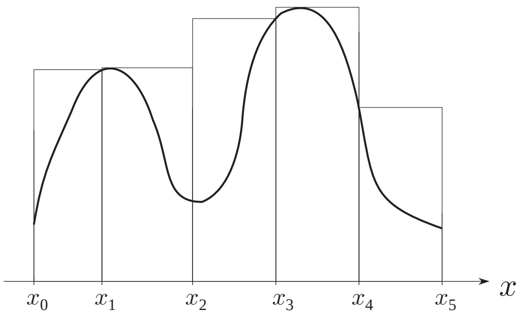
1.1.2 定理 1.2.2 と定理 1.2.3 の証明

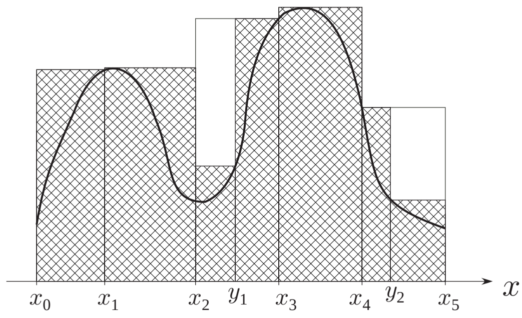
定理 1.2.2 の証明の基本になるのは，以下の性質である．定理 1.2.3 の方は定理 1.2.2 からすぐに出る．

補題 1.1.5 $\overline{R}(f;\Delta)$ は，分割を細かくすると減少する．より正確にいうと，区間 $[a,b]$ の勝手な分割 Δ_1, Δ_2 をとってきて，これを合わせた（つまり，両方の分割の分点を全部集めた）分割を $\Delta_{12} = \Delta_1 \cup \Delta_2$ と書くと，$\overline{R}(f;\Delta_{12}) \le \overline{R}(f;\Delta_1)$ および $\overline{R}(f;\Delta_{12}) \le \overline{R}(f;\Delta_2)$ である．
同様に，$\underline{R}(f;\Delta)$ は分割を細かくすると増加する．

（注）上ではわかりやすいようにわざと不正確な書き方をしたが，本来は「$\overline{R}(f;\Delta)$ は，分割を細かくすると<u>増加しない</u>」と書くべきであった．同様に，「$\underline{R}(f;\Delta)$ は，分割を細かくすると <u>減少しない</u>」が正しい．

この補題は，$\overline{R}(f;\Delta)$ の定義からほとんどあたりまえである．以下にこの事情を図で例示した（図では分割を Δ ではなく P と書いている）．





P_1 $\qquad\qquad$ $P_1 \bigcup P_2$

左側の図 (の長方形の下の面積) が $P_1 = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ のみの場合の $S(f;P_1)$ である．一方，$P_2 = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ を考えると（$y_0 = a, y_3 = b$），右側の図の陰をつけた部分の面積が $P_1 \cup P_2$ の場合の $S(f;P_1 \cup P_2)$ である．図に示すように，白い２つの長方形の部分だけ，$S(f;P_1 \cup P_2)$ が小さくなっている． □

以下ではこの補題を用いて定理 1.2.2 と定理 1.2.3 を証明する．

定理 1.2.2 の証明 $\overline{R}$ の方のみ，証明する．$\underline{R}$ のほうも，いくつかの不等号の向きが逆になるだけで同じだ．

ちょっと考えると，定理 1.2.2 は当たり前に思える．なぜなら，補題 1.2.5 より，$\overline{R}(f;\Delta)$ は単調減少っぽく見えて,「有界な単調減少列は極限を持つ」からだ．しかし，これは**早とちり**だ．というのは，補題 1.2.5 は「Δ をより細かくしたら $\overline{R}(f;\Delta)$ は非増加」と言っているだけで，**他の分割から出発して**細かくした行き先が，この Δ から出発した行き先と**等しいかどうか**は保証の限りではない．この問題を解決するため，以下のように進む．

まず inf としての $\overline{R}(f)$ の定義から，どんな分割 Δ に対しても $\overline{R}(f) \le \overline{R}(f;\Delta)$ であることに注意しておこう：

$$\forall\Delta, \quad \overline{R}(f) \le \overline{R}(f;\Delta). \tag{1.1.10}$$

また，$S(f)$ は $S(f;P)$ の inf であるから，$\overline{R}(f)$ と $\overline{R}(f;\Delta)$ の差がいくらでも小さくなるような分割 Δ もある：

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\Delta, \quad \overline{R}(f;\Delta) \le \overline{R}(f) + \epsilon. \tag{1.1.11}$$

問題は，(1.2.11) が $|\Delta'| \to 0$ なる任意の Δ' に対して成り立つか，つまり

$$(??) \qquad \forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0, \quad |P'| < \delta \implies \overline{R}(f;\Delta') \le \overline{R}(f) + \epsilon \qquad (??) \tag{1.1.12}$$

となっているか，ということである．

そこでまず，任意の（小さな）$\epsilon > 0$ を固定し，十分に細かい分割 Δ を，

$$\overline{R}(f;\Delta) \le \overline{R}(f) + \frac{\epsilon}{2} \tag{1.1.13}$$

となるように定める．次に，更に十分細かい分割 Δ' を,「Δ' の各ブロック内に Δ の分点が高々一つしかない」ようにとる．これは $|P'|$ を「P の一番細い区間の幅」より小さくとれば，絶対に実現できる．次に，Δ と Δ' を合わせた分割を考えると，これは Δ, Δ' よりも細かいので，細かい方の $\overline{R}$ の値が小さくなる：

$$\overline{R}(f;\Delta\cup\Delta') \le \overline{R}(f;\Delta). \tag{1.1.14}$$

一方，n を Δ の分点の数，M, m は $[a,b]$ 内での f の上限と下限とすると，

$$\overline{R}(f;\Delta') - \overline{R}(f;\Delta\cup\Delta') \le n(M-m)|\Delta'| \tag{1.1.15}$$

が成り立つ．なぜなら，左辺の差への寄与は Δ' の分割ブロック中に Δ の分点が入っているときのみゼロでないが，このような分点の数は最大で n 個しかなく，そのような一つのブロックからの寄与は $(M-m)|\Delta'|$ で押さえられるからだ（ここのところは図で納得するのがよい）．(1.1.14) と (1.1.15) から

$$\overline{R}(f;\Delta') \le \overline{R}(f;\Delta\cup\Delta') + n(M-m)|\Delta'| \le \overline{R}(f;\Delta) + n(M-m)|\Delta'| \tag{1.1.16}$$

が結論できた．これと (1.1.13) を組み合わせると

$$\overline{R}(f;\Delta') \le \overline{R}(f;\Delta) + n(M-m)|\Delta'| \le \overline{R}(f) + \frac{\epsilon}{2} + n(M-m)|\Delta'| \tag{1.1.17}$$

が得られる．さてここで Δ' を十分細かく，$n(M-m)|\Delta'| < \epsilon/2$ となるようにとると（ここで，n は Δ のみで決まり，Δ' には関係ないことが効いている），

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0,\quad \Bigl(|\Delta'|<\delta \implies \overline{R}(f;\Delta') \le \overline{R}(f)+\epsilon\Bigr) \tag{1.1.18}$$

が言える．よって，(1.1.12) が結論できる． □

定理 1.1.3 の証明

（十分であること）Darboux の定理の証明中，任意の $\epsilon>0$ に対して，$\delta>0$ がとれて，

$$|\Delta|<\delta \text{ ならば } \quad \overline{R}(f;\Delta) < \overline{R}(f)+\epsilon \quad \text{かつ} \quad \underline{R}(f;\Delta) > \underline{R}(f)-\epsilon \tag{1.1.19}$$

であることを見た — (1.1.18) 式．ところで，その定義から，リーマン和は

$$\underline{R}(f;\Delta) \le R(f;\Delta,\vec{\zeta}) \le \overline{R}(f;\Delta) \tag{1.1.20}$$

を満たす．従って，$|\Delta|<\delta$ である限り，どんな分割でも，どんな分点 $\vec{\zeta}$ の取り方に対しても，

$$\underline{R}(f)-\epsilon \le \underline{R}(f;\Delta) \le R(f;\Delta,\vec{\zeta}) \le \overline{R}(f;\Delta) \le \overline{R}(f)+\epsilon \tag{1.1.21}$$

が成り立つことがわかる．ここでもし，定理の仮定のように $\underline{R}(f)=\overline{R}(f)$ であれば，$\delta\downarrow 0$ として（このとき，もちろん $\epsilon\downarrow 0$）

$$\lim_{|\Delta|\to 0} R(f;\Delta,\vec{\zeta}) = \underline{R}(f) = \overline{R}(f) \tag{1.1.22}$$

が結論できる．リーマン和の極限が確定するから，積分可能である．

（必要であること）ほとんど自明である．(対偶を証明) $\overline{R}(f)-\underline{R}(f)=c>0$ と仮定すると，sup, inf としての定義から，

$$\underline{R}(f;\Delta) \le \underline{R}(f) = \overline{R}(f)-c \le \overline{R}(f;\Delta')-c \tag{1.1.23}$$

が勝手な Δ, Δ' に関して成り立つ．つまり，いくら頑張っても $\overline{R}(f;\Delta)$ と $\underline{R}(f;\Delta')$ のギャップを埋めることはできず，リーマン和の極限が存在しない（そのような分点をいくらでもとれる）．従って積分不可能である． □

1.1.3 定理 1.1.4 の証明

一様連続性がわかれば，証明は簡単だ．

定理 1.1.4 の証明

定理 1.1.3 を考えに入れると，$\underline{R}(f) = \overline{R}(f)$ が言えれば定理 1.1.4 の証明には十分だ．そのためには，

$$（？）任意の\epsilon > 0 \text{ に対して，} 0 \le \overline{R}(f;\Delta) - \underline{R}(f;\Delta) < \epsilon \text{ なる分割 } \Delta \text{ がとれる} \tag{1.1.24}$$

ことを証明すればよい．以下ではこれよりも強い，

$$（？）\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \qquad \Bigl(|\Delta| < \delta \implies 0 \le \overline{R}(f;\Delta) - \underline{R}(f;\Delta) < \epsilon \Bigr) \tag{1.1.25}$$

を証明しよう．さて，積分領域の長さは $b - a$ なので，$\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{b-a}$ とおく．f の一様連続性から $\delta > 0$ が存在して，

$$|x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon' \tag{1.1.26}$$

とすることができる．そこで，分割 Δ を，$|\Delta| < \delta$ となるようなものにとろう．この分割は十分小さいので，同じ小区間 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ に属する x, y は $|x - y| < \delta$ を満たしており，したがって $|f(x) - f(y)| < \epsilon'$ も満たされる．よって，I_i 上での f の上限 M_i と下限 m_i は $0 \le M_i - m_i \le \epsilon'$ を満たす．これを i について和をとると，

$$0 \le \overline{R}(f;P) - \underline{R}(f;P) = \sum_i (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_i \epsilon'(x_i - x_{i-1}) = \epsilon' \, |b - a| = \epsilon \tag{1.1.27}$$

が得られる．つまり，(1.1.25) が証明できた．メデタシメデタシ． □

1.2 ２重積分の定義とその意味（長方形の領域上で）

２重積分は単に「重積分」ということも多い．まず，重積分で何をやりたいのか，考えてみよう．

2 変数 x, y の関数 $f(x,y)$ が与えられている（例：$f(x,y) = xy$）．また，xy-平面上の長方形の領域 $A = \{(x,y) \,\big|\, a \le x \le b, c \le y \le d\}$ も与えられている．そのとき，関数 f の領域 A 上での積分 $\displaystyle\iint_A f(x,y)dxdy$ を定義したい．もともと積分は「グラフの下の図形の面積」を表すものだったから，そのノリを保って，以下のように考える．（実際，この定義が自然で役に立つことはこれから見ていく．）—— ここのところはまず黒板で概念を説明するつもり．

関数 $z = f(x,y)$ のグラフは (x,y,z)-空間での曲面になる．簡単のために $f(x,y) \ge 0$ とする．この曲面と xy 平面の間にあり，底面が A である立体（A を底面とする柱のようなもの）を考え，この体積を表すものが重積分 $\displaystyle\iint_A f(x,y)dxdy$ であるように，定義を考えたい．1 変数の時に倣って，問題の体積を小さな部分の和で近似するつもりで定義する．

定義 1.2.1 f を長方形の領域 A で定義された有界な関数とする．このとき，f の A における積分を以下のように定義する．

- まず，A を小さな長方形に分割する．つまり，x-軸方向には $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots \quad < x_{n-1} < x_n = b$，$y$-軸方向には $c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d$，と分ける（$m, n$ は大きな整数；これで A は mn 個の小さな長方形に分割された）．この分割を Δ で表す．この時にできる小さな長方形を $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ と書く（$1 \le i \le n, 1 \le j \le m$）．$I_{ij}$ の面積は $|I_{ij}|$ で表す．また，これらの小長方形の辺の長さの最大値を $|\Delta|$ と書く：$|\Delta| = \max\limits_{i,j}\{(x_i - x_{i-1}), (y_j - y_{j-1})\}$.
- 次に，それぞれの小長方形 I_{ij} の中に勝手に点 $\zeta_{ij} = (\xi_{ij}, \eta_{ij})$ をとる．mn 個の ζ_{ij} をまとめて $\vec{\zeta}$ と書く．
- このように決めた $\Delta, \vec{\zeta}$ に対して**リーマン和**を

$$R(\Delta, \vec{\zeta}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \, |I_{ij}| \tag{1.2.1}$$

として定義する．

- 最後に，$|\Delta| \to 0$ となるようないろいろな Δ と，その Δ に対するいろいろな $\vec{\zeta}$ の取り方を考える．$|\Delta| \to 0$ の極限でリーマン和が一定値に近づくならば，その値を「A の上での f の重積分」の値と定義する．つまり，

$$\iint_A f(x,y)dxdy := \lim_{|\Delta|\to 0} R(\Delta, \vec{\zeta}) \tag{1.2.2}$$

これが重積分の定義である（考えやすいように $f(x,y) \geq 0$ の制限を始めにつけたが，勝手な f で上の定義を用いる）．概念図は黒板で説明．もちろん，これは定義の大筋を述べただけで，以下のような問題点（取り扱わなかった点）が残されている．

- 1 変数の積分と同様，$|\Delta| \to 0$ の極限値が存在するか（すなわち重積分が定義できるか）どうかは全く自明ではない．実際に f の性質が悪いと極限値が存在しないことも多い．極限値が存在する（重積分が定義できる）十分条件などはこれから考える．
- 今は長方形上の重積分を考えているが，本当はもっと一般に，xy-平面上の勝手な図形 A の上での重積分を考えたい．この場合も定義のアイディアは同じである（底面 A を小長方形に分けて，小さな柱の体積の和の極限で定義）．ただし，A が性質の良くない図形であれば，またもや積分が定義できないことがおこる．このような点については２，３回の後に触れる．

1.2.1 ２重積分はいつ存在するのか（長方形の領域上で）

まず,「上積分」などの定義から始めよう．ここでは長方形の領域 $A = [a,b] \times [c,d]$ で定義された有界な関数 $f(x)$ に話を限る．$f(x)$ が有界でない場合や A が有限の区間でない場合は，後で「広義積分」として取り扱う．

- 分割 Δ に対して以下のように定義する：区間 I_{ij} における $f(x)$ の下限と上限を $m_{ij}(f;P), M_{ij}(f;P)$ と書く．そして

$$\underline{R}(f;\Delta) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(f;P) \times |I_{ij}|, \qquad \overline{R}(f;\Delta) := \sum_{i=1}^{n} M_{ij}(f;P) \times |I_{ij}| \tag{1.2.3}$$

を定義する．$\underline{R}(f;P)$ を下限和，$\overline{R}(f;P)$ を上限和という．

- 更に，様々な細かさの Δ を考え，それらについての sup，inf をとって

$$\underline{\int}_A f(x,y)dxdy := \underline{R}(f) := \sup\{\underline{R}(f;\Delta) \,\big|\, \Delta \text{ は } A \text{ の分割 }\} \tag{1.2.4}$$

$$\overline{\int}_A f(x,y)dxdy := \overline{R}(f) = \inf\{\overline{R}(f;\Delta) \,\big|\, \Delta \text{ は } A \text{ の分割 }\} \tag{1.2.5}$$

も定義する．$\underline{R}(f)$ を**下積分**，$\overline{R}(f)$ を**上積分**という．

上の定義から，分割内の分点 $\vec{\zeta}$ の取り方にかかわらず,

$$\underline{R}(f;\Delta) \leq R(f;\Delta,\vec{\zeta}) \leq \overline{R}(f;\Delta) \tag{1.2.6}$$

であることに注意しておこう（図を描いてみよ）．

以上の準備の下に，リーマン積分に関する基本的な定理を述べることが出来る（定理の証明は後で）．まず，1 つめの定理は，$\underline{R}(f;\Delta)$ や $\overline{R}(f;\Delta)$ は，それぞれが $|\Delta| \to 0$ の極限を持つことを保証する．

定理 1.2.2 (Darboux の定理，教科書にはない) 分割 Δ を限りなく細かくする（$|\Delta| \to 0$）とき，**下限和**と**上限**

和はそれぞれ一定の値に収束し，その行き先は (1.2.4) で定義された $\underline{R}$ と $\overline{R}$ である．つまり，

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \underline{R}(f;\Delta) = \underline{R}(f), \qquad \lim_{|\Delta|\to 0} \overline{R}(f;\Delta) = \overline{R}(f) \tag{1.2.7}$$

がなりたつ．(ただし，$\underline{R}(f) = \overline{R}(f)$ とは限らない．)

では，上積分・下積分と積分可能性の関係はどうか？それぞれの Δ に対しては $\underline{R}(f;\Delta) \le \overline{R}(f;\Delta)$ だったから，

$$\underline{R}(f) \le \overline{R}(f) \tag{1.2.8}$$

であることはわかる．問題は上積分と下積分がいつ等しいかだ — 関数 f や領域 A の取り方によってはこの 2 つは等しくないこともある．しかし，この 2 つが等しいことは定義 1.2.1 の積分可能性と同値だ，というのが次の定理である．

定理 1.2.3 (積分可能性の必要十分条件，教科書ではこれを積分可能の定義にしている) f が領域 A 上で積分可能である必要十分条件は，上積分と下積分が一致することである．つまり

$$\underline{R}(f) = \overline{R}(f) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \text{ は可積分で，} \iint_A f(x,y)dxdy = \underline{R}(f) = \overline{R}(f) \tag{1.2.9}$$

これで積分可能性の一般論はおしまいである．しかしこのままでは，与えられた関数に対して上積分，下積分を計算しないと積分可能かどうかがわからない．これは不便だから，積分可能性の簡単な十分条件を挙げておく：

定理 1.2.4 (連続関数は積分可能，教科書の p.77, 定理 3 の一部) 関数 $f(x)$ が領域 A 上で連続なら，f は A 上で積分可能である．また，有限個の点を除くと連続な場合も積分可能である．

講義ではこれらの定理の証明（説明）を行う．少し難解かもしれないが，大事なところだし，ϵ-δ の非常に良い練習問題にもなっているから，ちょっと辛抱して欲しい．なお，残念ながら証明がチンプンカンプンな人も，諦める必要はない．次回からの積分の応用を勉強すれば，証明がわからなくても単位を取る事は十分に可能だ．

以下の議論は，1 次元の積分でも全く同様に成り立ち，しかも 1 次元の方が直感的に理解しやすい．1 次元の場合の議論をこのノートの 1.1 節に書いておいたから，そちらを理解してから以下を読んでもらった方が良いかもしれない．

1.2.2 定理 1.2.2 と定理 1.2.3 の証明

定理 1.2.2 の証明の基本になるのは，以下の性質である．定理 1.2.3 の方は定理 1.2.2 からすぐに出る．

補題 1.2.5 $\overline{R}(f;\Delta)$ は，分割を細かくすると減少する．より正確にいうと，領域 A の勝手な分割 Δ_1, Δ_2 をとってきて，これを合わせた（つまり，両方の分割の分点を全部集めた）分割を $\Delta_{12} = \Delta_1 \cup \Delta_2$ と書くと，$\overline{R}(f;\Delta_{12}) \le \overline{R}(f;\Delta_1)$ および $\overline{R}(f;\Delta_{12}) \le \overline{R}(f;\Delta_2)$ である．
同様に，$\underline{R}(f;\Delta)$ は分割を細かくすると増加する．

この補題は，$S(f;P)$ の定義からほとんどあたりまえである．図で理解すれば良いだろう．

（注）上ではわかりやすいようにわざと不正確な書き方をしたが，本来は「$\overline{R}(f;\Delta)$ は，分割を細かくすると<u>増加しない</u>」と書くべきであった．同様に，「$\underline{R}(f;\Delta)$ は，分割を細かくすると <u>減少しない</u>」が正しい．

以下ではこの補題を用いて定理 1.2.2 と定理 1.2.3 を証明する．

定理 1.2.2 の証明　$\overline{R}$ の方のみ，証明する．$\underline{R}$ のほうも，いくつかの不等号の向きが逆になるだけで同じように証明できる．

ちょっと考えると，定理 1.2.2 は当たり前に思える．なぜなら，補題 1.2.5 より，$\overline{R}(f;\Delta)$ は単調減少っぽく見えて,「有界な単調減少列は極限を持つ」からだ．しかし，これは**早とちり**だ．というのは，補題 1.2.5 は「Δ をより細かくしたら $\overline{R}(f;\Delta)$ は非増加」と言っているだけで，**他の分割から出発して**細かくした行き先が，この Δ から出発した行き先と**等しいかどうか**は保証の限りではない．この問題を解決するため，以下のように進む．

まず inf としての $\overline{R}(f)$ の定義から，どんな分割 Δ に対しても $\overline{R}(f) \le \overline{R}(f;\Delta)$ であることに注意しておこう：

$$\forall\Delta,\quad \overline{R}(f) \le \overline{R}(f;\Delta). \tag{1.2.10}$$

また，$\overline{R}(f)$ は $\overline{R}(f;\Delta)$ の inf であるから，$\overline{R}(f)$ と $\overline{R}(f;\Delta)$ の差がいくらでも小さくなるような分割 Δ の列をとることができる．つまり：

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\Delta,\quad \overline{R}(f;\Delta) \le \overline{R}(f) + \epsilon. \tag{1.2.11}$$

