期末テスト（8/6）の解答編（数学科, 2010.8.24）

（web での公開を考えて，得点分布はここには載せません.）

全体的な講評：少し予想よりも低めでした.

- ごく少数の人を除き，計算力はある程度，ある．重積分の基礎もわかっている．この意味で，大半の人は合格と言って良いでしょう.
- 図形に関する弱点は，ありますね．いろいろなところで,「どんな積分領域か」が出来ていない人が見受けられました.
- 面積分は勉強不足の人が多かった.
- 問 1 と問 4 がほとんどできなかったのはまあ，残念ではある.

問 1： ううむ，答えらしきものにたどり着いた人もあまりいませんでしたね...

結論からいうと，$2\pi f(0,0)$ が答えです．どういうことかというと，もし分子に a がない場合，この積分は原点付近からの寄与が無限大になって発散します．その発散を有限にとどめるために，分子に a が入ってる訳．ということは，積分へのほとんどの寄与は原点付近の (x,y) からくるのだから，$f(x,y)$ は $f(0,0)$ で置き換えても良いでしょう．そのように置き換えると，

$$\int_{x^2+y^2\le 1} \frac{a}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}\, f(x,y)\, dxdy \approx f(0,0) \int_{x^2+y^2\le 1} \frac{a}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}\, dxdy \approx f(0,0)\times 2\pi$$

となるわけ．以下，これを厳密に示します．なお，記号を簡単にするため，$\boldsymbol{x}=(x,y)$ と書き，$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{x^2+y^2}$ を導入します.

まず，$\epsilon>0$ を固定する（最後にゼロに持って行くつもり）．$f(x,y)$ が連続だから，この ϵ に依存する $\delta>0$ が存在して，

$$\|\boldsymbol{x}\|<\delta \qquad \text{ならば} \qquad \bigl|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{0})\bigr|<\epsilon$$

とできるはずである．また，f が連続だから，この f の閉領域 $x^2+y^2\le 1$ における最大値，最小値が存在する．そこで，$M=\max_{x^2+y^2\le 1}|f(x,y)|$ とおいておく.

さて，問題の積分を 2 つに分ける：

$$\int\limits_{x^2+y^2\le 1} \frac{a\,f(x,y)}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}\, dxdy = \int\limits_{x^2+y^2\le \delta^2} \frac{a\,f(x,y)}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}\, dxdy + \int\limits_{\delta^2< x^2+y^2\le 1} \frac{a\,f(x,y)}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}\, dxdy$$

第 2 項は，単純に絶対値をとって押さえてしまう：

$$|\,(\text{第 2 項})\,| \le \int\limits_{\delta^2 n< x^2+y^2\le 1} \frac{a\,M}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}\, dxdy = aM \int\limits_{\delta^2< x^2+y^2\le 1} \frac{1}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}\, dxdy$$

第一項は更に二つに分ける：

$$|\,(\text{第 1 項})\,| = \int\limits_{x^2+y^2\le \delta^2} \frac{a\,f(0,0)}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}\, dxdy + \int\limits_{x^2+y^2\le \delta^2} \frac{a\,\{f(x,y)-f(0,0)\}}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}\, dxdy$$

この「第一項」の第 1 項は単に

$$(\text{第 1 項のその 1}) = a\,f(0,0) \int\limits_{x^2+y^2\le \delta^2} \frac{1}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}\, dxdy$$

である．一方，この「第一項」の第 2 項はまたもや絶対値をとって押さえて

$$|\,(\text{第 1 項のその 2})\,| \le \int\limits_{x^2+y^2\le \delta^2} \frac{a\,\epsilon}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}\, dxdy = a\epsilon \int\limits_{x^2+y^2\le \delta^2} \frac{1}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}\, dxdy$$

とする．

以上をまとめると，

$$\int_{x^2+y^2\le 1} \frac{a\,f(x,y)}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy = a\,f(0,0)\int_{x^2+y^2\le\delta^2} \frac{1}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy + (\text{おつり})$$

となっていて,「おつり」の項は

$$|\,(\text{おつり})\,| \le a\epsilon \int_{x^2+y^2\le\delta^2} \frac{1}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy + aM\int_{\delta^2<x^2+y^2\le 1} \frac{1}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy$$

を満たしていることがわかった．

これから積分を評価しよう．極座標に移って計算すると（ヤコビアンの r を忘れない）$0<X<Y$ に対して

$$\int_{X^2<x^2+y^2\le Y^2} \frac{1}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy = \int_X^Y dr\,r\int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{(a^2+r^2)^{3/2}} = 2\pi\int_{X^2}^{Y^2}\frac{dt}{2}\frac{1}{(a^2+t)^{3/2}} = 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+Y^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^2+X^2}}\right)$$