問題は，(1.2.11) が $|\Delta'| \to 0$ なる任意の Δ' に対して成り立つか，つまり

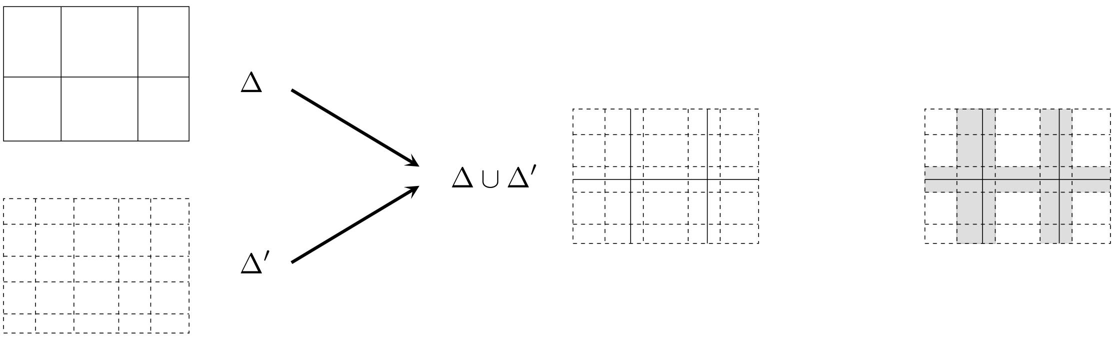
$$(??)\qquad \forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\quad \Bigl(|\Delta'| < \delta \implies \overline{R}(f;\Delta') \le \overline{R}(f) + \epsilon\Bigr) \qquad (??) \tag{1.2.12}$$

となっているか，ということである．以下，実際にこれがなりたつことを証明する．

そこで，任意の $\epsilon > 0$ を固定し，この ϵ に対して (1.2.11) の代わりに

$$\overline{R}(f;\Delta) \le \overline{R}(f) + \frac{\epsilon}{2} \tag{1.2.13}$$

となるような分割 Δ を一つ見つけて固定しよう．次に，この Δ に対して，十分細かい分割 Δ' を,「Δ' の各分線間には Δ の分線が高々一つしかない」ようにとる（下図参照）．



これは $|\Delta'|$ を「Δ の一番細かい区間の幅」より小さくとれば，絶対に実現できる[1]．次に，Δ と Δ' を合わせた分割を考えると，これは Δ, Δ' よりも細かいので，細かい方の $\overline{R}$ の値が小さくなる：

$$\overline{R}(f;\Delta\cup\Delta') \le \overline{R}(f;\Delta). \tag{1.2.14}$$

次に $\overline{R}(f;\Delta\cup\Delta')$ と $\overline{R}(f;\Delta')$ の関係を調べよう．Δ の x 軸方向の分線が N_1 本，y-軸方向の分線の数が N_2 本だとする．$\overline{f}, \underline{f}$ を A 内での f の上限と下限とし，細かい分割 Δ' の小長方形 I'_{ij} の面積の最大値を $\max_{ij}|I'_{ij}|$ で表す．このとき，

- $\overline{R}(f;\Delta') - \overline{R}(f;\Delta\cup\Delta')$ に寄与するのは，Δ' の分割ブロック中に Δ の分線が挟まっている部分である（このようなところでは，両者の定義中の $\sup f(x,y)$ に差が生じうる）．上図の一番右の図では分割ブロックの集まりを薄い影で表した．

- このような Δ' の分割ブロックのうち，Δ の x-軸方向の分線を含むものの面積は，最大でも $(b-a)\times|\Delta'|$ である．なぜなら，x-軸方向の長さは $(b-a)$，幅は最大でも $|\Delta'|$ だから．

[1] 今，(1.2.11) を満たす Δ を固定したから，Δ の幅の最小のものは正に確定して存在している．そこで，この幅よりも $|\Delta'|$ を小さくとればよい

- 同様に，このような Δ' の分割ブロックのうち，Δ の y-軸方向の分線を含むものの面積は，最大でも $(d-c)\times|\Delta'|$ である．

- 従って，このような Δ' の分割ブロックの面積を足し合わせたものは，高々 $N_2\times(b-a)\times|\Delta'|+N_1\times(d-c)\times|\Delta'| = \{N_1(d-c)+N_2(b-a)\}|\Delta'|$ である．

- 従って，$\overline{R}(f;\Delta\cup\Delta')$ と $\overline{R}(f;\Delta')$ の定義中の $\sup f(x,y)$ の差をおおまかに $\overline{f}-\underline{f}$ でおさえると，

$$\overline{R}(f;\Delta')-\overline{R}(f;\Delta\cup\Delta') \le \{N_1(d-c)+N_2(b-a)\}|\Delta'|\times(\overline{f}-\underline{f}) \tag{1.2.15}$$

　が成り立つ．

これが求めていた $\overline{R}(f;\Delta\cup\Delta')$ と $\overline{R}(f;\Delta')$ の関係である．
(1.2.14) と (1.2.15) から

$$\begin{aligned}\overline{R}(f;\Delta') &\le \overline{R}(f;\Delta\cup\Delta')+\{N_1(d-c)+N_2(b-a)\}\,(\overline{f}-\underline{f})\,|\Delta'| \\ &\le \overline{R}(f;\Delta)+\{N_1(d-c)+N_2(b-a)\}\,(\overline{f}-\underline{f})\,|\Delta'|\end{aligned} \tag{1.2.16}$$

が結論できた．これと (1.2.11) を組み合わせると

$$\overline{R}(f;\Delta') \le \overline{R}(f)+\frac{\epsilon}{2}+\{N_1(d-c)+N_2(b-a)\}\,(\overline{f}-\underline{f})\,|\Delta'| \tag{1.2.17}$$

が得られる．さてここで Δ' を十分細かく，

$$\{N_1(d-c)+N_2(b-a)\}\,(\overline{f}-\underline{f})\,|\Delta'| < \frac{\epsilon}{2} \tag{1.2.18}$$

となるようにとろう[2]．すると，(1.2.17) から直ちに，このように細かい Δ' に対して

$$\overline{R}(f;\Delta') \le \overline{R}(f)+\epsilon \tag{1.2.19}$$

が言える．上での Δ' に対する条件は本質的に (1.2.18) だけであった．よって以上から，

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0,\quad \Bigl(|\Delta'|<\delta \implies \overline{R}(f;\Delta') \le \overline{R}(f)+\epsilon\Bigr) \tag{1.2.20}$$

が言える．つまり (1.2.12) が結論できた． □

定理 1.2.3 の証明

（十分であること）Darboux の定理の証明中，任意の $\epsilon>0$ に対して，$\delta>0$ がとれて，

$$|\Delta|<\delta \text{ ならば }\quad \overline{R}(f;\Delta)<\overline{R}(f)+\epsilon \quad\text{かつ}\quad \underline{R}(f;\Delta)>\underline{R}(f)-\epsilon \tag{1.2.21}$$

であることを見た — (1.2.20) 式．ところで，その定義から，リーマン和は

$$\underline{R}(f;\Delta) \le R(f;\Delta,\vec{\zeta}) \le \overline{R}(f;\Delta) \tag{1.2.22}$$

を満たす．従って，$|\Delta|<\delta$ である限り，どんな分割でも，どんな分点 $\vec{\zeta}$ の取り方に対しても，

$$\underline{R}(f)-\epsilon \le \underline{R}(f;\Delta) \le R(f;\Delta,\vec{\zeta}) \le \overline{R}(f;\Delta) \le \overline{R}(f)+\epsilon \tag{1.2.23}$$

が成り立つことがわかる．ここでもし，定理の仮定のように $\underline{R}(f)=\overline{R}(f)$ であれば，$\delta\downarrow 0$ として（このとき，もちろん $\epsilon\downarrow 0$）

$$\lim_{|\Delta|\to 0} R(f;\Delta,\vec{\zeta}) = \underline{R}(f) = \overline{R}(f) \tag{1.2.24}$$

が結論できる．リーマン和の極限が確定するから，積分可能である．

[2] N は Δ のみで，また f の上限や下限は A と f のみで決まるので，Δ' を十分に細かくすればこれは必ず実現できる

（必要であること）ほとんど自明である．（対偶を証明）$\overline{R}(f) - \underline{R}(f) = c > 0$ と仮定すると，sup, inf としての定義から，

$$\underline{R}(f;\Delta) \le \underline{R}(f) = \overline{R}(f) - c \le \overline{R}(f;\Delta') - c \tag{1.2.25}$$

が勝手な Δ, Δ' に関して成り立つ．つまり，いくら頑張っても $\overline{R}(f;\Delta)$ と $\underline{R}(f;\Delta')$ のギャップ（c）を埋めることはできず，リーマン和の極限が存在しない（そのようなヤバイ分点をいくらでもとれる）．従って積分不可能である． □

1.2.3　定理 1.2.4 の証明

一様連続性がわかれば，証明は簡単だ．

定理 1.2.4 の証明

定理 1.2.3 を考えに入れると，$\underline{R}(f) = \overline{R}(f)$ が言えれば定理 1.2.4 の証明には十分だ．そのためには，

$$(?)\ \text{任意の}\epsilon > 0\ \text{に対して，}0 \le \overline{R}(f;\Delta) - \underline{R}(f;\Delta) < \epsilon\ \text{なる分割}\ \Delta\ \text{がとれる} \tag{1.2.26}$$

となることを証明すればよい．以下ではこれよりも強い，

$$(?)\ \forall\epsilon > 0\quad \exists\delta > 0 \qquad \Bigl(|\Delta| < \delta \implies 0 \le \overline{R}(f;\Delta) - \underline{R}(f;\Delta) < \epsilon \Bigr) \tag{1.2.27}$$

を証明しよう．

任意の $\epsilon > 0$ を固定する．$\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{|A|}$ とおく —— ここで $|A|$ は積分領域 A の面積である．f の一様連続性から $\delta > 0$ が存在して，

$$\|(x,y) - (u,v)\|_\infty < \delta \quad\implies\quad |f(x,y) - f(u,v)| < \epsilon' \tag{1.2.28}$$

とすることができる[3]．そこで，分割 Δ を，$|\Delta| < \delta$ となるようなものにとろう．この分割は十分小さいので，同じ小区間 I_{ij} に属する (x,y) と (u,v) は $\|(x,y) - (u,v)\|_\infty < \delta$ を満たしており，したがって $|f(x,y) - f(u,v)| < \epsilon'$ も満たされる．よって，I_{ij} 上での f の上限 M_{ij} と下限 m_{ij} は

$$0 \le M_{ij} - m_{ij} \le \epsilon' \tag{1.2.29}$$

を満たす．これを ij について和をとると，

$$0 \le \overline{R}(f;P) - \underline{R}(f;P) = \sum_{ij} (M_{ij} - m_{ij})|I_{ij}| < \sum_{ij} \epsilon' |I_{ij}| = \epsilon'\,|A| = \epsilon \tag{1.2.30}$$

が得られる．つまり，(1.2.27) が証明できた．メデタシメデタシ． □

1.3　一般の領域での重積分

1.2 節への補足として，一般の領域での重積分の定義を簡単に述べておく．この節の内容は，まあ常識的なものだから，「油断すると変なこともある」点以外はそれほど気にしなくてよい．（ただし「縦線図形上の積分」は後で一杯出てくる．）

今までは xy-平面の長方形 $A = [a,b] \times [c,d]$ 上の積分を考えてきた．xy-平面の一般の図形 B 上での積分はどう定義したら良いだろうか？まず天下りに定義を与え，その後で意味を説明する．

B を xy 平面内の有界な図形とする．B の <u>特性関数</u>（定義関数）と呼ばれる関数 $\chi_B(x,y)$ を，

$$\chi_B(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in B\ \text{のとき} \\ 0 & (x,y) \notin B\ \text{のとき} \end{cases} \tag{1.3.1}$$

[3] 点 (x,y) に対して，$\|x\|_\infty := \max\{|x|,|y|\}$ と書いた

と定義する．また，B をその内部におさめられるような，十分大きな長方形 B^* をとる．
この準備の下で，まず図形 B の面積を定義しよう．

定義 1.3.1 (一般の図形の面積) 図形 B の面積は，重積分

$$\iint_{B^*} \chi_B(x,y)\,dxdy \tag{1.3.2}$$

によって定義する．この積分が存在しない場合は，B の面積は定義できないと考える．この積分が存在する場合，B は 面積確定 であるという．

上の定義の右辺は，B^* が長方形であるから，前節までの定義によって解釈できる．χ_B の定義を見ればわかるように，この右辺では積分に実質的に効いてくるのは B の中だけである．この意味で上の定義は直感的に「正しい」ものと考えて良い．

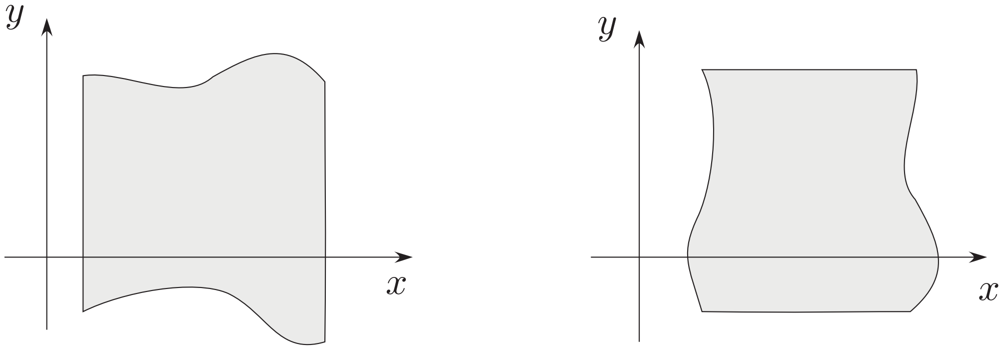
図形 B の「面積」とは何か？は決してアタリマエの事ではない．我々が日常見かけるような図形は，その境界が**滑らかな曲線**であるから，その面積は直感的にも定義できる．しかし，その境界が連続な曲線まで拡げると，既に上の定義では面積が確定できない図形も多々ある．物理や工学に出てくる曲線でも滑らかでないものもある（例：ブラウン運動の軌跡．もう少し講義で）．
この意味で,「図形の面積」は**我々が**苦労して，**意識的に定義すべき**ものである．以下に，面積が確定するための十分条件を少し挙げる．

定理 1.3.2 (B の面積確定のための十分条件) 図形 B の面積が定義できるための十分条件の２例は：
（１）B の境界が滑らかな曲線であること．つまり，$x = x(t), y = y(t)$ という閉曲線（$0 \le t \le 1$ かつ $x(0) = x(1), y(0) = y(1)$）があって，その内部が B であり，かつ，$x(t), y(t)$ が t の関数として C^1-級（一階微分可能で，導関数が連続）であること．
（２）$x = a, x = b$ の２つの直線と $y = \varphi(x), y = \psi(x)$ （ただし $a \le x \le b$ で $\varphi(x) \le \psi(x)$，かつ $\varphi(x)$ と $\psi(x)$ は x の連続関数）なる２つの曲線で囲まれた部分が B であること．

定理の（２）に出ているような図形を 縦線図形 という（下図参照）．上では y-方向の「縦線」でできた図形の例を示したが，x-方向の「横線」でできた図形，つまり

$$y = c, \quad y = d, \qquad x = \varphi(y), \quad x = \psi(y) \quad \text{で囲まれた図形} \tag{1.3.3}$$

に対しても定理は成り立つ．これは本来,「横線図形」と呼ぶべきだろうが．このような図形も「縦線図形」という．



縦線図形　　横線図形

この準備の下で，

定義 1.3.3 (面積確定の図形の上の重積分) 面積が確定する図形 B が与えられたとする．B 上で定義された関数 $f(x,y)$ が与えられたとき，f の B での積分は，重積分

$$\iint_B f(x,y)dxdy \equiv \iint_{B^*} f(x,y)\chi_B(x,y)\,dxdy \tag{1.3.4}$$

によって定義する．右辺の積分が定義できる場合は f は B で可積分（積分できる），定義できない場合は f は B で積分できないという．

最後に，積分可能の十分条件を挙げておく．図形 B が面積確定との条件をつければ，だいたい，長方形上での積分と同じ事になる．

定理 1.3.4 (積分可能の条件；教科書の p.77, 定理 3) 図形 B の面積が定義できる時，その上の関数 f が B で積分可能なための十分条件は，f が B 上で連続 な事である．

以上で，重積分の定義とその基本的な性質はおしまいである．なお，教科書では面積確定の場合についていろいろと定理が書いてあるが，これは現時点でそれほど重要とは思えないので，省略する．(著者の専門が幾何であることを考えれば，この辺りのこだわりは納得できるのではあるが.)

1.4 重積分と累次積分

重積分をその定義から（分割を使って）求めるのは大変だ．ところが，n 重積分は（大抵の場合）n 個の 1 次元積分のくり返しで求められる．これは非常な省力化であり，実用上も非常に有り難い．この節ではこの重要な性質を学ぶ．

1.4.1 基本の性質

まずは簡単のために，$A = [a,b] \times [c,d]$（長方形） の上での $f(x,y)$ の重積分を考える．典型的な場合は以下の定理で表されている（より一般的な定理は後で定理 1.4.3 として扱う）．

定理 1.4.1 (累次積分への帰着) 関数 $f(x,y)$ が A 上で積分可能とする．このとき，すべての $x \in [a,b]$ に対して

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy \tag{1.4.1}$$

を定義できるならば，

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx \tag{1.4.2}$$

が成り立つ．x, y を入れ替えた形の定理ももちろん，なりたつ．すなわち，すべての $y \in [c,d]$ に対して

$$G(y) = \int_a^b f(x,y)dx \tag{1.4.3}$$

を定義できるならば，

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_c^d G(y)dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy \tag{1.4.4}$$

である．

講義で詳しく説明するが，$z = f(x,y)$ のグラフの下の体積を求めると思えば，この定理の主張を高校までの積分で理解できる．高校では，このような立体を x-軸に垂直な面で切り，その断面の面積を積分することで体積を求めた．(1.4.2) は，正にこれになっている［$F(x)$ が断面の面積に相当］．

記号：(1.4.2) の積分は，通常はカッコを省略して

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx \tag{1.4.5}$$

と書かれる（a, b, c, d と x, y の順番に注意）．ただ，これでは x, y どっちの変数がどこまで動くのかが混乱しがちなので，積分範囲を明確にするために

$$\int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) \tag{1.4.6}$$

と書くことも多い．(物理や工学では後者の書き方が一般的である．）後者では「積分記号の直後にある積分変数がその範囲を動く」点がわかりやすいが，その反面，この後に更に数式が続いた場合など，「どこまでが非積分関数か」わかりにくい面もある...

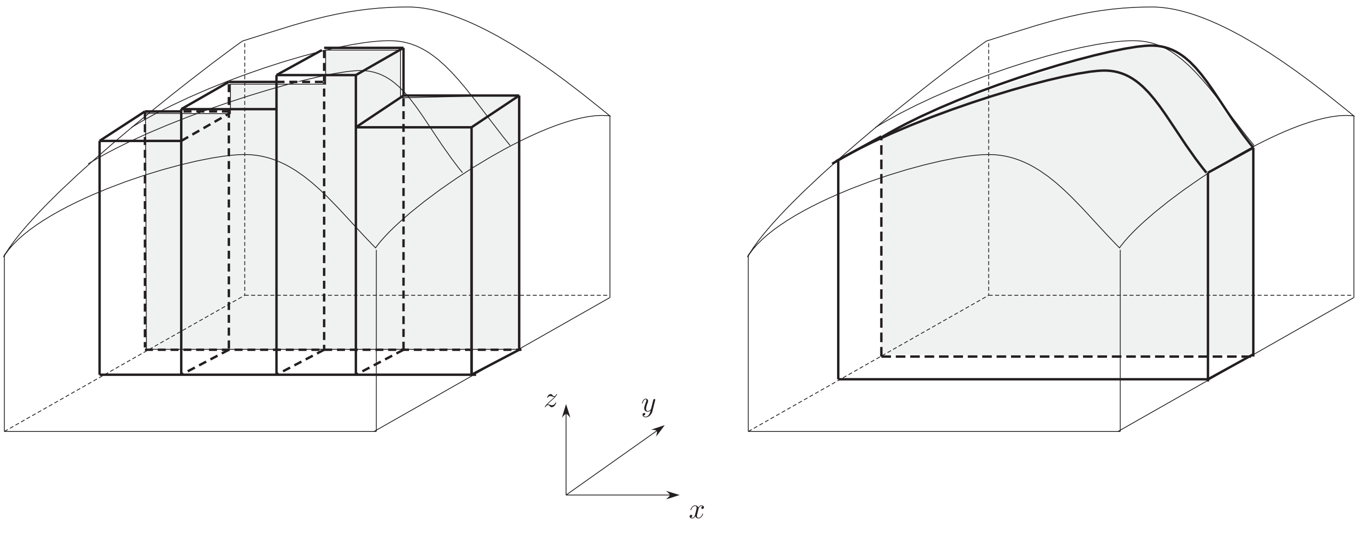
系 1.4.2 (Riemann 積分に対する Fubini の定理) 関数 f が A 上で積分可能で両辺に意味がつく場合は，

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy \tag{1.4.7}$$

が成り立つ．つまり，累次積分の順序を交換できる．特に，f が連続関数の場合は上が成り立つ．

定理 1.4.1 の証明について：立体の体積だと思えばアタリマエのようなものだが，一応，講義では大体の感じを説明する．要点は以下の通り：

重積分の定義において，x-方向の分割だけを先に細かくして，x-方向の分割の幅がゼロに行った極限を考える．y が一定の面で切った切り口を考えると，このとき，切り口に見えている短冊は素直に細くなって行くので，この切り口の面積が出てくる．この後に y-方向の分割を細かくすると，この切り口の面積を y-方向に積分したものが得られて，累次積分の公式に到達する． □



この定理は，その証明は大まかなアイディアがわかれば良い．それよりは実際に計算できる事が至上命題だ．いくつか例題を掲げておくからやっておくように．(類題は演習の方でもやるはずだ．）

問 1.4.1 A 上で積分可能であるが，上の $F(x)$ が（ある $x \in [a,b]$ に対しては）定義できないような $f(x,y)$ の例を作れ．

問 1.4.2 以下の重積分を計算せよ．$A = [0,1] \times [0,1]$.

$$\iint_A (x^2 + y^2)dxdy, \qquad \iint_A xy\,dxdy, \tag{1.4.8}$$

問 1.4.3 以下の場合に，重積分 $\iint_A f(x,y)\,dxdy$ を計算せよ..

a) $A=[1,3]\times[0,2]$， $f(x,y)=xy$.

b) $A=[0,1]\times[0,1]$， $f(x,y)=\dfrac{1}{3x+y+1}$.

c) A は 3 直線 $x=0, y=0, x+y=1$ で囲まれた図形， $f(x,y)=\dfrac{1}{3x+y+1}$.

d) A は直線 $y=x$ と放物線 $y=x^2$ で囲まれた図形， $f(x,y)=(y-x^2)^2$.

1.4.2 更に一般の Fubini の定理

実は，上の定理 1.4.1 はもっと一般に，以下の形で述べることができる．少し準備をしよう．定理 1.4.1 では，累次積分に帰着するために,「すべての $x\in[a,b]$ に対する $\int_c^d f(x,y)dy$ の存在」などを仮定した．しかし，実際問題,これは少しキツすぎる条件である．例えば，数個の $x\in(a,b)$ では $\int_c^d f(x,y)dy$ が定義できなくても，全体の積分には支障がないことは多いだろう．このような事情を取り込むために，以下のようにすすむ.

- 考えるのは，領域 $A=[a,b]\times[c,d]$，およびこの上で有界な関数 $f(x,y)$ である.
- $x\in[a,b]$ を固定した場合，$f(x,y)$ の y による上積分 $\overline{\int_c^d} f(x,y)dy$ は，通常の一次元の上積分として定義する．下積分 $\underline{\int_c^d} f(x,y)dy$ も同様に一次元の下積分として定義する.
- $y\in[c,d]$ を固定した場合，$f(x,y)$ の x による上積分と下積分 $\overline{\int_a^b} f(x,y)dx$ と $\underline{\int_a^b} f(x,y)dx$ も同様に定義する．一次元の上積分，下積分の性質から，これらはすべて定義できている.
- x の関数として定義された上積分 $\overline{\varphi}(x):=\overline{\int_c^d} f(x,y)dy$ はもちろん，x の関数であるから，$\overline{\varphi}(x)$ の $x\in[a,b]$ における上積分を定義することができる．これを

$$\overline{\int_a^b}\overline{\varphi}(x)dx=\overline{\int_a^b}\left(\overline{\int_c^d} f(x,y)dy\right)dx=\overline{\int_a^b}dx\overline{\int_c^d}dy\,f(x,y) \tag{1.4.9}$$

と書こう.
- 同様に，下積分（積分の順番は上と同じ）についても

$$\underline{\int_a^b}\underline{\varphi}(x)dx=\underline{\int_a^b}\left(\underline{\int_c^d} f(x,y)dy\right)dx=\underline{\int_a^b}dx\ \underline{\int_c^d}dy\,f(x,y) \tag{1.4.10}$$

を定義する.
- また，積分の順序を変えた

$$\overline{\int_c^d}dy\overline{\int_a^b}dx\,f(x,y) \qquad と \qquad \underline{\int_c^d}dy\ \underline{\int_a^b}dx\,f(x,y) \tag{1.4.11}$$

も定義しよう.
- （これまでの積分の定義と同様のノリで）もし,

$$\overline{\int_a^b}dx\overline{\int_c^d}dy\,f(x,y)=\underline{\int_a^b}dx\ \underline{\int_c^d}dy\,f(x,y) \tag{1.4.12}$$

ならば,「累次積分」$\int_a^b dx\int_c^d dy\,f(x,y)$ が存在する，という．もちろん，$\int_a^b dx\int_c^d dy\,f(x,y)$ の値は，この共通の上（下）積分の値と定義する.

- 同様に，

$$\overline{\int_c^d} dy \overline{\int_a^b} dx\, f(x,y) = \underline{\int_c^d} dy \ \underline{\int_a^b} dx\, f(x,y) \tag{1.4.13}$$

ならば，「累次積分」$\displaystyle\int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x,y)$ が存在する，といい，その値はこの共通の上（下）積分の値と定義する．

以上の下で，以下の定理が成り立つ：

定理 1.4.3 (累次積分への帰着と Fubini の定理；教科書の p.86) $A = [a,b] \times [c,d]$ 上で有界な関数 $f(x,y)$ が A 上で積分可能とする．このとき，上の定義の意味で $\displaystyle\int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y)$ と $\displaystyle\int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x,y)$ が存在し，その値は $\displaystyle\int_A f(x,y)dxdy$ に等しい．つまり，

$$\int_A f(x,y)dxdy = \overline{\int_a^b} dx \overline{\int_c^d} dy\, f(x,y) = \underline{\int_a^b} dx \ \underline{\int_c^d} dy\, f(x,y) = \overline{\int_c^d} dy \overline{\int_a^b} dx\, f(x,y) = \underline{\int_c^d} dy \ \underline{\int_a^b} dx\, f(x,y) \tag{1.4.14}$$

がなりたつ．

既に予告したように，この定理の良いところは，一次元の積分がうまく定義できない場合でも使える可能性があることである．ただし，(どうせ 3 年生でルベーグ積分を習うのだから）あまりこの辺りに凝るのも考えものかもしれない．

定理 1.4.3 の証明について：

教科書に載っている通りであるが，自分なりにまとめておく．

重積分 $\displaystyle\int_A f(x,y)dxdy$ が存在することから 4 通りの上（下）積分が一致することを言いたい訳なので，ともかく，重積分を定義する際の上限和から見ていこう．(今までと同様に，分割 Δ における x 方向の小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の幅を $\Delta_{x,i} := x_i - x_{i-1}$，$y$ 方向の幅を $\Delta_{y,j} := y_j - y_{j-1}$ と書く．)

定義により，

$$\begin{aligned}\overline{R}(f;\Delta) &= \sum_{ij} \Bigl(\sup_{(x,y)\in I_{ij}} f(x,y) \Bigr) \Delta_{x,i}\, \Delta_{y,j} = \sum_i \Delta_{x,i} \sum_j \Delta_{y,j} \sup_{x\in[x_{i-1},x]} \ \sup_{y\in[y_{j-1},y_j]} f(x,y) \\ &\geq \sum_i \Delta_{x,i} \sup_{x\in[x_{i-1},x]} \Biggl(\sum_j \Delta_{y,j} \sup_{y\in[y_{j-1},y_j]} f(x,y) \Biggr) \end{aligned} \tag{1.4.15}$$

である（$\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$ を用いた）．一方，一次元の上積分の定義から，

$$\overline{\varphi}(x) := \overline{\int_c^d} dy f(x,y) = \inf \Biggl(\sum_j \Delta_{y,j} \sup_{y\in[y_{j-1},y_j]} f(x,y) \Biggr) \tag{1.4.16}$$

であるから，上と合わせて，

$$\overline{R}(f;\Delta) \geq \sum_i \Delta_{x,i} \sup_{x\in[x_{i-1},x]} \Biggl(\overline{\int_c^d} dy f(x,y) \Biggr) = \sum_i \Delta_{x,i} \sup_{x\in[x_{i-1},x]} \overline{\varphi}(x) \tag{1.4.17}$$

となる．またもや，(今度は $\overline{\varphi}(x)$ の上積分の定義から）

$$\overline{\int_a^b} dx\, \overline{\varphi}(x) = \inf \Biggl(\sum_i \Delta_{x,i} \sup_{x\in[x_{i-1},x]} \overline{\varphi}(x) \Biggr) \tag{1.4.18}$$

であることに注意すると，

$$\overline{R}(f;\Delta) \geq \overline{\int_a^b} dx\, \overline{\varphi}(x) = \overline{\int_a^b} dx \overline{\int_c^d} dy\, f(x,y) \tag{1.4.19}$$

が得られる．これが全ての分割 Δ について成り立つので，$|\Delta| \to 0$ の極限をとれば，最終的に

$$\overline{\int_A} f(x,y)dxdy \geq \overline{\int_a^b} dx \overline{\int_c^d} dy\, f(x,y) \tag{1.4.20}$$

を得る．

今度は $\underline{R}(f;\Delta)$ から出発して上と同様の議論を（不等号の向きをいたるところ逆にして）行うと，

$$\underline{\int_A} f(x,y)dxdy \leq \underline{\int_a^b} dx\ \underline{\int_c^d} dy\, f(x,y) \tag{1.4.21}$$

が得られる．

しかし，一次元での上積分，下積分の関係から，

$$\underline{\int_a^b} dx\ \underline{\int_c^d} dy\, f(x,y) \leq \overline{\int_a^b} dx \overline{\int_c^d} dy\, f(x,y) \tag{1.4.22}$$

が常に成り立つ．つまり，以上をまとめると，

$$\underline{\int_A} f(x,y)dxdy \leq \underline{\int_a^b} dx\ \underline{\int_c^d} dy\, f(x,y) \leq \overline{\int_a^b} dx \overline{\int_c^d} dy\, f(x,y) \leq \overline{\int_A} f(x,y)dxdy \tag{1.4.23}$$

が成り立つことがわかった．(以上は重積分が存在しない場合でもなりたつ，一般の結果である．)

ここで漸く，定理の仮定が使える．仮定により，上の不等式の最左辺と最右辺は等しい．従って，間に挟まれた「累次積分」の上積分と下積分も等しい．これで定理の半分が証明できた．

以上の議論を x, y の順序を変えて行えば，定理の証明が完成する． □

1.4.3 更に進んだ話題

1．定理 1.4.1 や定理 1.4.3 は「$f(x,y)$ が A で積分可能ならば，重積分は累次積分で書ける」ことを主張している．この逆は成り立つかを考えたい．つまり，

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy \qquad \text{(累次積分が定義できて積分順序によらない)} \tag{1.4.24}$$

ならば，f は A で可積分だろうか？

残念ながら，そうとは限らない．次のやや人工的な f は (1.4.24) が成り立つにもかかわらず，A で積分できない例である．このような意味で，累次積分の性質からもともとの重積分が定義できるかどうかを判定することはできない．

例： 正方形 $[0,1] \times [0,1]$ を S と書く．また，k-番目に大きい素数を p_k と書く（$k = 1, 2, \ldots$）．更に，適当な 1 以上の整数 k と整数 m, n を用いて $\left(\dfrac{m}{p_k}, \dfrac{n}{p_k}\right)$ の形に書ける S の内点の全体を T と書く：

$$T = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{m}{p_k}, \frac{n}{p_k}\right) \middle|\, 0 < m < p_k,\ 0 < n < p_k \right\} \tag{1.4.25}$$

更に，

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \bigl((x,y) \in T\bigr) \\ 1 & \bigl((x,y) \in S \backslash T\bigr) \end{cases} \tag{1.4.26}$$

と定義する．このとき，

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)dx \right] dy = 1 \tag{1.4.27}$$

であるが，$\displaystyle\iint_S f(x,y)\,dxdy$ は**定義できない**（why?）．

２．このように，Riemann 積分では何かと話がヤヤコシイのだが，この点は Lebesgue 積分を考えると大幅に改善される．粗っぽくいうと，上の反例などは大体が非常に些細なところから出ているので，その部分を「無視」するような定義を用いれば反例が消滅する．Lebesgue 積分というのはどの部分が「些細」で無視して良いかを合理的に決めたものとも解釈できる．このような点から Lebesgue 積分は非常に自然なので，現在の数学では Lebesgue 積分が（Riemann 積分に替わって）用いられるようになった．Lebesgue 積分については，皆さんは 3 年前期に習うはず．

1.4.4 一般の図形上での積分に対する累次積分

長方形でない図形 B 上での積分を累次積分に帰着することも，同様に考えていける．長方形でない領域 B の二重積分は，この領域 B の定義関数を用いて

$$\int_B f(x,y)dxdy = \int_{B^*} f(x,y)\chi_B(x,y)dxdy \tag{1.4.28}$$

と定義した（右辺の積分が存在する場合）．この場合ももちろん，右辺の積分に対して定理 1.4.3 を適用できる．

特に，B が

$$x = a, \quad x = b, \qquad y = \varphi(x), \quad y = \psi(x) \tag{1.4.29}$$

で囲まれた縦線図形の場合（$a \le x \le b$ で $\varphi(x) < \psi(x)$），$f(x,y)$ が連続ならば，

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right] dx \tag{1.4.30}$$

が成り立つ.「横線図形」の場合も同様である．

教科書には割合詳しく書いてあるので，このノートでもまとめておこう：

命題 1.4.4 (縦線図形における累次積分への帰着；教科書の p.88) $a < b$, $c < d$ を満たす実数 a, b, c, d を固定する．$[a, b]$ 上で定義された連続関数 $\varphi(x), \psi(x)$ が常に $\varphi(x) \le \psi(x)$ を満たしているものとし，以下の領域 B を定義する：

$$B := \{(x,y) \,\big|\, a \le x \le b \quad かつ \quad \varphi(x) \le y \le \psi(x)\,\} \tag{1.4.31}$$

今，$f(x,y)$ が B 上で連続な関数であるとすると，二重積分 $\displaystyle\int_B f(x,y)dxdy$ が定義できて，更に以下の累次積分で表せる：

$$\int_B f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy\, f(x,y). \tag{1.4.32}$$

なお，累次積分に登場した $\displaystyle g(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$ は x の連続関数になっている．つまり，上の累次積分は，普通の連続関数の積分として理解できる．

((1.4.32) の証明) 二重積分の定義 (1.4.28) を思い出せば，この命題は定理 1.4.3 からすぐに出る（上の場合，定理 1.4.3 の非積分関数を $f(x,y)\chi_B(x,y)$ と思えば良い）．ただし，定理 1.4.3 を用いるには非積分関数であるところの $f(x,y)\chi_B(x,y)$ の有界性が必要だから，それを確かめておこう．

そのために，まず，領域 B が「有界かつ閉集合」であることを証明しよう．B は長方形 $\{(x,y) \,\big|\, a \le x \le b, c \le y \le d\}$ に入ってるから，もちろん，有界である．問題は閉であるか否かだが，これを判定するには，B 内の任意の点列 $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ を持って来て，この点列が収束する場合，その極限が B に属するか否かを調べればよい．この点列は B 内にあるから，すべての $n \ge 1$ で

$$\varphi(x_n) \le y_n \le \psi(x_n), \tag{1.4.33}$$

を満たしている．

この点列の収束先を (x_∞, y_∞) と書こう．(1.4.33) で $n \to \infty$ とすると，y_n はその収束先 y_∞ に行く．また，$\varphi(x_n), \psi(x_n)$ は φ, ψ が連続関数なので，

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_\infty) = \varphi\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) = \varphi(x_\infty), \qquad \lim_{n\to\infty} \psi(x_\infty) = \psi\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) = \psi(x_\infty) \tag{1.4.34}$$

がなりたつ．つまり，(1.4.33) で $n \to \infty$ としたものから，

$$\varphi(x_\infty) \le y_\infty \le \psi(x_\infty) \tag{1.4.35}$$

が結論できる．つまり，(x_∞, y_∞) も B 内の点であり，B が有界閉集合であることがわかった．

「有界閉集合の上での連続関数は有界」であることは一年のときにやったはずだから，これで f が B 上で有界であることの証明が終わった． □

（ g が連続であることの証明） $a < x_0 < b$ なる x_0 をとり，$g(x)$ がこの x_0 で連続であることを示そう（$x_0 = a$ や $x_0 = b$ の場合は片側だけ考えればよいので，同様に示せる）．

教科書にはちゃんとした証明が書いてあるが，その前におおまかなことを言っておこう（大まかな理由を理解することは，証明の細部を理解することと同様に重要である）．まず，

$$g(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \tag{1.4.36}$$

が x に依存するのは，3 つの理由からであることを理解する：

- 積分の下限 $\varphi(x)$ が x とともに変わる
- 積分の上限 $\varphi(x)$ が x とともに変わる
- 非積分関数 $f(x,y)$ も x とともに変わる

しかし，この 3 つの x-依存性はすべて連続なはずだ．なぜなら，φ, ψ, f はすべて命題の仮定から連続だから．従って，$g(x)$ が x の連続関数であることは多いに期待できる．ただ，特に $f(x,y)$ に起因する x-依存性は，y で積分していることもあってちょっとわかりにくい[4]．また，この 3 種の x-依存性は互いに絡み合って出てくるから，本当はそれほど簡単な問題ではない．仕方ないので，以下のように厳密に議論する[5]．

x_0 の近くに x_1 を取り[6]，$g(x_1) - g(x_0)$ を考える．この差が $x_1 \to x_0$ でゼロに行くことを示したい．以下，記述を簡単にするため，

$$\varphi_0 := \varphi(x_0), \quad \varphi_1 := \varphi(x_1), \qquad \varphi_{\min} := \min\{\varphi_0, \varphi_1\}, \quad \varphi_{\max} := \max\{\varphi_0, \varphi_1\} \tag{1.4.37}$$

$$\psi_0 := \psi(x_0), \quad \psi_1 := \psi(x_1), \qquad \psi_{\min} := \min\{\psi_0, \psi_1\}, \quad \psi_{\max} := \max\{\psi_0, \psi_1\} \tag{1.4.38}$$

とおく．また，φ_0 と φ_1，ψ_0 と ψ_1 の大小には 2×2 通りの場合があり得て，どの場合が実現されるかは x_1 と x_0 の位置によるだろうが，以下では $\varphi_0 \le \varphi_1$ かつ $\psi_0 \le \psi_1$ の場合を例示する —— その他の場合も全く同様に議論できるので，この場合だけで十分である．

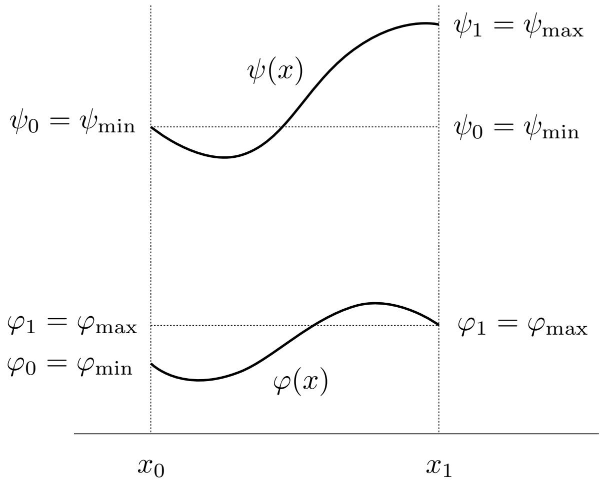
さて，上の 3 つの x 依存性を念頭において，以下のように分解する（図を参照）：

$$\begin{aligned} g(x_1) - g(x_0) &= \int_{\varphi_1}^{\psi_1} f(x_1,y)dy - \int_{\varphi_0}^{\psi_1} f(x_0,y)dy \\ &= \int_{\varphi_{\max}}^{\psi_{\min}} f(x_1,y)dy + \int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\max}} f(x_1,y)dy - \int_{\varphi_{\max}}^{\psi_{\min}} f(x_0,y)dy - \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} f(x_0,y)dy \\ &= \int_{\varphi_{\max}}^{\psi_{\min}} \Big\{ f(x_1,y) - f(x_0,y) \Big\} dy + \int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\max}} f(x_1,y)dy - \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} f(x_0,y)dy \end{aligned} \tag{1.4.39}$$

[4]「積分」はある種の平均操作なので，一般には積分した後のものの方が，積分する前よりも滑らかになるのではあるが...