である．よって，

$$\int_{x^2+y^2\le 1} \frac{a\,f(x,y)}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy = 2\pi f(0,0)a\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+\delta^2}}\right) + (\text{おつり}) = 2\pi f(0,0)\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+\delta^2}}\right) + (\text{おつり})$$

with

$$|\,(\text{おつり})\,| \le \frac{2\pi a\epsilon}{\sqrt{a^2+\delta^2}} + 2\pi aM\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+\delta^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right) \le 2\pi\epsilon + \frac{2\pi aM}{\sqrt{a^2+\delta^2}}$$

が得られた．

ここで $a\downarrow 0$ としてみよう（$\epsilon,\delta>0$ は固定したままである）．この極限があるかどうかはまだわからないので $\limsup$ と $\liminf$ を考えると

$$\limsup_{a\downarrow 0}\int_{x^2+y^2\le 1} \frac{a\,f(x,y)}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy = 2\pi f(0,0) + (\text{おつり}), \qquad |\,(\text{おつり})\,| \le 2\pi\epsilon + 0$$

および，$\liminf$ についての同様の式が得られる．しかし，思い起こせば $\epsilon>0$ は任意であった．ということは上から

$$\limsup_{a\downarrow 0}\int_{x^2+y^2\le 1} \frac{a\,f(x,y)}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy = 2\pi f(0,0) + 0$$

および $\liminf$ についての同様の式が得られる．よって，最終結果として

$$\lim_{a\downarrow 0}\int_{x^2+y^2\le 1} \frac{a\,f(x,y)}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy = 2\pi f(0,0)$$

を得る．

問２：しんどいので，図は全て略．単なる計算なので，答えのみ書くと，

$$(1)\quad \text{は}\quad -\frac{8}{15} \qquad\qquad (2)\quad \text{は}\quad \frac{1}{35} \qquad\qquad (3)\quad \text{は}\quad \frac{1}{2}$$

問３：定義通りに計算して

$$(\text{問題の線積分}) = \int_0^1 dt \begin{bmatrix} 2t \\ 2t^2 \\ 2t^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2t \end{bmatrix} = \int_0^1 dt(2t+2t^2+4t^3) = \frac{8}{3}$$

問4： これはちょっと難しかったかもしれない．結論から言えば，$\alpha < 1/2$ で収束，$\alpha \geq 1/2$ で発散である．

非積分関数は非負であるから，ヤバいところを避けた積分が有界なら，積分は収束すると言える．ヤバいのは当然，分母がゼロになるところ，つまり $x = y$ のところだ．そこで，積分が有界であるかどうかを調べるため，$x = y$ の部分を幅 ϵ くらい避けて積分し，これが $\epsilon \downarrow 0$ の極限で有界に保たれるか否かを調べたい．

より正確には，以下のようにやる．まず，$0 < \epsilon < 1/20$ に対して領域

$$A_\epsilon = \left\{(x,y)\,\middle|\,0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi, \epsilon \leq |x-y| \leq \frac{1}{10}\right\} \qquad B = \left\{(x,y)\,\middle|\,0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi, |x-y| > \frac{1}{10}\right\}$$

を定義する．領域 B での非積分関数は有界だから，領域 B での積分は有界で，問題無し．以下，領域 A_ϵ での積分（の $\epsilon \downarrow 0$ での有界性）を問題にする．

まず，手始めに，$\alpha \leq 0$ ならば非積分関数は有界ゆえ，何の問題もなく，積分は収束する．よって以下では $\alpha > 0$ に注目する．

さて，領域 A_ϵ では $|x-y|$ は小さい．だから，

$$\frac{(x-y)^2}{4} \leq 1 - \cos(x-y) \leq \frac{(x-y)^2}{2}$$

がいつもなりたつ．よって

$$2^\alpha \int_{A_\epsilon} \frac{1}{|x-y|^{2\alpha}} dxdy \leq \int_{A_\epsilon} \frac{1}{\{1-\cos(x-y)\}^\alpha} dxdy \leq 4^\alpha \int_{A_\epsilon} \frac{1}{|x-y|^{2\alpha}} dxdy$$

が成り立っている．この両辺は定数倍しか違わないから，左辺や右辺の積分がどうなってるかを調べればよい．

<u>$\alpha \geq 1/2$ のとき．</u>

結論から言うと，この場合は発散する．なぜなら，この場合，積分結果の一部のみを用いて

$$\int_{A_\epsilon} \frac{1}{|x-y|^{2\alpha}} dxdy \geq \int_{1/5}^{4/5} dx \int_{x-1/10}^{x-\epsilon} dy \frac{1}{|x-y|^{2\alpha}} = \frac{3}{5} \times \int_\epsilon^{1/10} ds \frac{1}{s^{2\alpha}}$$

となるが，これは $\epsilon \downarrow 0$ では，$2\alpha \geq 1$ で発散するから．

<u>$\alpha < 1/2$ のとき．</u>

このときは収束する．上と同様に議論すると今度は

$$\int_{A_\epsilon} \frac{1}{|x-y|^{2\alpha}} dxdy \leq 2\int_0^1 dx \int_{x-1/10}^{x-\epsilon} dy \frac{1}{|x-y|^{2\alpha}} = 2 \times \int_\epsilon^{1/10} ds \frac{1}{s^{2\alpha}}$$