[5]いうまでもないことであるが，ここで紹介する議論が最良というつもりはない．各自，自分にあったやり方で理解すれば十分である

[6]記述を簡単にするため，$x_0 < x_1$ の場合のみ，考える．$x_1 < x_0$ も同様に議論できる



ただし，φ_0, φ_1 や ψ_0, ψ_1 の大小関係によっては，上の分解が別の形（$-\int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} f(x_0, y)dy$ の代わりに $+\int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} f(x_1, y)dy$ が現れる，など）になるかもしれない．いずれの場合も分解の結果は

$$g(x_1) - g(x_0) = \int_{\varphi_{\max}}^{\psi_{\min}} \Big\{ f(x_1, y) - f(x_0, y) \Big\} dy \pm \int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\max}} f(x_i, y)dy \pm \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} f(x_j, y)dy \tag{1.4.40}$$

の形になる（i, j は 0 または 1 であり，$\pm$ は i や j が 1 ならプラス，0 ならマイナス）．

さて，いよいよ $x_1 \to x_0$ として，上の各項がゼロに行くことを確かめよう．

まず，第一項について．f が有界閉集合の B 上で連続なので，f は B 上で一様連続でもある．従って，

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \qquad \Big(|x_0 - x_1| < \delta \text{ かつ } y \in [\varphi_{\max}, \psi_{\min}] \quad \Longrightarrow \quad |f(x_1, y) - f(x_0, y)| < \epsilon \Big) \tag{1.4.41}$$

が成り立っている．従って $|x_1 - x_0| < \delta$ である限り，

$$\big| (\text{第一項}) \big| \le \int_{\varphi_{\max}}^{\psi_{\min}} \big| f(x_1, y) - f(x_0, y) \big| dy < |\psi_{\min} - \varphi_{\max}| \times \epsilon \le (d - c)\epsilon \tag{1.4.42}$$

となる．ϵ はいくらでも小さくとれるから，第一項はゼロに行く．

次に第二項について．f が B 上で有界であることは既に見た．つまり，(大きな) 数 M が存在して，第二項中の f に対して

$$|f(x, y)| < M \tag{1.4.43}$$

が成り立っている．従って，第二項は（x_i が x_0 であろうが x_1 であろうが，どちらの場合も）

$$\big| (\text{第二項}) \big| \le \int_{\psi_{\min}}^{\psi_{\max}} |f(x_1, y)| dy \le |\psi_{\max} - \psi_{\min}| \times M \tag{1.4.44}$$

を満たす．$x_1 \to x_0$ に際しては，$\psi(x)$ が連続関数なので，$\psi_1 \to \psi_0$ となる．つまり，$\psi_{\max} - \psi_{\min} \to 0$ なので，この第二項は $x_1 \to x_0$ でゼロに行く．

最後に第三項について．これは第二項と同様である（ψ の代わりに φ が出るだけ）．

以上より，3 つの項はすべて $x_1 \to x_0$ の時にゼロに行くことがわかった．つまり，$g(x_1) \to g(x_0)$ が証明された． □

1.4.5 重積分の順序交換について

定理 1.4.3（Fubini の定理）で「非積分関数が『良い』性質を持っていれば重積分の順序は交換できる」ことをみた．これは重積分を累次積分に帰着することから出てきたもので，考え方は非常に単純である —— 要するに，与えられた積分範囲をどんな順番でも良いから尽くすように覆えばよいわけだ．でもこれは応用上，非常に大事なものである．

例えば，問 1.4.3 c) では $x=0, y=0, 2x+y=1$ で囲まれた三角形の領域での積分を考えた．x, y どちらの積分を先にやっても構わない．また，例えば x での積分を先にやる形の累次積分で与えられた積分の順序を変えて，y から積分しても良い．問題によっては，このように順序を変えることで簡単に計算できる場合があるので，これは実際問題としては大事である．(以下の具体例をみよ．)

問 1.4.4 積分領域 B を，$(x-1)^2+y^2 \le 1$ と $y \ge 0$ で囲まれた図形として，積分 $\iint_B x^2 y \, dxdy$ を計算せよ．(この問題は x, y のどちらか一方を先にやると簡単にできる．順序を逆にすると大変だよ．)

順序交換は実用上，非常に大事だから，いくつか例題を挙げておく：

問 1.4.5 以下の積分の順序交換を納得せよ（f は適当な関数，$a, b > 0$ は定数）

$$\int_0^a dx \int_{-bx}^{bx} dy\, f(x,y) = \int_0^{ab} dy \int_{y/b}^{a} dx\, f(x,y) + \int_{-ab}^{0} dy \int_{-y/b}^{a} dx\, f(x,y),$$

$$\int_0^{1/2} dx \int_{x^2}^{x} dy\, f(x,y) = \int_0^{1/4} dy \int_y^{\sqrt{y}} dx\, f(x,y) + \int_{1/4}^{1/2} dy \int_y^{1/2} dx\, f(x,y)$$

このような問題では，積分領域の図を描いて，間違わないように書き換えるのが良い．

発展問題：

重積分の順序交換の応用として，1 変数関数のテイラーの定理（剰余項の表式つき）を導いてみよう．簡単のため，関数 $f(x)$ はすべての x で無限階微分可能だとする．

1. 微分積分学の基本定理から以下が成り立つことに注意しよう（ここで $f'(t)$ は $f(t)$ の，t に関する導関数）

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt, \qquad \text{同様に，}\quad f'(t) = f'(a) + \int_a^t f''(s)ds \tag{1.4.45}$$

2. 右の式を左の式に代入して，$f(x)$ の表式を作れ．そこに出てくる 2 重積分の順序を交換して

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-s) f''(s)ds \tag{1.4.46}$$

が成り立つことを示せ．

3. これを帰納法的にくり返して，$f(x)$ の n 次のテイラー展開の式を求めよ．

この結果として得られる表式は剰余項を積分で与えてくれるものなので，かなり使いやすい．通常は「区間 $[a, x]$ 中の一点 x_1 があって，$f^{(n+1)}(x_1)(x-a)^{n+1}/(n+1)!$ が剰余項」などとするが，これでは x_1 がどこにあるのかわかりにくいので，困ることがある．

1.5 重積分の変数変換

1 変数関数の積分では変数変換（置換積分）の公式が存在した，多重積分においても同様の公式が存在し，かつ実際上，非常に有用である．

1 次元の場合を思い出そう．この場合，$x = x(t)$ と変数変換すると，

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t))\, x'(t)\, dt \tag{1.5.1}$$

であった（t_1, t_2 は $x(t)$ がそれぞれ x_1, x_2 になる t の値）．x と t の間で，座標が伸び縮みした分を考慮に入れるために，$x'(t)$ が必要になったのである．

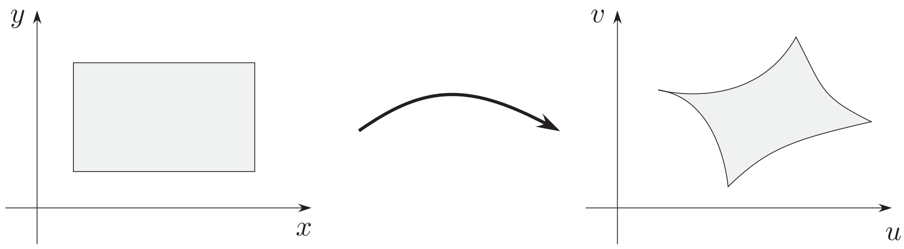
2 重積分の時に，これに相当するものを考えて行こう．今，(x, y) から新しい座標 (u, v) に移ることを考える．ここで新しい座標系が (u, v) だが，旧い座標を新しい座標で表して，(x, y) と (u, v) の関係を

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v) \tag{1.5.2}$$

と書くことにする．例としては，$x = u + v, y = u - v$ などを想定して欲しい．このとき，(x, y) でみた時の積分領域 A が，(u, v) では B になるとしよう．また，上の変数変換をして f を表したものを $g(u, v)$ と書こう：

$$g(u, v) \equiv f(x(u, v), y(u, v)). \tag{1.5.3}$$

さて，問題：重積分 $\iint_A f(x, y) dxdy$ は，u, v での重積分として，どのように書けるだろうか？下図の左が領域 A，右が変数変換後の領域 B のつもりである．



単純に考えて，積分領域 A が B になるのだから，

$$（間違い !! ）\qquad \iint_A f(x, y)\, dxdy = \iint_B g(u, v)\, dudv \qquad （間違い !! ） \tag{1.5.4}$$

となると思ったら，一般には間違いである．これが間違いであることは，1 次元の時を思いだせば，ある程度は理解できる．1 次元の場合，区間 $[x_1, x_2]$ が区間 $[t_1, t_2]$ に変わったからと言って，

$$（間違い !! ）\qquad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t))\, dt \qquad （間違い !! ） \tag{1.5.5}$$

ではなく，正しくは

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t))\, x'(t)\, dt \tag{1.5.6}$$

だった．しつこいけど，**変数変換によって区間が伸び縮みする効果**を考えに入れるために，$x'(t)$ が必要だったわけね．

重積分でも事情は同じで，変数変換によって座標が伸び縮みした効果を表すものが必要である．ただし，考えている座標の変換が２次元的だから，伸び縮みだけでなく，「ひねり」の要素も加わるので，話がややこしい．

答えを言ってしまうと，以下のようになる．

定理 1.5.1 変数変換 (1.5.2) に対応して，<u>ヤコビアン</u> と呼ばれる関数 $J(u, v)$ を，以下の行列式で定義する：

$$J(u, v) \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \equiv \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}. \tag{1.5.7}$$

また，変数変換 (1.5.2) は十分に性質の良いもの，つまり

- 領域 A と B の点が 1 対 1 に対応し，
- $x = x(u, v)$ と $y = y(u, v)$ が偏微分可能で導関数が連続，
- B 内でヤコビアン $J(u, v)$ がゼロでない

とする．このとき，

$$\iint_A f(x, y)\, dxdy = \iint_B g(u, v)\, |J(u, v)|\, dudv \tag{1.5.8}$$

である．

- A の点と B の点が 1 対 1 に対応することは非常に重要だ．もし例えば 1 ：2 であったら，A を B でみると 2 回数えてしまってる感じになって，答えが 2 倍ずれてくる．
- 上の定理では，ヤコビアンの**絶対値**をとったものが現れていることにも注意．1 次元の積分では $x'(t)$ （絶対値ではない）が出ていたことと違う．この理由は，**重積分では本質的に「積分の向き」がない**ことに関係している．

非常に重要な例：平面の極座標

直交座標 (x,y) から極座標 (r,θ) への変換を考えよう．座標変換の式は

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \tag{1.5.9}$$

であるから，ヤコビアンは

$$J(r,\theta) = \det\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r \tag{1.5.10}$$

というわけで，皆さんのよく知っている（はずの）$dxdy$ を $rdrd\theta$ に変換するのが出てきた..

言うまでもなく，このような変数変換は，それをやることによって初めて積分できる場合が多いから重要なのだ．例えば積分 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ はこのままでは積分が非常に難しい．しかし，極座標に変換すると

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^1 dr\, r\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-r^2} = 2\pi\int_0^1 e^{-r^2}\, r\, dr = 2\pi\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^1 = \pi(1-e^{-1}) \tag{1.5.11}$$

と計算できる．

このような応用例としては

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \tag{1.5.12}$$

の証明がある．答えを知ってないととても出来そうにないが，これは

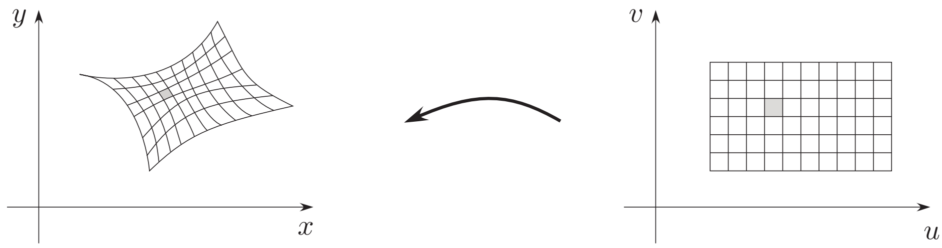
$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \tag{1.5.13}$$

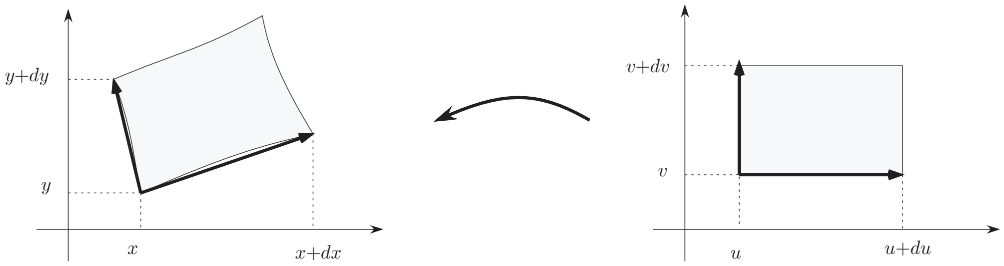
と考えて極座標に変換すると計算できる.（これも 1 年の時に散々聞かされたかな？）

ヤコビアンの意味（変数変換の公式の略証）

上の変数変換の式（ヤコビアン）が出てくる理由を述べよう．そのためには重積分の定義に戻って考えるのが良い．

何度も強調したように，$\iint_A f(x,y)dxdy$ とは，xy 座標系を細かく四角に区切って，その四角の面積と $f(x,y)$ の値をかけたものを足し併せ（たものの極限をと）る，ことだった．同様に，$\iint_B h(u,v)dudv$ は，uv 座標系での四角の面積と h の値をかけて和をとるわけ．





さて，uv-平面での小さな四角 $[u, u+du] \times [v, v+dv]$ を考えよう．これがもとの xy-平面で囲む図形は，その４つの頂点が

$$(x(u,v), y(u,v)),\ \ (x(u+du,v), y(u+du,v)),\ \ (x(u,v+dv), y(u,v+dv)),\ \ (x(u+du,v+dv), y(u+du,v+dv)) \tag{1.5.14}$$

で与えられる，近似的な平行四辺形になる．この平行四辺形を作る２つのベクトルは du, dv が非常に小さいとすると，

$$\begin{bmatrix} x(u+du,v)-x(u,v) \\ y(u+du,v)-y(u,v) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}du \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}du \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} du \quad \text{と} \quad \begin{bmatrix} x(u,v+dv)-x(u,v) \\ y(u,v+dv)-y(u,v) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v}dv \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial v}dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} dv \tag{1.5.15}$$

である．ところで，ベクトル (a, b) と (c, d) の作る平行四辺形の面積は，行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の行列式，つまり $ad - bc$（の絶対値）で与えられた（線形代数の講義を思い出そう；忘れていても，初等的にも導けるよ）．これを用いると，考えている近似的な平行四辺形の面積は以下（の絶対値）になるはずだ．

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}du & \dfrac{\partial x}{\partial v}dv \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}du & \dfrac{\partial y}{\partial v}dv \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} dudv = J(u,v)\, du\, dv \tag{1.5.16}$$

このようにしてヤコビアンが登場するのである． □

1.6 ３次元以上の重積分

いままで，平面上の領域での重積分を考えてきた．空間内での積分（３重積分）は平面の場合と全く同様のアイディアで定義される．ただし，平面の場合には考える積分領域（２次元）を細かい長方形のメッシュで覆ったが，３次元の場合には積分領域（３次元）を細かい直方体で覆うところが異なる.（これ以外は全く同じだからくり返さない．でもよく考えると，１次元と２次元の差も，覆う対象が１次元の領域か２次元の領域か，それに応じて分け方を変えただけだった.）４次元以上での積分（４重積分，５重積分）も同様に定義できる．

これらの n 重積分も，２重積分と同様の性質を持っている．すなわち，

1. n 重積分は，非積分関数と積分領域の性質が良ければ，n 個の累次積分で表せる．実際に累次積分に直すには，n-次元空間での積分領域を図示して（4 次元以上では不可能だが，少なくともできるだけ思い浮かべて），丁寧に直していけばよい．
2. n 重積分においても，性質の良い変数変換に対しては，ヤコビアンを用いた変数変換の公式が成り立つ．勿論，この場合のヤコビアンは $n \times n$ 行列の行列式である．

ヤコビアンについて補足しておく．n 次元での元々の座標が $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 新しい座標が $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ で，各 x_i は u_1 から u_n の関数として書けているとする．このとき，

$$\iint \cdots \int_A f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \iint \cdots \int_B g(u_1, u_2, \ldots, u_n) \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \right| du_1 du_2 \cdots du_n \tag{1.6.1}$$

となる．ここで B は新しい座標 $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ で見た積分領域 A のことであり，g は対応する点での f の値を表す．また，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{bmatrix} \tag{1.6.2}$$

という $n \times n$ 行列の行列式である．

座標変換で最も重要なのは極座標への変換であろう．3 次元の場合，これは

$$x = r\, \sin\theta\, \cos\phi, \quad y = r\, \sin\theta\, \sin\phi, \quad z = r \cos\theta \tag{1.6.3}$$

で，(r, θ, ϕ) の動く範囲はそれぞれ $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ である．この場合のヤコビアンは（各自確かめる）

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = \det \begin{bmatrix} \sin\theta\, \cos\phi & r\cos\theta\, \cos\phi & -r\sin\theta\, \sin\phi \\ \sin\theta\, \sin\phi & r\cos\theta\, \sin\phi & r\sin\theta\, \cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix} = r^2 \sin\theta \tag{1.6.4}$$

となる．以下に極座標関連の発展問題を２つ載せる．どちらもかなり大変だから，無理にできるようになる必要はない．今できることよりも，将来，何らかの役に立つだろうと思って載せている．

発展問題その１：

４次元以上の極座標と，そのヤコビアンがどうなるか，一度やってみると良い．ただし，一般次元では計算が非常に大変であるから，相当の覚悟が必要．

発展問題その２：

n を３以上の整数とする．原点を中心とする半径 r の n-次元球とは，$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq r^2$ を満たす点の集合である．こいつの体積 $V_n(r)$ を求めるには，いくつかの方法がある．

- 上の発展問題で求まったはずのヤコビアンを用いて，n-次元極座標へ変換した積分を行う．非積分関数には，この球の定義関数をとればよい．この方法は一番の基本だが，ヤコビアンの計算が大変で死ぬことが多い...
- この球を x_n が一定の面で切ると，その切り口は半径が $\sqrt{r^2 - x_n^2}$ の，$(n-1)$ 次元球になる．この切り口の面積（体積）を x_n で積分することで，n 次元球の体積が求められるはずだ：

$$V_n(r) = \int_{-r}^{r} dx_n\, V_{n-1}(\sqrt{r^2 - x_n^2}) \tag{1.6.5}$$

一方，相似な図形の体積を考えると，半径 r と半径 1 の球の体積の比は丁度 r^n のはずである（a_n は係数）：

$$V_n(r) = r^n V_n(1) = r^n \times a_n \tag{1.6.6}$$

この２つの式を組み合わせると，a_n と a_{n-1} の間の漸化式が得られる．２次元球（円）や３次元球では $a_2 = \pi, a_3 = 4\pi/3$ を知っているから，漸化式を解くと，$n \geq 4$ に対しての a_n と $V_n(r)$ がわかる．

- n 次元のガウス積分 $\displaystyle\iint\cdots\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}\,dx_1dx_2\ldots dx_n$ を以下の別々の方法で計算して，結果を比較する．
  - 指数関数が積に分かれることから，各成分でバラバラに積分する．結果は $\pi^{n/2}$ のはず．
  - n 次元の極座標に変数変換するつもりになる．しかし，今は非積分関数が球対称だから，角度成分は積分できてしまって，結局 $\int_0^\infty drr^{n-1}c_n\,e^{-r^2}$ の形になるはずだ．ここで c_n は n–次元の立体角（半径 1 の n-次元球の表面積）であり，上で出てきた a_n とは，$c_n = na_n$ の関係にある．

  両者を等置して，
$$\pi^{n/2} = n\,a_n \int_0^\infty dr\,r^{n-1}\,e^{-r^2} \tag{1.6.7}$$
  となるはずで，これから a_n と $V_n(r)$ が求まる.（右辺の積分は Γ-関数で表される.）

1.7 広義多重積分

1 変数関数の場合，広義積分というのは $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ や $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ のように，(1) 非積分関数がある点で無限大になってしまうもの (2) 積分区間が無限の大きさを持ってしまうもの，などを言った．これらは共に，最低限のリーマン積分の定義からはみ出しており，何らかの補足的な定義を必要とするからである．

そして実際，これらの積分は以下のような**極限**として定義（解釈）された：
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{L\to\infty}\int_0^L \frac{1}{1+x^2}\,dx \tag{1.7.1}$$
これらの極限が存在する場合，その極限値を広義積分の値と定義する．左の例では $x=0$ で非積分関数が無限大になるので，そこを ϵ だけ避けた形の積分をまず考え，$\epsilon\to +0$ の極限を考えている．右の例では積分区間が無限に広いから，$[0,L]$ という有限のところでの積分をまず考え，$L\to\infty$ とすることで無限区間での積分を再現したつもりになっている．

（記号）$\displaystyle\lim_{\epsilon\downarrow 0}$ というのは，ϵ を正のままゼロに近づける，の意味であり，$\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0+}$，$\displaystyle\lim_{\epsilon\to +0}$ などとも書く．同様に，a より小さい側から x を a に近づけるのは $\displaystyle\lim_{x\uparrow a}$ とか $\displaystyle\lim_{x\to a-0}$，$\displaystyle\lim_{x\to a^-}$ などと書く．また a より大きい側から x を a に近づけるのは $\displaystyle\lim_{x\downarrow a}$ とか $\displaystyle\lim_{x\to a+0}$，$\displaystyle\lim_{x\to a^+}$ などと書く

重積分の場合も広義積分は極限として定義するが，極限の取り方がもっと色々あるから大変だ．例えば,「平面全体」で積分する場合，どのような形の有限領域を拡大していくかで極限が異なる可能性がある．1 次元の時でさえ，$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty dx f(x)$ とは，プラスとマイナスの方向を別々に無限大にすることだった．つまり，
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{\substack{K\to-\infty\\ L\to+\infty}}\int_K^L f(x)dx \tag{1.7.2}$$
多重積分の場合はいろいろな方向に広がって行くから，より大変なのだ．

一応，多重積分の場合の広義積分の定義を与えておこう．

定義 1.7.1 (広義積分のちょっといい加減な定義) 平面内の図形 A で関数 f を積分し，$\iint_A f(x,y)dxdy$ を求めたいが，非積分関数が無限大になったり，積分領域が無限に広かったりして，いままでの重積分の定義が適用できないとしよう．このとき，以下のような積分領域の列を考える．

(a) 図形 A は有界だが，その内の一点 a で f が無限大になる場合：　このときは一点 a とその周囲を少し除いた形の領域の列 $\{A_n\}$ で，$n\to\infty$ では A に一致するようなものを考える．

(b) 図形 A が無限の広がりを持つ場合：　このときは，有界な領域の列 $\{A_n\}$ で，$n\to\infty$ では A に一致（近づく）ようなものを考える．

このどちらの場合でも，もし，極限

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{A_n} f(x,y)dxdy \tag{1.7.3}$$

がすべての $\{A_n\}$ の取り方に対して存在し，かつその 極限が $\{A_n\}$ の取り方に依らない ならば，この極限を広義積分 $\iint_A f(x,y)dxdy$ の値と定める．極限が存在しなかったり，極限が $\{A_n\}$ の取り方によるばあいは，広義積分 $\iint_A f(x,y)dxdy$ は存在しない，という．

上の (a), (b) の両方に該当する場合や f が無限大になる点が複数ある場合などは，その都度，適当に A_n をとって考える．なお，問題によっては，特定の列 $\{A_n\}$ についてのみ極限があれば良しとする場合もあるので注意．

（細かい，でも重要な注意）上の A_n の取り方であるが，あまり変なものを考えるのは生産的でないことがある（例えば，変に針状にとんがったものとか）．ここでは変態な場合は考えず，非常に緩い意味で A_n が円盤と同じように見える場合を考えておけばよい．

あまり一般的にやってもややこしくなるだけなので，以下の２つの例を中心に考える（$\alpha > 0$ は定数）．

$$(a)\qquad \int_{0<x^2+y^2\le 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy, \qquad (b)\qquad \int_{x^2+y^2\ge 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy \tag{1.7.4}$$

(a) の場合，非積分関数が原点で無限大になるが，ともかく半径 1 の円内で積分したい．そこで，A_n として，円環 $\frac{1}{n^2} \le x^2+y^2 \le 1$ をとってみる．原点でやばいことがおこっているので，そのまわりを少しだけ除いた訳だ．

極座標に移ると，A_n は $\frac{1}{n} \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi$ の領域に移る．従って，

$$\iint_{A_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{1/n}^1 drr\,\frac{1}{r^{2\alpha}} = 2\pi\int_{1/n}^1 dr\,r^{1-2\alpha} \tag{1.7.5}$$

が得られた．この積分は $\alpha < 1$ ならば，$n\to\infty$ でも存在する．一方，$\alpha \ge 1$ では，$n\to\infty$ の時に発散してしまう．従って，元の重積分が定義できるためには，$\alpha < 1$ が**必要**であることがわかる．

なお，広義積分の定義では，上のような円環以外の A_n についての極限も考察し，それらがすべて同じであることを確かめねばならない．これはなかなか大変なのであるが，今の場合は非積分関数が正であるため，積分の値は領域 A_n について単調増加である．つまり

$$A \subset B \qquad なら, \qquad \iint_A \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy \le \iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy \tag{1.7.6}$$

が成り立つ．この性質を利用して，一般の A_n での積分の値を，上で定義した円環での積分の値で挟み込むことができる．このような議論からどのような A_n についても積分の極限値は等しいことがわかる．つまり，$\alpha < 1$ がこの広義積分の存在のための必要十分条件だ．

(b) の場合，今度は積分領域が無限に広いので，$1 \le x^2+y^2 \le n^2$ なる円環を A_n としてやろう．極座標に移って同様に計算すると，

$$\iint_{A_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy = \int_1^n drr\,\frac{1}{r^{2\alpha}} = \int_1^n dr\,r^{1-2\alpha} \tag{1.7.7}$$

が得られる．この積分は $n\to\infty$ の時，$\alpha > 1$ なら収束するが，$\alpha \le 1$ なら発散する．(a) の場合と同様に単調性を使って議論すると，この広義積分が定義されるためには $\alpha > 1$ が必要十分であることがわかる［(a) の場合と不等号の向きが逆なことに注意］．

一般に積分を正確に計算できることはあまり多くない．しかしそのような場合でも広義多重積分が収束するか否かを判定したいことはよくある．そのような場合に使える定理を２つ，挙げておこう．

1.7.1 非積分関数が一定符号の場合

まず，簡単な場合として，非積分関数が一定符号 —— いつも非負，またはいつも非正 —— の場合を考えよう．（正でも負でも一緒だから，以下では非負の場合のみ考える．）このときは簡単な（必要）十分条件がある．これは 1 年生の時にやった「有界単調数列の収束」と同じノリであることがわかるだろう．

命題 1.7.2 $f(x,y) \ge 0$ とし，上の定義 1.7.1 の (a) や (b) の状況を考える．このとき，
(i) 広義多重積分 $\iint_A f(x,y)dxdy$ が収束することと
(ii) 定義 1.7.1 の (a) や (b) における $\iint_{A_n} f(x,y)dxdy$ が有界であること
は同値である．

証明：
数列 $S_n := \iint_{A_n} f(x,y)dxdy$ を考える（$n > a$）と，$f(x) \ge 0$ ゆえ，これは広義単調増加である．また，仮定から S_n は有界でもある．広義単調増加な有界数列は収束するから，極限 $S_\infty := \lim_{n\to\infty} S_n$ が存在する．

でもまだ証明は終わりではない．これまでのところでは，この特定の A_n の取り方についての極限の存在を言ったに過ぎぬ．本来は，他の A_n の取り方についても極限が存在してすべて等しいことを言う必要がある．

しかし，これは互いに入れ子になっている領域の列 A_n と B_n を使うことで解決できる．今，非積分関数が非負なので，$A \subset B$ ならば $\iint_A f(x,y)dxdy \le \iint_B f(x,y)dxdy$ である．これから，$A_n \subset B_n \subset A_{n+1}$ となるように A_n と A_{n+1} で B_n を挟んでやれば，$\iint_{A_n} f(x,y)dxdy \le \iint_{B_n} f(x,y)dxdy \le \iint_{A_{n+1}} f(x,y)dxdy$ が成り立つ．特に，$\lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} f(x,y)dxdy$ が存在するならば，はさみうちの原理に寄って，$\lim_{n\to\infty} \iint_{B_n} f(x,y)dxdy$ も同じ極限に収束するといえる訳だ． □

1.7.2 絶対収束する広義積分

広義積分 $\iint_A |f(x,y)|dxdy$ が存在するとき，広義積分 $\iint_A f(x,y)dxdy$ は <u>絶対収束</u> するという．級数の場合と同じく，絶対収束する広義積分は普通の収束もする．

広義積分 $\iint_A |f(x,y)|dxdy$ の非積分関数は非負なので，前節の判定条件（命題 1.7.2）によってその収束・発散を判定できる．このように，与えられた広義積分が絶対収束するか否かは簡単に判定できる．

なお，多重積分においては，１次元の積分のときのような「条件収束する広義積分」は少し考えにくい．なぜなら，１次元の場合と異なり，２次元以上では（１次元のときの開区間に相当する）自然な A_n の列が決めにくいためである．そのため，この講義でも「条件収束する広義積分」は扱わない．

2 線積分と面積分

前節では，２次元的，３次元的なところでの積分を考えた．これらは１次元での積分の自然な拡張であるが，１次元での積分の拡張はこれだけではない．その重要な例として,「線積分」と「面積分」を考える．みなさん既にある程度知ってる（電磁気？）ように，これらは積分領域が「くにゃくにゃ曲がっている」方向への拡張である．

2.1 曲線とは

わざわざ節を立てるまでもないが,「曲線」の定義を与えておく．我々は直感的に曲線とは何か，知っているつもりだが，どのような変態なものまで許すか考え出すと，それなりに厄介だ．そこで，この講義では以下の定義を採用する．

定義 2.1.1 (曲線) n-次元空間の中の 曲線 とは，各成分が実数 t の連続関数であるような，n-成分の関数 $\boldsymbol{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ldots, x_n(t))$ の（軌跡の）ことである．このとき，t を，曲線を表す媒介変数（パラメーター）と呼ぶ．また，この講義では t の範囲を常に区間 $[0, 1]$ にとる．

この定義でわかるように，t を 0 から 1 まで動かすことで，曲線をなぞっていける．この意味で，**曲線には向きが自然に定義**される．また，$t = 0$ での曲線上の点を曲線の 始点，$t = 1$ の点を曲線の 終点 という．

なお本来の意味で曲線という場合には，上の定義で t を動かしたときにできる，n-次元空間内での**軌跡**を指す．この意味で，軌跡が同じならパラメーターの入れ方が違うものでも同じ曲線とみなす．

例：原点と $(1, 1)$ を結ぶ線分は，$\boldsymbol{r}(t) = (t, t)$ と書いても良いし，$\boldsymbol{r}(t) = (t^2, t^2)$ でも良いし，$\boldsymbol{r}(t) = (\sqrt{t}, \sqrt{t})$ でも良いし... でも，それをいちいち書くと面倒だから，以下では何か一つのパラメーター表示を決めたものとして通す.（興味のある人は，線積分の結果がパラメーター表示を変えても変わらないことを確かめるとよい.）

以下では主に３次元空間の中の曲線を考える．その際は $\boldsymbol{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ の代わりに，$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ と書くこともある．

上で定義した曲線はちょっと一般的すぎるので，以下でよく考えるものを改めて定義しておく．

定義 2.1.2 (滑らかな曲線) n-次元空間の中の曲線 $\boldsymbol{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ldots, x_n(t))$ のうち，**滑らかな曲線**とは以下の２条件を満たすものである：

(1) 各成分 $x_i(t)$ が t の関数として微分可能で導関数が連続，かつ

(2) $\boldsymbol{r}'(t)$ は $0 \le t \le 1$ でゼロベクトルにはならない

２番目の条件は曲線のバラメーター付け（t をどのような関数に選ぶか？）の問題であるが，簡単のため，この条件も要求しておく．

2.2 線積分の定義

この節では線積分を定義する．記述を簡単にし，かつイメージが湧きやすいように３次元での話に限定するが，一般の n-次元への拡張は自明であろう．

線積分とは，以下のような問いを考える際に自然に出てくるものである.（これは力学では非常に自然な問題であるが，物理が嫌いな人はまあ，無視しても良い.）

問：空間内に曲線 $\boldsymbol{r}(t)$ が与えられており（$0 \le t \le 1$）この曲線に沿って粒子が動いた場合，どのくらいの仕事がなされたかを考えたい．ただし，粒子にかかる力は場所 (x, y, z) ごとに異なり，$\boldsymbol{F}(x, y, z)$ というベクトル形で与えられているとする．簡単のため，曲線の始点は原点 $\boldsymbol{0} = (0, 0, 0)$，終点は $\boldsymbol{a} = (a, b, c)$ とする．

この問題を段階的に考えて行こう．

Step 1. まず簡単のため,「考えている曲線は直線で，粒子に働く力は場所に依らない」場合を考える．つまり，粒子は原点から点 (a,b,c) まで直線上を動き，粒子に働く力はこの直線に沿った方向で，大きさが F（一定）だとしよう．

このとき，粒子がなされる仕事の総量は (力の大きさ) $\times$ (動いた距離) だから，$F\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ である．この表式は $F>0$（力と運動が同じ向き）の場合も，$F<0$（力と運動が逆向き）の場合も正しい．

Step 2. 粒子は上と同じく原点から点 $\boldsymbol{a}=(a,b,c)$ まで直線上を動くが，粒子に働く力は $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y,F_z)$ というベクトルで必ずしも直線と同じ方向でない（ただし，各成分は一定）場合．

粒子になされる仕事には，力 $\boldsymbol{F}$ の直線に沿った**分力**が関係する．この分力を表すために，直線の方向ベクトルが $\boldsymbol{n}=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$ で表されることに注意しよう．力 $\boldsymbol{F}$ の直線の方向の分力は，向きは $\boldsymbol{n}$ で，大きさ（符号こみ）は $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ である（$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積）．つまり，問題の分力は $(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$ である．

これで力の大きさがわかったから，Step 1 に従うと，粒子のされた力の総量は

$$(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\times\sqrt{a^2+b^2+c^2}=F_x\,a+F_y\,b+F_zc=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a} \tag{2.2.1}$$

となる．最右辺の表式が有用である：言葉でまとめると「粒子が直線に沿って，一定の力の下で運動するとき，粒子の受ける仕事の総量は（粒子の変位ベクトル $=\boldsymbol{a}$）と（力のベクトル $=\boldsymbol{F}$）の内積で与えられる」となる．もちろん，Step 1 の結果は上の特殊な場合である．

（この辺りは,「力学」の講義などでやっているはずだが，一応，復習した．以下では,「粒子が曲線に沿って動く」「力が一定ではない」の２方向に一般化することで，線積分を導入する．ただし，この２方向はほとんど同じ複雑さを要求するので，両方一編にやる.）

Step 3. 粒子が折れ線に沿って運動し，粒子に働く力は折れ線ごとに一定の場合．

折れ線は原点 $\boldsymbol{r}_0=(0,0,0)$ から出発して，n 個の点 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_n=\boldsymbol{a}=(a,b,c)$ を順に結ぶものとする．点 $\boldsymbol{r}_{i-1}$ から $\boldsymbol{r}_i$ を結ぶ折れ線を ℓ_i と書き，各 ℓ_i 上では力が一定（$\boldsymbol{F}_i$ と書く）としよう．折れ線 ℓ_i 上で粒子のされた仕事は，Step 2 から $\boldsymbol{F}_i\cdot(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{i-1})$ である．従って，原点から (a,b,c) までの仕事の総量は

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{i-1}) \tag{2.2.2}$$

となっているはずだ．

Step 4. 粒子が滑らかな曲線 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ に従って運動し（$0\le t\le 1$），粒子に働く力は粒子のいる場所の関数である場合．つまり，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ における力は $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=(F_x(x,y,z),F_y(x,y,z),F_z(x,y,z))$ の形のベクトル（各成分が (x,y,z) の関数）で与えられる場合．

これがもっとも一般の場合であるが，Step 3 の自然な拡張として考えられる．滑らかな曲線（曲がっている）は考えにくいから，今までやってきたことに倣って，まずは**曲線を折れ線で近似**しよう．すなわち，始点から終点までの曲線上に，順に $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{0},\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_n=\boldsymbol{a}$ の点を取り，曲線を Step 3 のような折れ線で近似することを考える．$\boldsymbol{r}_{i-1}$ から $\boldsymbol{r}_i$ の部分を ℓ_i と書くとき，ℓ_i の長さが十分に小さく，かつ $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が $\boldsymbol{r}$ に滑らかに依存する場合は，各 ℓ_i 上では $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ はほとんど一定のベクトルと思って良いだろう．ここまで近似すると，問題は Step 3 で解いたものになるので，

$$\text{（この近似での仕事量）}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i)\cdot(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{i-1}) \tag{2.2.3}$$

となるはずである．

そして，本当の答え（滑らかな曲線に沿っての仕事）は，上の近似値の極限，つまり

$$\lim_{\text{分割を細かく}}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i)\cdot(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{i-1}) \tag{2.2.4}$$

で与えられる，と考えるのが自然である.（ここで「分割を細かく」というのは，上での n を無限大にして，すべての i について $\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{i-1}$ の長さをゼロにする極限を指す.）

以上を動機付けとして，以下のように「線積分」を定義する．

定義 2.2.1 空間内の曲線 $C : \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$,（$0 \le t \le 1$）と，空間の各点で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が与えられている（空間全体で定義されていなくても，曲線上の各点で定義されていれば十分）．このとき，C に沿った $\boldsymbol{F}$ の線積分を，以下のように定義する．

- 曲線 C 上に，その順に沿って 始点$=\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n=$終点 の点をとる．これを曲線 C の<u>分割</u>と呼び，Δ で表す．
- $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して，$\boldsymbol{r}_{i-1}$ と $\boldsymbol{r}_i$ の間（両端も含む）に勝手に点 ζ_i をとる．ζ_1 から ζ_n をまとめて $\vec{\zeta}$ と書く．
- 分割 Δ とその間の点のあつまり $\vec{\zeta}$ に対して，線積分の<u>リーマン和</u>を
$$S(\Delta, \vec{\zeta}) := \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\zeta_i) \cdot (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1}) \tag{2.2.5}$$
として定義する．
- 分割を細かくした極限（つまり，$|\Delta| = \max_i |\boldsymbol{r}_{i-1} - \boldsymbol{r}_i|$ がゼロに行く極限）を考える．どのような分割の取り方，および，どのような $\vec{\zeta}$ の選び方に対しても上のリーマン和の極限が同じ値に収束するとき,「曲線 C に沿った $\boldsymbol{F}$ の線積分」が存在するといい，その極限値をこの線積分の値と定義する．記号では
$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \lim_{|\Delta| \to 0} S(\Delta, \vec{\zeta}) \tag{2.2.6}$$

1 次元のリーマン積分，また 2 重積分や 3 重積分の定義を思い出してもらうと，上の定義はこれらの自然な拡張（または親類）になっていることが納得できるだろう．

理解を深めるための問題： 曲線 C を，原点と $(1, 1, 1)$ をつなぐ放物線（$y = z = x^2$），ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ を
$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix} \tag{2.2.7}$$
とするとき，線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ を，上の定義に従って求めよ．(より効率の良い計算方法はすぐ後でやります.)

ここで問題になるのは，どのような曲線，どのようなベクトル場なら線積分が定義できるのか，ということである．曲線に沿っての積分だから，まず曲線の長さが定義できることがほとんど必要であることは納得できるだろう．その上で，$\boldsymbol{F}$ 自身もそれなりに性質の良いことが求められよう．そのような十分条件の一つとして，以下が挙げられる．

定理 2.2.2 (線積分が定義できる十分条件) 線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ が定義できる**十分条件**の一つは，以下の 2 つが成り立つことである．

- 曲線 C が「滑らかな曲線」（定義 2.1.2 参照）であり，
- ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ は，その引数 x, y, z に関する連続関数である．

（余談）上の定理では曲線が滑らかなことを仮定したが，これはあくまで十分条件である．多分，曲線の各成分 $x_i(t)$ が「有界変動関数」であり，$\boldsymbol{F}$ が連続関数ならば積分可能と思うが，確認する根性がなかった．

2.3 線積分の計算法

上での線積分の定義は，どうにも計算しにくい．しかし，２重積分などがそうであったように，もっと簡単な計算法が導かれる．

定理 2.3.1 (線積分の計算法) 定理 2.2.2 の条件の下では，線積分の値は，以下のように t の積分で計算できる：

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot \boldsymbol{r}'(t)\,dt \tag{2.3.1}$$

ここで，$'$ は t による微分を表し，$\boldsymbol{r}'(t)$ とは，$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ の各成分を t で微分して得られるベクトル $(x'(t),y'(t),z'(t))$ のことである．

すなわち，線積分は曲線の接ベクトル $\boldsymbol{r}'(t)$ と $\boldsymbol{F}(t)$ の内積を積分すれば求められるのだ．

練習問題：前節の「理解を深める問題」を，上の定理を使ってやり直してみよ．

一般的な注意：この辺りで，何がベクトルで何がスカラーかをきっちり区別することが不可欠になる．ベクトルとベクトルの内積はスカラーになったりするからヤヤコシイが，混乱しないように注意すること．この講義ではベクトル量は太字，スカラー量は普通の字体，とできるだけ区別していく．例外は η_i で，これは本当はベクトルの太字で書くべきなのだが，フォントの関係で書けていない．

定理 2.3.1 の証明（説明）

完全な証明はやらないが，感じをつかむだけなら以下のように考えれば割合に簡単である．

今，線積分が定義できる場合を考えているので，線積分の定義に出てくる分割 Δ や点 $\vec{\zeta}$ を都合の良いようにとって，計算すればよい．そこで，パラメーターの区間 $[0,1]$ を n-個に区切って，$t_0=0<t_1<t_2<\ldots<t_{n-1}<t_n=1$ としてやろう．また，区間 $[t_{i-1},t_i]$ 内に点 s_i をとる．この t_i に対応して，$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}(t_i)$ と，$\zeta_i=\boldsymbol{r}(s_i)$ を定義すると，線積分の定義に出てきたリーマン和は，

$$S(\Delta,\vec{\zeta}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(s_i))\cdot\bigl(\boldsymbol{r}(t_i)-\boldsymbol{r}(t_{i-1})\bigr) \tag{2.3.2}$$

の形になる[7]．

さてここで，t_{i-1} と t_i の差が非常に小さいものとしよう．すると，

$$\boldsymbol{r}(t_i)-\boldsymbol{r}(t_{i-1}) \approx \boldsymbol{r}'(t_{i-1})\times(t_i-t_{i-1}) \tag{2.3.3}$$

が成り立つだろう[8]．これを (2.3.2) へ代入して，

$$S(\Delta,\vec{\zeta}) \approx \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(s_i))\cdot \boldsymbol{r}'(t_{i-1})\times(t_i-t_{i-1}) \tag{2.3.4}$$

となる．$\boldsymbol{r}'(t)$ は連続関数であること（定理の仮定），および t_{i-1} と s_i が非常に近いことを用いると，上の $\boldsymbol{r}'(t_{i-1})$ を $\boldsymbol{r}'(s_i)$ で置き換えても良いだろう[9]．結果として，

$$S(\Delta,\vec{\zeta}) \approx \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(s_i))\cdot \boldsymbol{r}'(s_i)\times(t_i-t_{i-1}) \tag{2.3.5}$$

[7]実のところ，曲線をパラメーター表示したから，(2.2.5) のリーマン和は，適当な t_i,s_i を用いて，必ず (2.3.2) の形に書ける．この意味で，ここまでは前節の書き直しに過ぎない．前節でそのようにパラメーター t を用いて書かなかったのは，そのようにすると $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t_i))$ などと引数が増えて式がややこしくなり，見にくくなると考えたからである

[8]興味のある人への注：ここを厳密に評価するには，平均値の定理を用いる

[9]厳密にやるには，一様連続性をもちいる

を得る．ところが，この表式は積分 $\int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\,dt$ のリーマン和による近似に他ならない．従って，線積分が存在するとの仮定の下では，分割を細かくしていった極限で，(2.3.5) は $\int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\,dt$ に収束するはずなのである．(興味のある人は，上で $\approx$ と誤魔化したところを埋めてみよう.) □

2.3.1 （少し脇道）曲線の長さの表式と線積分

もしかしたら高校か大学一年で，曲線の長さについて習ったかもしれない．これは大ざっぱには，

$$\int_0^1 \|\boldsymbol{r}'(t)\|\,dt \tag{2.3.6}$$

で与えられるものである.（ここで，ベクトル $\boldsymbol{a} = (x, y, z)$ に対し，その長さを $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ で定義した.）これは，今まで定義してきた線積分において

$$\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{\|\boldsymbol{r}'(t)\|} \tag{2.3.7}$$

としたものに等しい．なぜこの選び方で曲線の長さがでるのか，考えてみよう.（ヒント：上のベクトルは，長さが 1 の，曲線の接ベクトルになっている.）

なお，本によっては「**弧長**（曲線の長さ）に**ついての線積分**」と称して，スカラーの関数 $f(x, y, z)$ に対する積分

$$\int_0^1 f(x, y, z) \|\boldsymbol{r}'(t)\|\,dt \tag{2.3.8}$$

が挙げられていることもある．しかし，この積分は，我々の線積分の定義において

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{\|\boldsymbol{r}'(t)\|}\, f(\boldsymbol{r}(t)) \tag{2.3.9}$$

ととったものに等しい．つまり我々の定義の特殊な場合に過ぎないので，この講義では (2.3.8) の定義はあからさまには採用しなかった（これがなぜ「弧長に関する線積分」と呼ばれるか，考えてみよう）.