となって，これは $\epsilon \downarrow 0$ でも有界である．

問5： 図は略．

(1) $x = u + uv, y = u - uv$ と変数変換した場合のヤコビアンは $2u$ である．また，積分領域は以下のようにして求められる：まず，x, y での積分領域の 3 条件は $0 \leq x = u + uv = u(1+v)$, $0 \leq y = u(1-v)$, および $a \leq x + y = 2u \leq b$ となる．$a > 0$ なので第 3 式から $u > 0$ が結論できるので，これを第 1，第 2 式に代入して $0 \leq 1 + v$ かつ $0 \leq 1 - v$ がでる．つまり，積分領域は

$$\frac{a}{2} \leq u \leq \frac{b}{2} \qquad \text{かつ} \qquad -1 \leq v \leq 1$$

という，簡単な長方形になる．あとはヤコビアンを忘れないように計算すると

$$(\text{問題の積分}) = \int_{a/2}^{b/2} du \int_1^1 dv e^v = \qquad (\text{計算して}) \qquad = \frac{b^2 - a^2}{4}\Big(e - \frac{1}{e}\Big)$$

と求まる．

(2) 非積分関数が正なので，積分領域を増やすと積分結果は単調増加する．ので，結局，上の答えで $b = 1$ かつ $a \downarrow 0$ としたものが答えで，

$$\frac{1}{4}\Big(e - \frac{1}{e}\Big)$$

問６： マトモに計算すると大変ですから（授業中にヒントを出したように）ガウスの定理に持ち込むのがよいでしょう．ただし，問題の曲面は閉じていませんから，このままではガウスの定理が使えません．そこで，$z=0$ のところで「フタ」をしてやってからガウスの定理を使います．

具体的には，以下のようにする．$z=0$ で問題の曲面のフタになるような，

$$z=0 \qquad \text{かつ} \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

なる点の全体を S_2 と定める．この S_2 の向きは上向きを正としよう．すると，ガウスの定理から

$$\int_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot dS(\boldsymbol{r}) - \int_{S_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot dS(\boldsymbol{r}) = \int_V \mathbf{div}\,\boldsymbol{F}\ dxdydz$$

が成り立つはずである（V は S と S_2 で囲まれた部分）．

問題の $\boldsymbol{F}$ については $\mathbf{div}\,\boldsymbol{F}(x,y,z)=2x+2y+2z$ であるから，楕円体であることを考えに入れた極座標

$$x=ar\sin\theta\,\cos\varphi, \qquad y=br\sin\theta\,\sin\varphi, \qquad z=cr\cos\theta \qquad (0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ \ 0\le\varphi<2\pi)$$

を用いて計算すると

$$\int_V \mathbf{div}\,\boldsymbol{F}\ dxdydz = abc\int_0^1 dr\,r^2\int_0^{\pi/2} d\theta\,\sin\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\,2\big(ar\sin\theta\,\cos\varphi+br\sin\theta\,\sin\varphi+cr\cos\theta\big)$$
$$=2abc^2\int_0^1 dr\,r^2\int_0^{\pi/2} d\theta\,\sin\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\,2r\cos\theta = 4\pi abc^2\int_0^1 dr\,r^3\int_0^{\pi/2} d\theta\,\sin\theta\cos\theta = \frac{\pi abc^2}{2}$$

また，S_2 は要するに xy 平面内にあるから，その法線ベクトルは ${}^t(0,0,1)$ であって，S_2 における面積分には $\boldsymbol{F}$ の z-成分だけが効く：

$$\int_{S_2}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot dS(\boldsymbol{r}) = \int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}(0^2+x^2)dxdy = \text{（極座標で計算）} = \frac{\pi a^3 b}{4}$$

よって，最終結果は

$$\int_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot dS(\boldsymbol{r}) = \int_V \mathbf{div}\,\boldsymbol{F}\ dxdydz + \int_{S_2}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot dS(\boldsymbol{r}) = \frac{\pi}{4}ab(2c^2+a^2)$$

（注意）上では闇雲に（a,b,c 入りの）極座標で計算したが，$x=as, y=bt, z=cu$ と変数変換すると，もう少し簡単になる．つまり，この変数変換により

$$\int_V \mathbf{div}\,\boldsymbol{F}\ dxdydz = abc\int_{V'}2(as+bt+cu)dsdtdu = 2abc^2\int_{V'}u\,dsdtdu$$

とできる（V' は $u\ge 0$ の部分の単位半球）．同様に，

$$\int_{S_2}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot dS(\boldsymbol{r}) = \int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}x^2\,dxdy = a^3b\int_{S_2'}s^2\,dsdt$$

となる（S_2' は s,t 平面内の単位円）．この二つの積分は普通の極座標で計算すれば簡単だし，間違いにくい．

もちろん，この問題は定義通りに面積分を計算してもできます．実際，その方法で最後までやりきって正しい答えを出した人が一人，いました．かなり大変な計算なので，良くやったと思います．