(2.3.8) について，もう少し補足しておく．これまでに主に扱った線積分 (2.3.1) は

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\,dt \tag{2.3.10}$$

というもので,（物理的応用の「仕事量」で言ったように）曲線の向きにどれくらい $\boldsymbol{F}$ が向いているか，を表す量である．しかし，このようなベクトル量以前に，スカラー量を線積分したくなる場合もある．例えば,

> 曲線 C の形をした細い針金があり，その線密度は ρ で与えられている（針金の場所ごとに変わる）．針金全体の重さはいくらか？
>
> 曲線 C に沿って粒子が運動するとき，大きさが場所による摩擦力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ を受ける．粒子のされた仕事はいくらか？

1 番目の問題では針金の密度を針金に沿って積分していったものが答えのはず．つまり

$$\int_0^1 \rho(\boldsymbol{r}(t))\,|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt \tag{2.3.11}$$

が答え．また 2 番目の問題では，粒子の運動する向きと正反対の方向に力がかかっているわけだ．従って，この場合は力の大きさ $|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})|$ を，曲線の長さで積分したもの（の符号を変えたもの）が答えになるだろう．つまり,

$$-\int_0^1 \big|\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\,\big|\,|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt \tag{2.3.12}$$

が答えのはずである．このように，一成分（スカラー）の関数 $f(\boldsymbol{r})$ を曲線の長さで積分したものも「線積分」と呼び，

$$\int_C f(\boldsymbol{r})\,ds \qquad \text{または} \qquad \int_C f(\boldsymbol{r})\,|d\boldsymbol{r}| \qquad \text{または} \qquad \int_0^1 f(\boldsymbol{r}(t))\,|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt \tag{2.3.13}$$

などと書く（最後のは記号と言うよりは計算方法だけど）．この書き方を使って線積分 (2.3.1) をむりやり書くと，

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot \boldsymbol{r}'(t)\,dt = \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\,|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt = \int_C (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t})ds \tag{2.3.14}$$

となる．ここで曲線の接ベクトル（長さ 1）を

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$$

として導入した．このように「線積分」には２通りのものがあるから区別が必要である．
　なお，この２番目の線積分も説明したのは，$\int_C (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t})ds$ などの書き方が，

　　$\boldsymbol{F}$ の接線方法の成分 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}$ を曲線の長さ ds で積分

という意味づけがはっきりするかもしれないと考えたからである.（これから見るように，面積分でも２通りの定義がある.）

　まとめておくと，線積分には２とおりある：

- （普通の）線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\,\boldsymbol{r}'(t)dt = \int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$　　ここで $\boldsymbol{F}$ はベクトル場
- 弧長についての線積分 $\displaystyle\int_C f(\boldsymbol{r}(t))\,\|\boldsymbol{r}'(t)\|dt = \int_C f(\boldsymbol{r})\|d\boldsymbol{r}\|$　　ここで f はスカラー場

この２つの現れる場面をよく区別することが大切だ.

2.4　面積分の定義

　線積分と同じく，面積分の定義にも大きく分けて２つある．曲線は曲面よりも厄介だし，図を描くのも大変だから，少し大まかな話になってしまうが，ご了承されたい.
　以下の２通りの問題を考える.

　　問１．曲面 S があり，その面密度は（場所ごとに違うが）$\rho(\boldsymbol{r})$ である．この曲面全体の質量を求めよ.
　　（この答えは「曲面積による積分」で与えられる.）

　　問２．曲面 S があり，その表面を時間的には一定の速さで流体が貫いて流れている．貫いて流れる流体の速度は（場所ごとに違うが）$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ で与えられている．単位時間にこの曲面全体を貫いて流れる流体のの重さを求めよ．流体の密度はいつでもどこでも１だとする.（この答えは単に「面積分」と呼ばれるもので与えられる.）

　見てのとおり，問１が前節の最後に補足した「弧長についての線積分」に相当し，問２が「力による仕事」に相当する．この２つは密接に結びついているが，今回は問１から始めるのがわかりやすいだろう．ただし，面積分が良く応用されるのは問２の場合であるので，この講義では主に上の問２に相当するものを扱う.

面積による面積分（問１）；
　問１に答えるのは,（少なくとも概念的には）簡単だ．全体の重さを出すには,（密度）かける（面積）をやればよいが，今の場合，密度が曲面の場所ごとに変わっているのがちと厄介．でも曲面を細かく区切ってやると，それぞれの細かい部分の重さは

　　（細かい部分の密度）　×　（細かい部分の面積）

で与えられるわけだから，これを全部足し挙げればよい．これは「曲面の密度を，その面積で積分した」と言ってもよいだろう．従って，面積分の第一の定義に導かれる：

$$\int_S f(\boldsymbol{r})\,d\sigma(\boldsymbol{r}) = \lim_{\text{分割を細かく}} \sum (\text{細かい部分の面積}) \times (\text{そこでの } f \text{ の値}) \tag{2.4.1}$$

この左辺は基本的には右辺で定義される，単なる記号である．ただし，記号にも少しは意味があって，$d\sigma(\boldsymbol{r})$ というのは「$\boldsymbol{r}$ における細かい部分の面積」を表しているつもりだ．

後のことを考えてもう少し具体的に書いておくと以下のようになる．

- ともかく，曲面を細かく分ける（２重積分の時にやったようなつもりで）．分けたもの（分け方）を Δ と書く．また，曲面が分けられた細かい破片の一つ一つを $S_1, S_2, S_3, \ldots$ と書く．
- 細かい破片 S_i の上の一点 η_i を適当にとる．
- 細かい破片 S_i そのものはまだ曲がっているかもしれず，その面積は定義しにくい．そこで，S_i の，η_i における 接平面 を考える．そして，この接平面に S_i を射影した部分の面積を $\tau_i(\eta_i)$ と書く．
- リーマン和に相当するものとして，
$$S(\Delta, \vec{\eta}) = \sum_i f(\eta_i)\,\tau_i(\eta_i) \tag{2.4.2}$$
を考える．
- 求める「曲面積による積分」は，分割 Δ を細かくした先の
$$\int_S f(\boldsymbol{r})d\sigma(\boldsymbol{r}) = \lim_{|\Delta|\to 0} S(\Delta; \vec{\eta}) = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_i f(\eta_i)\,\tau_i(\eta_i) \tag{2.4.3}$$
として定義する — もちろん，この極限が $\vec{\eta}$ の取り方によらずに存在する場合に限って定義する．極限が存在しない場合，積分は定義できないと考える．

なお，上では暗黙のうちに「曲面 S に対する接平面がどこででも作れる」ことを仮定している．これが成り立たないような曲面では曲面積すら定義できないこともあるので，これは妥当な仮定だろう．

曲面の向きに関する注意（問２に向けて）

これから第２の問題を考えるが，それには「曲面の向き」を決めてかかる必要がある．つまり，曲面に「裏」と「表」を決め，流体が曲面を「裏から表」の向きに貫いているなら流量はプラス,「表から裏」に貫いているなら流量はマイナス，とする．曲面のどっちを表，どっちを裏にするかは全く勝手であるが，ともかくどっちが表でどっちが裏かを決めたら，後はその定義を変えないことが大事である．以下では表と裏は既に決めたものとして話を進める．

- 数学の本では「表」「裏」とはあまり言わず,「裏から表の向き」のことを単に「曲面の外向き」と呼ぶことが多いので，以下でもそれに従う．
- 曲面によっては，表と裏が分離できないものもある（メビウスの帯など）．表と裏が分離できる曲面を「向き付け可能」な曲面といい，**以下では向き付け可能な曲面**だけを考える．

普通の面積分（問２）；

第２の問題の答えを先に言うと，それは以下のような「面積分」で与えられる．

$$\int_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \equiv \int_S \bigl(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\bigr)\,d\sigma(\boldsymbol{r}) \tag{2.4.4}$$

ここで左辺は新しく導入した記号で，右辺がその定義を与えている．ここで $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ とは，曲面上の点 $\boldsymbol{r}$ における曲面の外向き法線ベクトル（長さ 1）であり，右辺は $\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{n}$ の内積（つまり，$\boldsymbol{F}$ の曲面の法線方向の成分）を曲面の面積で積分すべし，と言っているのだ．左辺の記号について言うと，$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}d\sigma$ とは $d\sigma$ の親戚でやはり微少面積

を表すが，今はそれが外向き法線ベクトルの向きを向いている．($d\boldsymbol{S}$ を曲面の微分要素，または簡単に「面素ベクトル」という．)

この２つ目の定義の意味を理解するには，問２に戻って曲面の小さな部分に分けて考えていくのが良いだろう．

Step 1. 考えている曲面が平面の一部で，かつ流体の速度は場所によらず一定で，面に垂直な場合．

このときは考えている曲面を通過する液体の分量は，単に（曲面の面積）と（液体の速度）をかけたものになる．考えている曲面の面積を S，流体の速度の大きさを u とすると，答えは Su.

Step 2. 考えている曲面は平面の一部で，流体の速度 $\boldsymbol{u}$ は場所によらず一定の場合．

考えている曲面を通過するのに有効な速度は，液体の速度 $\boldsymbol{u}$ のうちの曲面に垂直な成分である．これは曲面の外向き法線ベクトル（長さ 1）を $\boldsymbol{n}$ と書くと，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}$ で与えられる．従って，Step 1 から答えは $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\,S$.（ただし，これは流体が曲面の裏から表へ抜けている場合である．向きが逆なら符号も逆になる．）

Step 3. 考えている曲面が小さな三角形の集まりで，流体の速度 $\boldsymbol{u}$ は場所によるが，小さな三角形の内部では一定の場合．

小さな三角形を S_i，その面積も S_i と書くことにしよう．S_i の外向き法線ベクトル（長さ 1）を $\boldsymbol{n}_i$ と書くと，S_i を通り抜ける流体の量は（Step 2 から）$(\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{n}_i)S_i$ である（ここで $\boldsymbol{u}_i$ は S_i での流体の速度ベクトル）．よって，全体の流体の量は

$$\sum_i(\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{n}_i)\,S_i \tag{2.4.5}$$

である．数式の通りであるが，それぞれの三角形における速度ベクトルの法線方向成分（$\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{n}_i$）と，その三角形の面積 S_i をかけて和をとった形である．

Step 4. 一般の場合．

やるべき事はもう明らかだろう．くにゃくにゃ曲がっている曲面は扱いにくいので，こいつをまず，細かく分け，分け方を「分割」Δ とする．分けたそれぞれを S_i と書き，Step 3 へ持ち込みたい．しかし，細かく分けられた一つ一つは小さいとはいえ，曲がっているかもしれないので，平面で近似しなければ面積が決められない．そこで S_i 内の一点 η_i をとり，η_i での S_i への接平面を考える．そして S_i をこの接平面に射影した部分の面積を $\tau_i(\eta_i)$ とする．（分割が細かくなれば S_i とその接平面はほとんど重なり，$\tau_i(\eta_i)$ は S_i の面積に近いだろう，と期待する．）

τ_i の部分を通過する流体の量は，ここでの外向き法線ベクトル（長さ 1）$\boldsymbol{n}_i$ とここでの流体の速度ベクトル（$\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{u}(\eta_i)$）を用いて $(\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{n}_i)\tau_i(\eta_i)$ と書けるはずだ．従って，曲面全体を貫く流量の近似値として，リーマン和

$$S(\Delta,\vec{\eta})=\sum_i(\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{n}_i)\tau_i(\eta_i)=\sum_i\bigl(\boldsymbol{u}(\eta_i)\cdot\boldsymbol{n}(\eta_i)\bigr)\tau_i(\eta_i) \tag{2.4.6}$$

が得られる．後は分割を細かくした極限を考え，これが $\vec{\eta}$ の取り方にかかわらず同一の極限を持つなら，その極限を面積分の値と定義する：

$$\int_S \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_i\bigl(\boldsymbol{u}(\eta_i)\cdot\boldsymbol{n}(\eta_i)\bigr)\,\tau_i(\eta_i) \tag{2.4.7}$$

以上が面積分の定義だが，右辺のリーマン和の形をよく見ると，これは $f(\boldsymbol{r})\equiv\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ としたときの「曲面積による面積分」(2.4.3) と同じである．従って，上で定義した面積分は,「曲面積による面積分」を用いて,

$$\int_S \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})=\int_S \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\,d\sigma \tag{2.4.8}$$

とも書けるはずであって，これが (2.4.4) の意味である．

2.5 面積分の計算法

面積分を一応，定義したのだが，実際の計算にはもう少しの考察が必要だ．特に,「微少な面積 $d\sigma$ をどう表すか」「曲面の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ をどう書くか」が問題である．この２つを考えていこう．

その前に：ベクトルの外積についての補足

線型代数でちゃんとやらなかったような気がするので，簡単に述べておく，３次元空間内のベクトル $\boldsymbol{a} \equiv (a_1 a_2, a_3)$ と $\boldsymbol{b} \equiv (b_1, b_2, b_3)$ に対して，その外積と呼ばれるベクトル（$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と書く）を

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \tag{2.5.1}$$

として定義する．このベクトルの長さは $|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin\theta$ であり（θ は２つのベクトルのなす角度），向きは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方に垂直な向きである．(垂直な向きは２つあるけど，これは $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へまわる「右ねじ」の向きにする.)

また，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が与えられると，この２つのベクトルを２辺とするような平行四辺形が定まる．その面積は $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ になる．

（本題に戻る）まず，考えている曲面は $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ のように，パラメーター (u, v) の関数として表現されているものとする.(曲線の方は $\boldsymbol{r}(u)$ のように，１パラメーターの関数で表された.) この表現には当然，$z = f(x, y)$ と言うものも含まれることに注意（$x = u, y = v, z = f(u, v)$ というパラメーター表示とみなせるから）．なお，曲面 S を表すためには，パラメーター (u, v) は領域 U をくまなく動くものとしておく．

我々は「曲面積に関する積分」$\displaystyle\int_S f(\boldsymbol{r}) d\sigma(\boldsymbol{r})$ を，領域 U に関するなんらかの uv-積分として表したい．どうすべきだろうか？

ええ加減に考えて，

$$\int_U f(\boldsymbol{r}(u, v))\, dudv \qquad \text{（間違い！）} \tag{2.5.2}$$

のようなものが出てくるのではないかと思われる —— $\boldsymbol{r}$ は曲面 S をくまなく動くのだから，(u, v) でみればこれは U を動くし，f の引数 $\boldsymbol{r}$ は当然，$\boldsymbol{r}(u, v)$ と表すべきだ．問題は $d\sigma$ の部分なのだが，これは単純な $dudv$ にならない．

その理由は２重積分の変数変換を思い出すとわかりやすい．そこでは $\iint_A f(x, y) dxdy$ を新しい変数 (u, v) の積分で書き直すことを考えた．答えは $\iint g(u, v) dudv$ ではなくて，ヤコビアン $J(u, v)$ が入って $\iint g(u, v) |J(u, v)| dudv$ となった．ヤコビアンの出た理由は，$dxdy$ の表す面積と $dudv$ の表す面積の比を補正するためだった．((u, v)-平面を区切って作った細かい部分 $dudv$ が，xy-平面ではどのような部分に対応しているのか，かつその面積比はどうか，などの議論をしたことを思い出そう.)

今も同じ事である．uv-平面を細かく区切って小さな長方形を作った場合，それがもともとの曲面上ではどのような図形に対応しているか（かつその面積は？）を考えよう．

uv-平面上での小さな長方形の左下を (u, v)，右上を $(u_2, v_2) = (u + \varDelta u, v + \varDelta v)$ とする（もちろん，$\varDelta u, \varDelta v$ は非常に小さい）．これが曲面上では，長方形を少し変形したもの（平行四辺形に近い）に移るはずで，その頂点の座標は，(u, v) に対応するものが $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$，$(u_2, v_2)$ に対応するものが $(x(u_2, v_2), y(u_2, v_2), z(u_2, v_2))$ である．これを近似的に平行四辺形とみなすと，その２辺を張るベクトルは

$$(x(u_2, v), y(u_2, v), z(u_2, v)) - (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \approx \Big(\frac{\partial x}{\partial u}\varDelta u, \frac{\partial y}{\partial u}\varDelta u, \frac{\partial z}{\partial u}\varDelta u\Big) = \Big(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\Big)\varDelta u \tag{2.5.3}$$

と

$$(x(u, v_2), y(u, v_2), z(u, v_2)) - (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \approx \Big(\frac{\partial x}{\partial v}\varDelta v, \frac{\partial y}{\partial v}\varDelta v, \frac{\partial z}{\partial v}\varDelta v\Big) = \Big(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\Big)\varDelta v \tag{2.5.4}$$

よって，この小さな近似的平行四辺形の面積は，これら２つのベクトルの外積で与えられる．記号が大変なので，$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ に対して，

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} := \Big(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\Big), \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} := \Big(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\Big) \tag{2.5.5}$$

を定義すると，問題の近似的平行四辺形を張るベクトルは

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\varDelta u \qquad \text{と} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\varDelta v \tag{2.5.6}$$

であり，その面積は

$$\Big|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\,\varDelta u \varDelta v\Big| = \Big|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Big|\,\varDelta u \varDelta v \tag{2.5.7}$$

で与えられる．これが $d\sigma$ に相当するものだから，$dudv$ と $d\sigma$ との比は $\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|$ であることがわかった．

従って，このファクターを補正してやると,「曲面積による積分」は

$$\int_S f(\boldsymbol{r}) d\sigma(\boldsymbol{r}) = \int_U f\bigl(\boldsymbol{r}(u,v)\bigr) \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| dudv \tag{2.5.8}$$

である，ことがわかる．右辺は u, v に関する面積分だから，これは原理的には計算できそうだね．

次に，通常の面積分 (2.4.4) を考えよう．これは右辺から見ていくのが良い．$d\sigma$ については既に解明したから，$\boldsymbol{n}$ は何か，を考える．この法線ベクトルは平行四辺形の２つのベクトル (2.5.6) に垂直なものであるから，その成分は

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \tag{2.5.9}$$

に比例しているはずである．長さを 1 にするにはこいつの長さで割ればよい，よって，

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = \pm \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|} \tag{2.5.10}$$

となるはず．ここで $\pm$ となっているのは，求めた外積が我々の決めた「外向き」になっているかどうかを調整するためのものである.（パラメーター (u, v) の入れ方によって，この外積の向きはどちらかに決まるから，ここは注意すべし.）

結局，求める面積分は

$$\int_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \pm \int_U \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v)) \cdot \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|} \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| dudv = \pm \int_U \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v)) \cdot \Bigl(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Bigr) dudv \tag{2.5.11}$$

と書けることがわかった.（$\boldsymbol{n}$ を規格化した分母がちょうどキャンセルしたことに注意.）ここでも $\pm$ は，$\boldsymbol{n}$ が正しく外向きになるように調節するためのものであり，最右辺の非積分関数は $\boldsymbol{F}$ と $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ の内積である..

折角，面積分の定義をやったので，非常に重要な応用例について，考えておく．すなわち，半径 r の球面を考え，その動径方向を「裏から表の向き」とした場合，面積分が極座標でどのように表されるか，考えてみよう．２通りの方法でやっておく．

（方法 1 ）律儀に計算する方法．

球面を極座標で表すと，$x = r \sin\theta \cos\phi, y = r \sin\theta \sin\phi, z = r\cos\theta$ である．曲面を表すパラメーターは θ, ϕ だから，

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = r(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta), \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = r(-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0) \tag{2.5.12}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = r^2 \sin\theta\, (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \tag{2.5.13}$$

となる．実は上をよく見ると，

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = r^2 \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{r}} \tag{2.5.14}$$

となっていることもわかる．ここで $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/\|\boldsymbol{r}\|$ は $\boldsymbol{r}$ の向きを向いた単位ベクトルで，曲面の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ に相当する．したがって,「曲面積による積分」は

$$\int_U f(\boldsymbol{r})\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi \tag{2.5.15}$$

と書けることがわかった．面積要素の大きさは $r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$ である．

また，通常の面積分は,

$$\int_U \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{r}}\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi \tag{2.5.16}$$

と書けることもわかる．

（方法２）

実質的には上と同じだが，もうちょっと直感的に誤魔化す方法．要するに，$\varDelta\theta \times \varDelta\phi$ に相当する球面上の面積が何か，を求めるのである．これは球面の図を書いて考えると良い（講義で説明）．球面の法線ベクトルが動径の方向であるのは明らかだから，この面積の変換さえ考えれば良いわけだ．

3 ベクトル解析の基礎

今まで，重積分，線積分、面積分をやってきた．これらはそれ自身でも閉じた話題であるが,（皆さんが既に電磁気の講義などで知っているように）ベクトル自身の性質と関連づけると，面白いものが見えてくる．

特に，強調したいのは以下の３点である．

- 与えられたベクトル場がどのようなものか，それを的確に表す３つの概念（gradient, divergence, rotation）を理解する．
- 「ガウスの定理」「ストークスの定理」などによって，特定の面積分や線積分を別の形の積分（重積分や面積分など）で書き直せることを理解する．
- （少しおまけ）このことから，物理法則などを「積分形」と「微分形」のどちらでも書けることを理解する．

この節では空間全体で定義されたスカラー値の関数をスカラー場，ベクトル値の関数をベクトル場と呼ぶ．ベクトル $\boldsymbol{A}$ の成分は $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ のように，添え字 x, y, z で表す．なお，以下のノートは数学科の全員向けというより，物理にも興味のある人向けである．

（のっけからおまけ；興味のある人のみ，読んでくれればよい）スカラー，ベクトルという用語について

今までは「スカラー」「ベクトル」という言葉を，故意に定義せずに使ってきた．強いて言えば,「一成分からなる量」がスカラーで,「多成分からなる量」がベクトル，と言ってきた．正直のところ，これは**全く不完全**な定義であり，本当のスカラー，ベクトルの定義は，これらの量の**座標変換に際しての変換性**に基づくべきである．ただし，ここでいう座標変換とは今までの「デカルト座標から曲線座標へ」といったものではなく，いろいろな運動をしている観測者同士の関係を表すものである（力学で出てきた「実験室系」と「回転座標系」などの話．ただし，回転座標系については以下の話はそのままでは適用できない.）

以下では d-次元の空間での話をし，新旧の座標は，原点を共有するデカルト座標だとする[10]．簡単のため，座標は互いに静止しているとする．この場合，座標変換は $x_i' = \sum_{j=1}^{d} R_{ij} x_j$ と書かれる（R_{ij} は $d \times d$ の直交行列 R の ij 成分）．

ある量 $\phi(\boldsymbol{r})$ があって，別の座標系から見てもその値が不変のとき，ϕ は**スカラー**だという．もちろん，別の座標系に移る場合，空間内の同じ点（その座標の値は新旧の座標系で異なるだろうが）での ϕ の値を比べる必要がある．

一方，d-次元空間内で d-成分の量 $(A_1, A_2, \ldots, A_d)$ があり，それが座標変換に際していわゆるベクトルの変換則に従う場合，それを**ベクトル**という．ここで「ベクトル型」の変換則とは，新しい座標での成分が $A_i' = \sum_{j=1}^{d} R_{ij} A_j$ と，座標の場合と同じ行列（R）をかけることで得られることを言う．このように R がかかる理由は，ベクトルが「向き」を持っていて,（本当はベクトルの向きは不変なのだが）座標系が変わった為に，新しい座標ではその向きが変わったように見えるからである．以上の説明が，我々が「力はベクトルである」「電場はベクトルである」という直感と同じであることは各自納得して欲しい．

このような変換則を拡張して，B_{ij}（$1 \le i, j \le d$）という d^2 個の成分を持った量で，その変換則が $B_{ij}' = \sum_{k,l=1}^{d} R_{ik} R_{jl} B_{kl}$ に従うものを考えることもできる．これは２階の**テンソル**と呼ばれる．同様に，添え字が３ついたもの，４ついたもの，を考えて行くこともできる（３階，４階のテンソル）と呼ばれる.（ベクトル，テンソルについては微分幾何的な「正しい」説明をすべきだろうが，それはもちろん，この講義の範囲を超えている.）

（更に補足；以下，この小節の最後までは読み飛ばして良い.）

なお，このような「座標変換に際しての変換則」は物理学上は非常に重要な概念である．というのは，ガリレイ（またはアインシュタイン）の相対性原理を認めると，物理法則は座標変換（ガリレイ変換，またはローレンツ変換）に関して不変な形に書けるはずであり，物理の基礎法則（基礎方程式）はガリレイ変換やローレンツ変換に関して不変（正確には共変）な形である必要が出てくるからである．この事は基礎法則に現れる物理量に非常に厳しい制限を加える．結果だけを述べると，基礎方程式に現れることができるのは，上のスカラー，ベクトル，テンソル,（と上では説明しなかったスピノル）しかないことがわかる．この辺りの事情は「特殊相対性理論，一般相対性理論，ローレンツ群の表現論」などを勉強すると良くわかるだろう[11]．

---

[10] このような制限はニュートン力学を考えていることにほぼ等しい．特殊相対性理論，一般相対性理論ではもっと広範囲の座標変換を考えることになる

[11] このような考えを非常に整理して展開した本に「ランダウリフシッツ理論物理学教程」の「力学」と「場の古典論」がある．これの別（ある種の簡約）バージョンが「物理学小教程」として「ちくま学芸文庫」からでているので，こちらもお奨め

3.1 gradient, divergence, rotation （定義のみ）

まず，ベクトル場やスカラー場を的確に特徴づける，３つの概念を導入しよう．
以下，空間の座標は $\boldsymbol{r}$ で表す．

定義 3.1.1 (gradient, divergence, rotation のええ加減な定義) ここでの (x,y,z) **は通常のデカルト座標と**する．スカラー場 $\phi(x,y,z)$ が与えられたとき，これから定義されるベクトル

$$\mathbf{grad}\ \phi(x,y,z) \equiv \Bigl(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\Bigr) \tag{3.1.1}$$

を ϕ の **gradient**（勾配）という．また，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が与えられたとき，これから定義されるスカラー

$$\mathbf{div}\ \boldsymbol{A}(x,y,z) \equiv \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{3.1.2}$$

を，$\boldsymbol{A}$ の **divergence**（発散）という．また，$\boldsymbol{A}$ から定義されるベクトル

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}(x,y,z) = \Bigl(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\Bigr) \tag{3.1.3}$$

を $\boldsymbol{A}$ の **rotation** または curl（回転）という．

この定義がなぜ,「ええ加減」かというと，上の定義は一般の曲線座標では正しくないからである．gradient, divergence などの概念は，本来，座標系に依らないものなので，**特定の座標でだけ正しいような定義では困る**のだ.「本当」の定義は，これらの定義の意味を考える次節以下で行う．

なお，初めから「正しい」定義を与えない理由は,「正しい」定義をきちんとやるのはちょっと面倒で，かつ「正しい」定義をみたすものが実際にあるのかどうか，すぐにはわからない面があるからだ.（上のデカルト座標の定義なら，微分ができる限りは存在するでしょ？）

記号についての補足

上で定義した諸量は,「ベクトルの形をした微分演算子」

$$\nabla \equiv \Bigl(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Bigr) \tag{3.1.4}$$

を定義すると，形式的には

$$\mathbf{grad}\,\phi = \nabla\,\phi, \qquad \mathbf{div}\,\boldsymbol{A} = \nabla\cdot\boldsymbol{A}, \qquad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{3.1.5}$$

と書ける．これらは ∇ が３成分のベクトルだと思って，普通にベクトルの演算 — 内積をとったり，外積をとったり — をする，という意味．これはなかなか便利ではあるし，何がベクトルで何がスカラーかを明示してくれるので，使うこともあるだろう — というか，物理の本ではこれを使わない方が珍しいのは確かだ．ただし，この記法はデカルト座標系では正しいが，曲線座標系に移ると種々の誤解の種になることは注意しておいて欲しい．

3.2 gradient, potential と線積分

Gradient の意味と「正しい」定義

Gradient の持つ意味は，以下の性質から理解できる．今，スカラー場 ϕ の**方向微分**を考えよう．３次元空間内の単位ベクトル $\boldsymbol{t}$ を一つ固定したとき，極限

$$D_{\boldsymbol{t}}\phi \equiv \lim_{h\to 0}\frac{\phi(\boldsymbol{r}+h\boldsymbol{t}) - \phi(\boldsymbol{r})}{h} \tag{3.2.1}$$

が存在するなら，これを ϕ の $\boldsymbol{t}$ 方向の**方向微分係数**という．この量は，その名前の通り，$\boldsymbol{t}$ の方向での変化率を表している．この方向微分の一般的な記号は存在しないが，ここでは $\boldsymbol{t}$ の方向であることを強調するため，$D_{\boldsymbol{t}}\phi$ と書くことにした．

方向微分と gradient の関係は以下の命題で与えられる．

命題 3.2.1 (方向微分と gradient)

$$D_{\boldsymbol{t}}\phi = \lim_{h\to 0}\frac{\phi(\boldsymbol{r}+h\boldsymbol{t})-\phi(\boldsymbol{r})}{h} = \boldsymbol{t}\cdot\mathbf{grad}\ \phi \tag{3.2.2}$$

が成り立つ．つまり，$\boldsymbol{t}$ 方向の方向微分係数は，$\nabla\phi = \mathbf{grad}\,\phi$ と $\boldsymbol{t}$ との内積をとることで得られる．

証明：

方向微分をとるベクトル $\boldsymbol{t}$ の各成分を t_x, t_y, t_z と書くと，方向微分の定義に現れたニュートン商の分子は，

$$\phi(\boldsymbol{r}+h\boldsymbol{t})-\phi(\boldsymbol{r}) = \phi(x+ht_x, y+ht_y, z+ht_z)-\phi(x,y,z) \approx \frac{\partial\phi}{\partial x}ht_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}ht_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}ht_z \tag{3.2.3}$$

となっているが，これは $\mathbf{grad}\ \phi$ と $h\boldsymbol{t}$ との内積に他ならない．従って，h で割ると

$$D_{\boldsymbol{t}}\phi = \lim_{h\to 0}\frac{\phi(\boldsymbol{r}+h\boldsymbol{t})-\phi(\boldsymbol{r})}{h} = \boldsymbol{t}\cdot\mathbf{grad}\ \phi \tag{3.2.4}$$

が得られる．つまり，(3.2.2) が証明された． □

また，$\boldsymbol{t}$ をいろいろな方向に向けた場合，方向微分係数の値が一番大きくなるのは $\boldsymbol{t}$ が $\mathbf{grad}\ \phi$ の向きを向いた場合であることが，この表式 (3.2.2) からわかる．これを逆手にとって，$\mathbf{grad}\ \phi$ の定義とすることができる．すなわち，

定義 3.2.2 (Gradient の「正しい」定義) $\mathbf{grad}\,\phi$ とは，以下の２つの性質を持ったベクトルと定義することもできる．

- その向きは，方向微分 $D_{\boldsymbol{t}}\phi$ の値が一番大きくなる $\boldsymbol{t}$ の向きで，
- その大きさは，方向微分 $D_{\boldsymbol{t}}\phi$ の最大値である．

この定義なら，座標系の取り方には依らないから,「正しい」定義といえる．

証明：

このような性質をもつベクトルがたった一つ，存在することを示せばよい．しかしこれは方向微分が (3.2.2) のように書けることからすぐに出る —— (3.2.2) に現れている $\mathbf{grad}\ \phi$ とは，(3.1.1) の定義によるものである． □

保存力と線積分（力学の復習）

力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が，あるスカラー関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ から

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\mathbf{grad}\ \phi(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r}) \tag{3.2.5}$$

と書けるとき，$\boldsymbol{F}$ は**保存力**であるという．また，ϕ を力 $\boldsymbol{F}$ の**ポテンシャル**という．(保存「力」と言ってはいるが，実際に「力」である必要はない．）保存力の線積分について考えてみよう．

定理 3.2.3 (保存力の線積分) ポテンシャル ϕ から導かれる力 $\boldsymbol{F}$ に対しては，任意の曲線 C に関する線積分が

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \phi(\text{始点}) - \phi(\text{終点}) \tag{3.2.6}$$

をみたす．ここで ϕ(始点) と ϕ(終点) は，それぞれ，曲線 C の始点と終点における ϕ の値を表す．

証明：

計算してみれば，出る．曲線 C のパラメーター表示を $\boldsymbol{r}(t)$ としよう（$0\le t\le 1$）．$\boldsymbol{F} = -\mathbf{grad}\,\phi$ であることを考えに入れると，線積分は

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_0^1 \mathbf{grad}\,\phi\big(\boldsymbol{r}(t)\big)\cdot\boldsymbol{r}'(t)\,dt \tag{3.2.7}$$

と表される．ところが，連鎖率を使って計算すると（いつもどおり $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ と書いた）

$$\frac{d}{dt}\phi(\boldsymbol{r}(t))=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{dt}=\mathbf{grad}\,\phi(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{r}' \tag{3.2.8}$$

なのである．つまり，上の積分の右辺は

$$-\int_0^1\mathbf{grad}\,\phi\big(\boldsymbol{r}(t)\big)\cdot\boldsymbol{r}'(t)\,dt=-\int_0^1\frac{d}{dt}\phi(\boldsymbol{r}(t))\,dt=-\Big[\phi(\boldsymbol{r}(t))\Big]_0^1=-\phi(\text{終点})+\phi(\text{始点}) \tag{3.2.9}$$

となる． □

註： 当然，どのような力の場は保存力か？との疑問が湧くが，その答えは rotation をよく調べてから与えられる．

3.3 Divergence と Gauss の定理

Divergence の持つ意味について，まずは考える．今，３次元空間内に非常に微小な立方体をとろう．立方体の一つの頂点は (x_0,y_0,z_0)，対角にある頂点を $(x_0+\varDelta,y_0+\varDelta,z_0+\varDelta)$ とし（一辺の長さは $\varDelta$），立方体の表面を S で表す．空間全体でベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が定義されているものとして，面積分 $\displaystyle\int_S\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$ を考える．(法線ベクトルの向きは，この立方体から外に向く向きにとる.)

この面積分は，一般の立方体 S については簡単には計算できない．しかし，立方体が非常に小さく，ベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が $\boldsymbol{r}$ にゆっくりとしか依存していない場合は，以下のように近似計算することができる．

立方体には６つの面があるので，まずは x-軸に垂直な，２つの面から考える．$x=x_0$ の面の法線ベクトルは $(-1,0,0)$，$x=x_0+\varDelta x$ の面の法線ベクトルは $(1,0,0)$ であるから，これらの面からの面積分への寄与は近似的に

$$\Big(F_x(x_0+\varDelta,y_0,z_0)-F_x(x_0,y_0,z_0)\Big)\varDelta^2\approx\frac{\partial F_x}{\partial x}\varDelta\times\varDelta^2=\frac{\partial F_x}{\partial x}\varDelta^3 \tag{3.3.1}$$

である[12]．同様に，y-軸に垂直な面からの面積分への寄与は

$$\Big(F_y(x_0,y_0+\varDelta,z_0)-F_x(x_0,y_0,z_0)\Big)\varDelta^2\approx\frac{\partial F_y}{\partial y}\varDelta^3, \tag{3.3.2}$$

z-軸に垂直な面からの寄与は

$$\Big(F_z(x_0,y_0,z_0+\varDelta)-F_x(x_0,y_0,z_0)\Big)\varDelta^2\approx\frac{\partial F_z}{\partial z}\varDelta^3 \tag{3.3.3}$$

となる．結果として，

$$\int_S\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})\approx\Big(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\Big)\varDelta^3+\ \text{(higher orders)} \tag{3.3.4}$$

が得られる．ところが，右辺のカッコの中身は (3.1.2) の $\mathbf{div}\,\boldsymbol{F}$ に他ならない．そこで，

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=\lim_{\varDelta\to0}\frac{1}{\varDelta^3}\int_S\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \tag{3.3.5}$$

がなりたつことがわかる．(ただし，右辺の S は $\boldsymbol{r}$ を頂点に持つ，一辺 $\varDelta$ の立方体)．

これが divergence の意味である．面積分の定義から，右辺の面積分はこの小さな立方体から逃げていく $\boldsymbol{F}$ の分量を表している．この量は立方体の体積に比例する形でゼロになるので，全体を $\varDelta^{-3}$ 倍して $\varDelta\to0$ の極限をとると，**単位体積当たりの $\boldsymbol{F}$ の逃げていく量**が計算でき，これが $\mathbf{div}\,\boldsymbol{F}$ なのである．

さて，このような divergence の意味を理解すると，下のガウスの（発散）定理がアタリマエ[13]に見えてくるだろう．

---

[12] ここのところ，最終結果で $\varDelta^3$ より高次の項は無視した，例えば，F_x の値は面上でも少しずつ違うはずなので，F_x の引数を $(x_0+\varDelta,y_0,z_0)$ や (x_0,y_0,z_0) と簡単化したのは，本当はウソである．しかし，F_x が x,y,z について２階くらい連続的微分可能ならば，以上の簡単化による誤差は $\varDelta^4$ か，それ以上に小さいことがわかる．

[13] アタリマエというのは，けなしているわけではなく，褒め言葉である．実際,「アタリマエ」な事というのは，気がついてみれば非常に有用なことが多い．誰もが気づかなかった「アタリマエ」を定式化して本当に「アタリマエ」にしたところに，ガウスの偉大さ（の一端）がある．

定理 3.3.1 (ガウスの発散定理) 単連結な有界領域 V と，その表面 $S = \partial V$，V 上で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ がある．このとき，

$$\int_V \mathbf{div}\, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) dxdydz = \int_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \tag{3.3.6}$$

が成り立つ．

この定理は，右辺の表面積分を左辺の体積積分に直す式とも，その逆とも解釈できる．この定理は電磁気学で微分形と積分形の法則を行き来するのに使ったはずで，皆さんおなじみのものでしょう．

証明：
ええと，まあ，黒板でやりますわ．皆さん，多分，どっかで見たことあると思うしね... □

この定理を逆手にとって，divergence を以下のように定義することもできる．この定義なら，座標系によらずに使えるという意味で,「正しい」．以下の定義では，感じをつかんでもらうために，少しええ加減な書き方をしている（V がどのような形まで許すかとかは書いてない）が，この傾向はこの章の最後まで続くだろう．

定義 3.3.2 (divergence の「正しい」定義) 3次元空間内にベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ がある．このとき，空間内の一点 $\boldsymbol{r}$ における $\boldsymbol{A}$ の divergence を，以下のように定義することもできる：

$$\mathbf{div}\, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \equiv \lim_{|V|\to 0} \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \tag{3.3.7}$$

ここで V とは $\boldsymbol{r}$ を中心にした微小な体積（立方体や直方体），$|V|$ はその V の体積，∂V は V の表面（法線ベクトルは外向きにとる）である．

註： 上ではガウスの定理から divergence の「正しい」定義を導くかのような書き方をしたが，これは誤解を招きやすいかもしれない．というのは，ガウスの定理の証明する際，divergence の「正しい」定義を証明して使っているようなところがあるからだ．

この節を終わるに当たって，ガウスの定理の応用として，グリーンの定理を証明しておく．

定理 3.3.3 (Green) V を3次元空間の有限領域，その表面を ∂V と書く．V にて連続的に2階微分可能なスカラー関数 ϕ, ψ があると，以下がなりたつ．数式内では積分の場所を表す引数 $(\boldsymbol{r})$ を省略した．

$$\iiint_V \Big(\phi \nabla^2 \psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi\Big)\, dxdydz = \int_{\partial V} \phi\nabla\psi \cdot d\boldsymbol{S} \tag{3.3.8}$$

$$\iiint_V \Big(\phi \nabla^2 \psi - \psi\nabla^2\phi\Big)\, dxdydz = \int_{\partial V} \Big(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi\Big) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{3.3.9}$$

一つ目を Green の第一定理，二つ目を Green の第二定理という．

証明：

恒等式

$$\nabla \cdot (\phi\nabla\psi) = \phi\nabla\cdot\nabla\psi + (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi) \tag{3.3.10}$$

の両辺を V で積分し，左辺の積分をガウスの定理で表面積分に書き直すと (3.3.8) が出る．また，(3.3.8) と，その ϕ, ψ を入れ替えたものを引き算すると (3.3.9) が出る． □

3.4 Rotation と保存力，Stokes の定理

次に，rotation の持つ意味を考えよう．正直，これが一番捉えにくいものだろう．今までと同じように，3次元空間内にベクトル場 $\boldsymbol{A}$ があるとして，一点 $\boldsymbol{r}$ の近傍を考える．

$\boldsymbol{r}$ を一つの頂点とする小立方体を考える．話を明確にするため，立方体の２つの頂点が (x_0, y_0, z_0) と $(x_0 + \varDelta, y_0 + \varDelta, z_0 + \varDelta)$ だとしておこう．

点 (x_0, y_0, z_0) を中心とする半径が ϵ の円を考える．円周をまわる向きを固定し，右ネジの法則で決まる円の法線ベクトルを $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$ と書くことにしよう．このように向きまで決めた円周を C と書く．

ここで，線積分 $\int_C \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ を考えてみる．これと rotation の関係は以下の定理で与えられる．

命題 3.4.1 (線積分と rotation) 単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を右ネジの方向にみるような，半径 ϵ の小円を C とすると，

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \int_C \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n} \cdot \mathbf{rot}\, \boldsymbol{A} \tag{3.4.1}$$

が成り立つ．つまり，$\boldsymbol{n}$ を法線ベクトルにもつ小円での線積分から上の極限を作ると，その値は $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{n}$ との内積をとることで得られる．

証明：

詳細をプリントにする根性がないので，要点だけを記しておく．興味のある人は詳細を埋めてみるとよい．

まず，C をうまく表す必要がある．そのために，$\boldsymbol{n}$ そのものの定義からやりなおす．まず，z-軸方向を向いた単位ベクトル $(0, 0, z)$ を考え，これを y-軸のまわりに α, そのあとで z-軸のまわりに β だけ回転してできるベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする．$\boldsymbol{n}$ の成分は，回転の行列をかけて

$$\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha\, \cos\beta \\ \sin\alpha\, \sin\beta \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{3.4.2}$$

となる．

次に曲線 C だが，これも xy-平面上の円 $x = \epsilon \cos t$, $y = \epsilon \sin t$ （$0 \le t \le 2\pi$）を同じように回転し，かつそれを $\boldsymbol{r}_0$ だけ平行移動すれば得られるはずだ（$\boldsymbol{r}_0$ が円の中心）．計算すると

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon\cos t \\ \epsilon \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{r}_0 + \epsilon \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos t - \sin\beta\sin t \\ \cos\alpha\sin\beta\cos t + \cos\beta\sin t \\ -\sin\alpha\, \cos t \end{pmatrix} \tag{3.4.3}$$

となる．これから $\boldsymbol{r}'(t)$ を計算すると

$$\boldsymbol{r}'(t) = \epsilon \begin{pmatrix} -\cos\alpha\cos\beta\sin t - \sin\beta\cos t \\ -\cos\alpha\sin\beta\sin t + \cos\beta\cos t \\ \sin\alpha\, \sin t \end{pmatrix} \tag{3.4.4}$$

がわかる．これと $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の内積をとるのだが，今は円 C が十分に小さいと思って，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を円の中心を基準にしてテイラー展開し，その一次だけをみる．つまり，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{r}) &= f(\boldsymbol{r}_0) + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) + O(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|^2) \\ &= f(\boldsymbol{r}_0) + \epsilon \Big\{ \frac{\partial f}{\partial x} \big(\cos\alpha\cos\beta\cos t - \sin\beta\sin t \big) + \frac{\partial f}{\partial y} \big(\cos\alpha\sin\beta\cos t + \cos\beta\sin t \big) + \frac{\partial f}{\partial z} \big(-\sin\alpha\cos t \big) \Big\} \\ &\quad + O(\epsilon^2) \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

を，$f = A_x, A_y, A_z$ として用いる．$O(\epsilon^2)$ を無視して $\boldsymbol{r}'(t)$ との内積をとり，t を 0 から 2π まで積分する．ここは

あまりにたくさんの項が出てくるので，積分の結果を一足跳びに書くと，

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} &= \pi\epsilon^2\Big(-\frac{\partial A_x}{\partial y}\cos\alpha + \frac{\partial A_x}{\partial z}\sin\alpha\sin\beta + \frac{\partial A_y}{\partial x}\cos\alpha - \frac{\partial A_y}{\partial z}\sin\alpha\cos\beta \\ &\qquad - \frac{\partial A_z}{\partial x}\sin\alpha\sin\beta + \frac{\partial A_z}{\partial y}\sin\alpha\cos\beta\Big) \\ &= \pi\epsilon^2\Big(-\frac{\partial A_x}{\partial y}n_z + \frac{\partial A_x}{\partial z}n_y + \frac{\partial A_y}{\partial x}n_z - \frac{\partial A_y}{\partial z}n_x - \frac{\partial A_z}{\partial x}n_y + \frac{\partial A_z}{\partial y}n_x\Big) \\ &= \pi\epsilon^2\, \boldsymbol{n}\cdot \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} + O(\epsilon^3) \end{aligned}\tag{3.4.6}$$

となることがわかる．もちろん，rotation は円の中心，$\boldsymbol{r}_0$ にての値である．これを書き直すと (3.4.1) になる． □

この定理を解釈しよう．(3.4.1) にて $\boldsymbol{n}$ をいろいろにとった小円での極限を比べてみると，これは $\boldsymbol{n}$ が $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}$ と同じ向きの時に最大で，その長さは $|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}|$ であることがわかる．これは $\mathbf{grad}\,\phi$ と似た状況であるので，これをまとめて以下を得る．

定義 3.4.2 (Rotation の「正しい」定義) $\mathbf{rot}\,\phi$ とは，以下の２つの性質を持ったベクトルと定義することもできる．

- その向きは，(3.4.1) の値が一番大きくなる $\boldsymbol{n}$ の向きで，
- その大きさは，(3.4.1) の値の最大値である．

さて，rotation については，以下の Stokes の定理がなりたつ．上の命題3.4.1 はこの定理の特別な場合になっている．

定理 3.4.3 (Stokes) 3次元空間内に適当な曲面 S を考え，その境界の曲線を C とする．S の法線ベクトルと C の向きは,「右ネジの法則」で決める．このとき，任意のベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ に対し，

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \tag{3.4.7}$$

が成立する．

証明：

まあ，この証明も黒板で簡単に説明しますわ．電磁気の講義などで見たはず... □

この定理の系として，以下が成り立つ．

系 3.4.4 ベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が rotation-free，つまり至る所で $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ ならば，点 A と点 B を結ぶ曲線に沿っての線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$ は始点 A と終点 B のみによって決まり，途中の C の取り方にはよらない．

証明：

A と B を結ぶ曲線を２とおりとって，C_1, C_2 と書くことにする．C_2 の向きを変えて B から A に行くようにしたものを $-C_2$ と書くと，C_1 の次に $-C_2$ をつなげることで，$A\to B\to A$ の閉曲線ができる．この閉曲線全体に関する線積分は

$$\int_{C_1-C_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{-C_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} - \int_{C_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \tag{3.4.8}$$

である．ところが，$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ なので，ストークスの定理から

$$\int_{C_1-C_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \mathbf{rot}\,\boldsymbol{F} d\boldsymbol{S} = 0 \tag{3.4.9}$$

である．ここで S は，$C_1 - C_2$ を境界に持つような任意の曲面．従って，この２つから，

$$\int_{C_1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} \tag{3.4.10}$$

が得られた．つまり，任意の２つの曲線に関しての線積分の値は等しい． □

3.5 積分の変換

今までにやってきた定理をまとめておこう．この辺りは必要に応じて思い出せば良いので，簡単にすませる．

(1) まず，V を３次元空間の有限領域，その表面の閉曲面を ∂V とし，両者の間の積分の関係を導こう．基本として，ガウスの定理は

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \bigl(\nabla \cdot \boldsymbol{F}\bigr)\, dxdydz \tag{3.5.1}$$

を主張するが，これは左辺の表面積分を右辺の体積積分に直す式とも，その逆とも捉えられる．この応用を二つ述べておこう．

(2) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}\phi(\boldsymbol{r})$ ［$\boldsymbol{a}$ は任意の定ベクトル］とおいてガウスの定理を使うと，

$$\int_{\partial V} \phi(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \int_V \bigl(\nabla \phi\bigr)\, dxdydz \tag{3.5.2}$$

も得られる．

(3) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ ［$\boldsymbol{a}$ は任意の定ベクトル］とおいてガウスの定理を使うと，

$$\int_{\partial V} d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_V \bigl(\nabla \times \boldsymbol{A}\bigr)\, dxdydz \tag{3.5.3}$$

も成り立つことがわかる．

次に，閉曲面 C で囲まれた有限な曲面を S と書き，両者の上での積分の関係を導こう．気分の問題で $C = \partial S$ と書く．また曲面 S の表裏と曲線 C の向きは,「右ネジの関係」をみたすように決める．

(4) まず，Stokes の定理は

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \bigl(\nabla \times \boldsymbol{A}\bigr) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{3.5.4}$$

である．この応用として，以下の２つがあげられる．

(5) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}\phi(\boldsymbol{r})$ ［$\boldsymbol{a}$ は任意の定ベクトル］とおいてストークスの定理を使うと，

$$\int_{\partial S} \phi(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} = \int_S d\boldsymbol{S} \times \nabla \phi \tag{3.5.5}$$

が得られる．

(6) また，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ ［$\boldsymbol{a}$ は任意の定ベクトル］とおいてストークスの定理を使うと，

$$\int_{\partial S} d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \int_S \bigl(d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \times \nabla\bigr) \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \tag{3.5.6}$$

が得られる．

3.6 ２種類のポテンシャルとベクトルの分解

いままでの結果を基に，ベクトル場と「ポテンシャル」の関係をまとめておこう.（多分，大半は聞いたことのあるはなしでしょうね.）以下ではベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ などが与えられているとする.

一つ目の定理は，$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{0}$ に関するものである.

定理 3.6.1 (rotation-free とスカラーポテンシャル) 以下の同値関係がなりたつ.

$$\text{すべての場所で}\quad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{0}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\text{適当なスカラーポテンシャル } \phi(\boldsymbol{r}) \text{ が存在して，} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathbf{grad}\,\phi(\boldsymbol{r}) \text{ と書ける} \tag{3.6.1}$$

なお，$\boldsymbol{E}$ を与えるスカラーポテンシャルは，付加定数の自由度を除いて（つまり，勝手な定数を足したりひいたりする自由度はあるが）一意的に定まる.

証明：

下から上は，単なる計算だ．つまり，$\boldsymbol{E} = -\mathbf{grad}\,\phi$ ならば $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{0}$ であることを計算で示せばよい.

問題は上から下を出す方で，こっちは全然当たり前には見えない（少なくとも初めのうちは）．でも，ストークスの定理（または系 3.4.4）を思い出すと，簡単である.

いま，点 A と点 B を結ぶ，任意の曲線 C を考えよう．線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$ の値は，C の取り方にはよらない．そこで，例えば原点でのポテンシャルの値を一つ勝手に決めて（ϕ_0），他の点でのポテンシャルを

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \phi_0 - \int_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \qquad (C\text{ は原点から }\boldsymbol{r}\text{ へ行く勝手な曲線}) \tag{3.6.2}$$

としてやろう．この表式を実際に微分してみると，$-\mathbf{grad}\,\phi = \boldsymbol{E}$ であることはすぐにわかる．つまり，このように定義した $\phi(\boldsymbol{r})$ が定理の主張するところのスカラーポテンシャルになっていることが確かめられた.

最後に，ポテンシャルの**一意性**について考えよう．上でポテンシャルの存在は言ったので，このベクトルは「保存力」である．だから，定理 3.2.3 が使えるが，これは任意の２点間のポテンシャルの差を一意に決めてしまう．任意の２点間のポテンシャルの差が決まっているので，残されたのは空間全体でポテンシャルを同じ量だけ上げ下げする自由度のみである．これは要するに，上の ϕ_0 の自由度だ. □

２つ目の定理は，$\mathbf{div}\,\boldsymbol{B} = 0$ ならどうか，と言うもの：

定理 3.6.2 (divergence-free とベクトルポテンシャル) 以下の同値関係がなりたつ.

$$\text{すべての場所で}\quad \mathbf{div}\,\boldsymbol{B} = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\text{適当なベクトルポテンシャル } \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \text{ が存在して，} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \text{ と書ける} \tag{3.6.3}$$

また，$\boldsymbol{B}$ を与えるベクトルポテンシャルは一意には定まらないが，そのようなベクトルポテンシャルの２つを $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}'$ とすると，その差は適当なスカラー場 ϕ を用いて $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}' = \mathbf{grad}\,\phi$ と書ける．つまり，$\mathbf{grad}\,\phi$ の自由度を除いて一意に決まると言って良い.

証明：

これも，下から上は単なる計算で確かめられる．問題はこの逆だね.

まず，定理を満たすようなベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の**存在**は，実際にそのような $\boldsymbol{A}$ を構成することで証明できる．ともかく一つでもそのような $\boldsymbol{A}$ を作れば良いのだから，天下りに答えを与えると，

$$\boldsymbol{A}(x_1, y_1, z_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^{x_1} B_z(x, y_1, z_1)dx \\ \int_0^{y_1} B_x(0, y, z_1)dy - \int_0^{x_1} B_y(x, y_1, z_1)dx \end{pmatrix} \tag{3.6.4}$$

が良いことがわかる.(この $\boldsymbol{A}$ を微分して実際に $\boldsymbol{B}$ がでることを確かめるのは良い練習問題だからやってみると良い.)実のところ,上のような $\boldsymbol{A}$ を自力で作るのはちょっと面倒だったので,適当な本をカンニングした.

一意性については以下のようになる.まず,$\boldsymbol{B} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}$ ならば,

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}' = \mathbf{rot}\,(\boldsymbol{A} - \mathbf{grad}\,\phi) = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} - \mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,\phi = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \tag{3.6.5}$$

なので,$\boldsymbol{A}'$ も正しいベクトルポテンシャルであることがわかる.次に,$\boldsymbol{B} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}'$ ならば,

$$\mathbf{rot}\,(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}') = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} = \mathbf{0} \tag{3.6.6}$$

であるが,これはベクトル場 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}'$ が rotation-free であると主張している.すると,定理 3.6.1 から,$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}'$ が gradient の形に書けることが結論できる. □

これまでで,divergence-free または rotation-free なベクトル場が,それぞれスカラーポテンシャル,ベクトルポテンシャルで書けることがわかった.でも一般のベクトル場はこのどちらでもない.そのようなベクトル場に対しては,どのようにポテンシャルを導入すべきなのだろうか?そもそも,ポテンシャルで書けるのだろうか?答えは以下の定理で与えられる.

定理 3.6.3 (一般のベクトルの分解) 任意のベクトル $\boldsymbol{F}$ は,divergence-free な場 $\boldsymbol{B}$ と,rotation-free な場 $\boldsymbol{E}$ の和に分解することができる:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}), \qquad \text{すべての点で} \quad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{3.6.7}$$

この分解は一意とは限らないが,2つの可能な分解を $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{B}_1$ と $\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{B}_2$ とすると,用いて

$$\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1 = \mathbf{grad}\,\psi, \qquad \text{すべての点で} \quad \Delta\psi = 0 \tag{3.6.8}$$

が成り立つようなスカラー関数 ψ が存在する.逆に,$\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{B}_1$ が (3.6.7) を満たしている場合,(3.6.8) で関係づけられた $\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{B}_2$ も (3.6.7) を満たす.

この定理から直ちに以下を得る.

系 3.6.4 (一般のベクトル場の「ポテンシャル」) 任意のベクトル $\boldsymbol{F}$ は,適当なスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いて,

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\mathbf{grad}\,\phi(\boldsymbol{r}) + \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.9}$$

と表すことができる.

定理 3.6.3 を仮定した系 3.6.4 の証明

定理 3.6.3 でみつかった $\boldsymbol{E}$ をスカラーポテンシャルで $\boldsymbol{E} = -\mathbf{grad}\,\phi$ と,また $\boldsymbol{B}$ をベクトルポテンシャルで $\boldsymbol{B} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}$ と表せばすぐに出る. □

定理 3.6.3 の証明はそう簡単ではない.少し発見法的にやってみよう.定理の主張のように分解できるとすると,

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{div}\,\boldsymbol{F}, \qquad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{0} \tag{3.6.10}$$

および

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}, \qquad \mathbf{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{3.6.11}$$

が成り立つはずである.ここで $\mathbf{div}\,\boldsymbol{F}$ と $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ から決まっている量だから,右辺が与えられたとして,左辺の $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ を決めればよいわけだ.つまり問題は,以下の質問の答えを見つけることに帰着する.この質問とその答えはそれなりにヤヤコシイので,以下の小節で行うことにした. □

3.6.1 ベクトルの逆問題

上で必要になったのは，以下のような問題である．

Q１：与えられたスカラー場 $\psi(\boldsymbol{r})$ に対して，

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \psi(\boldsymbol{r}), \qquad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0} \tag{3.6.12}$$

を満たすようなベクトル場 $\boldsymbol{E}$ を決定せよ．

Q２：与えられたベクトル場 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$ に対して，

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.13}$$

を満たすようなベクトル場 $\boldsymbol{B}$ を決定せよ．

以下，この問の答えを発見法的に求め，最後に定理の形でまとめよう．

Ｑ１から行く．$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ だから，何かのポテンシャル ϕ でもって，$\boldsymbol{E} = -\mathbf{grad}\,\phi$ と書けているはず．従って，この ϕ をまず求め，それから $\boldsymbol{E}$ を求めることにしよう．

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathbf{grad}\,\phi(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.14}$$

の両辺の $\mathbf{div}$ をとると，

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \mathbf{div}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,\phi(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.15}$$

となる．ここで出てきた $\mathbf{div}\,\mathbf{grad}$ と言うのはラプラシアンと呼ばれるもので，デカルト座標では

$$\mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,\phi(x,y,z) = \Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)\phi(x,y,z) \equiv \Delta\,\phi(x,y,z) \tag{3.6.16}$$

となっている．ということで，スカラーポテンシャル ϕ は，（もし存在するなら）

$$\Delta\phi(x,y,z) = -\psi(x,y,z) \tag{3.6.17}$$

を満たすべし，と言うことがわかる．逆に，これさえ満たしている ϕ から作った $\boldsymbol{E}$ は題意を満たしていることはすぐにわかるので，問題は (3.6.17) を満たす ϕ を求めることに帰着された．

さてさて，(3.6.17) は Poisson の方程式と言われるもので，（普通に性質の良い）$\psi(\boldsymbol{r})$ に対しては，その解が存在することが知られている．実際，

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\psi(\boldsymbol{q})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q}|}dv(\boldsymbol{q}) \tag{3.6.18}$$

と定義された $\psi(\boldsymbol{r})$ が (3.6.17) を満たすことは少し頑張れば確かめられる[14]．（ここで，$dv(\boldsymbol{q})$ は，$\boldsymbol{q}$ の３つの成分による，単なる３重積分を表す）．従って，このような ϕ を持ってきて $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathbf{grad}\,\phi(\boldsymbol{r})$ を作ると，問題の答えが得られるわけだ．

Ｑ２も同様に考える．今度は $\boldsymbol{B}$ を与えるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ があるはずである：

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.19}$$

この両辺の $\mathbf{rot}$ をとると，

$$\mathbf{rot}\,\big(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\big) = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.20}$$

が得られる．つまり，$\boldsymbol{A}$ は上の方程式の解である必要があるし，逆にこれで十分であることはすぐにわかるだろう．

---

[14] 興味のある人への注：電磁気の講義などで聴いたかもしれないが，ここでは $\Delta_{\boldsymbol{q}}\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q}|} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q})$ の関係に注目するとよい．ここで $\Delta_{\boldsymbol{q}}$ は，$\boldsymbol{q}$ に関するラプラシアンを表す．また，ここでは無限の広さの３次元空間で考えているが，有限の領域であっても本質的には同じ事である．

さて，問題は (3.6.20) はあるのか，あるとしたら何なのかということだが，これについては **rot** についての恒等式

$$\mathbf{rot}\,\bigl(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\bigr) = -\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + \mathbf{grad}\,\bigl(\mathbf{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\bigr) \tag{3.6.21}$$

を用いることにする．このままではこいつは扱いにくいが，今は条件を満たすベクトルポテンシャルを少なくとも一つ求めればよいのだから，

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad (\text{すべての } \boldsymbol{r} \text{ で}) \tag{3.6.22}$$

を要求してしまうことにする.（これで解が見つかればこっちの勝ち．見つからなければこの要求を取り下げて出直し.）すると，$\boldsymbol{A}$ の満たすべき条件は

$$\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.23}$$

となる．これは両辺にベクトルが出ているが，その成分ごとに見ると (3.6.17) と同じ形をしていることがわかるだろう．従って，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q}|}dv(\boldsymbol{q}) \tag{3.6.24}$$

ととれば良いことがわかる.（結果的に (3.6.22) を要求しても解が見つかったのでメデタシメデタシ.）

これで一応，Ｑ１，Ｑ２への答えを得たのだが，これらの答えが一意的かどうかにはあまり触れなかった．ポテンシャルから調べていっても良いが，以下のようにベクトルを直接扱うのが簡単である．Ｑ１の答えになる $\boldsymbol{E}$ が２通りあったとして，それらを $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2$ と書こう．これらは

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{E}_i = \psi, \qquad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}_i = \mathbf{0} \qquad (i=1,2) \tag{3.6.25}$$

を満たしているから，$i=1,2$ の対応する式を引き算すると，

$$\mathbf{div}\,\tilde{\boldsymbol{E}} = 0, \qquad \mathbf{rot}\,\tilde{\boldsymbol{E}} = \mathbf{0} \tag{3.6.26}$$

が得られる（$\tilde{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2$）．ここで第２の式は，$\tilde{\boldsymbol{E}}$ が rotation-free であると主張しているから，適当なスカラーポテンシャル $\tilde{\phi}$ を用いて

$$\tilde{E} = \mathbf{grad}\,\tilde{\phi} \tag{3.6.27}$$

と書けるはずだ．これを第一の式に入れると

$$\Delta\tilde{\phi} = \mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,\tilde{\phi} = 0 \tag{3.6.28}$$

が得られる．これが $\tilde{\phi}$ の満たすべき必要条件である．逆に，$\boldsymbol{E}$ が (3.6.12) を満たし，かつ $\tilde{\phi}$ が (3.6.28) を満たすときに， $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \mathbf{grad}\,\tilde{\phi}$ も (3.6.12) を満たすことがわかる．つまり，このような $\tilde{\phi}$ は十分でもあるのだ.

つまり，結論として，$\boldsymbol{E}$ は，いたるところで $\Delta\tilde{\phi} = 0$ なるスカラー関数 $\tilde{\phi}$ を用いて $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \mathbf{grad}\,\tilde{\phi}$ とおきかえても構わない自由度を持っていることがわかる.

Ｑ２の方も同様に，もし $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$ が共に条件を満たしていれば，$\tilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2$ は

$$\mathbf{div}\,\tilde{\boldsymbol{B}} = 0, \qquad \mathbf{rot}\,\tilde{\boldsymbol{B}} = \mathbf{0} \tag{3.6.29}$$

を満たすことがわかるが，これは (3.6.26) と同じ形であるから，同じ結論になる.

以上をまとめると以下の命題になる.

命題 3.6.5 Q 1 に対する答えは，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathbf{grad}\,\phi(\boldsymbol{r}) + \mathbf{grad}\,\tilde{\phi}, \qquad \phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\psi(\boldsymbol{q})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q}|}dv(\boldsymbol{q}) \tag{3.6.30}$$

で与えられる．また，Q 2 の答えは，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + \mathbf{grad}\,\tilde{\tilde{\phi}}, \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q}|}dv(\boldsymbol{q}) \tag{3.6.31}$$

で与えられる．ここで $\tilde{\phi}, \tilde{\tilde{\phi}}$ は

$$\Delta\tilde{\phi} = 0, \qquad \Delta\tilde{\tilde{\phi}} = 0 \qquad \text{（すべての点で）} \tag{3.6.32}$$

を満たす任意の関数である．

定理 3.6.3 の証明

既に $\mathbf{div}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{div}\,\boldsymbol{F}$ かつ $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{0}$，および $\mathbf{div}\,\boldsymbol{B} = 0$ かつ $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B} = \mathbf{rot}\,F$ である $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ をみつける必要があることは見ている．問題はこれで十分かということであるが，$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}$ となってくれないと困るから，上のようなベクトルを勝手に見つけただけでは不十分だ．

この点を解決するため，まず

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{div}\,\boldsymbol{F}, \qquad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{0} \tag{3.6.33}$$

となるようなベクトル $\boldsymbol{E}$ を見つけよう．これは上の命題 3.6.5 で解決済みだ．次に，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{E}$ としてベクトル $\boldsymbol{B}$ を定義する．

すると，

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{B} = \mathbf{div}\,\boldsymbol{F} - \mathbf{div}\,\boldsymbol{E} = 0 \tag{3.6.34}$$

が自動的に成り立っている．つまり，このように作った $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ を用いると，

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}, \qquad \mathbf{div}\,\boldsymbol{B} = 0, \qquad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{0} \tag{3.6.35}$$

が成り立っている訳だ．これは定理 3.6.3 の条件を満たしているから，そのような $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ の存在が証明された．

一意性については，命題 3.6.5 の証明と全く同じなので，省略する． □

（補足）上の証明を見ると，定理 3.6.3 だけの証明には命題 3.6.5 の Q2 は不要であった — $\boldsymbol{E}$ の方をちゃんと作れば，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{E}$ が Q2 部分の答えを与える．しかし，Q2 はそれ自身で面白いものなので，命題 3.6.5 では Q2 を別途に考察した．

3.6.2 おまけ：Poisson 方程式の解の一意性

上の問題と関連して，またガウスの定理（グリーンの定理）の応用例として，Poisson 方程式

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.36}$$

の解の一意性について触れておこう．

今，上の Poisson 方程式を有限の領域 V で考え，その表面を ∂V と書く．∂V での ϕ の値を与えられた関数 f に固定したとき，ϕ の値は一意に決まるだろうか？(似たような問題として，無限の 3 次元領域 $\mathbb{R}^3$ を考えて，その境界付近では ϕ がゼロになるとして一意性を問うこともできる.)

この問題を考えるため，条件を満たす解が２通りあったとし，それらを ϕ_1, ϕ_2 とする．差を $\psi(\boldsymbol{r}) = \phi_1(\boldsymbol{r}) - \phi_2(\boldsymbol{r})$ と書くと，

$$\Delta\psi(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad \text{（すべての } \boldsymbol{r} \in V \text{ で）} \tag{3.6.37}$$

かつ

$$\psi(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad \text{（すべての } \boldsymbol{r} \in \partial V \text{ で）} \tag{3.6.38}$$

が満たされている．従って，このような ψ が恒等的にゼロであることを言えばよい．

ここでガウスの定理（または Green の第一定理）が登場する．Green の第一定理は

$$\int_V \Big(\psi\Delta\psi + (\nabla\psi)^2\Big)\, dxdydz = \int_{\partial V} \psi\nabla\psi\cdot d\boldsymbol{S} \tag{3.6.39}$$

である．しかし，この右辺は境界で $\psi = 0$ 故にゼロ．また左辺の第一項もゼロ．従って，

$$\int_V (\nabla\psi)^2\, dxdydz = 0 \tag{3.6.40}$$

なのだ．でも，この非積分関数は非負だ．それを積分してゼロならば，非積分関数そのものがゼロと言うことになる．つまり，

$$\nabla\psi = 0 \qquad (V \text{ の中全部で}) \tag{3.6.41}$$

従って，ψ は V の中全部で一定の値をとるが，表面でゼロなんだから，内部でもゼロしかない． □