2010.11.30.

数学特論 A3 の後半

担当：原　隆（数理学研究院）：伊都キャンパス数理研究教育棟 219 号室，phone: 092-802-4441,
e-mail: hara@math.kyushu-u.ac.jp,　http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html

Office hours: 月曜の午後 5 時〜6 時半頃，僕のオフィスにて（ただし，会議などでつぶれることもあります）．
なお講義終了後にも質問を受け付けますし，これ以外でもお互いの都合の良い時間にお相手します．メイル下さい．

Probability theory is a measure theory, with a soul. (Marc Kac)

講義の概要：「確率論」は皆さんが既に学んだ「統計学」の基礎になるものでもあるだけでなく，それ自身も非常に面白いものである．この講義では，4 年生・大学院生向けに開講される本格的な確率論の講義への橋渡しとして，確率論の初歩（枠組み），条件付き確率，極限定理（大数の法則，中心極限定理），ランダムウォークなどを取り上げ，確率論の世界に触れてもらうことを目的とする．

講義の暫定的計画：

おおまかに以下のようになる予定．実のところ，どのくらいのレベルにするのが適当か，模索中です．（ある程度の内容は統計の講義ともかぶるので，どのようにしたら飽きられないか苦慮しております．）

1. 確率の考え方の基礎
2. 条件付き確率とベイズの定理
3. 確率変数と特性関数
4. 確率論における極限定理（大数の法則と中心極限定理）
5. 上記極限定理に基づいて，ランダムウォーク

評価方法：　この講義は確率論入門でもあるから，ガチガチの数学の講義，試験は行わない．評価は基本的にレポート（講義期間中に何回か出す）をもとにして付ける予定である．

参考書：

- Sheldon Ross: *A First Course in Probability* (MacMillan, 1988)．私がテキサスで使っていた教科書．非常に良い．英語の勉強にもなる．
- 楠岡成雄：確率・統計（森北出版，新数学入門シリーズ 7，1995）．非常に良いが，現在，絶版になっているらしい．
- 小針あき宏（「あき」は「日」の右に「見」）：確率・統計入門（岩波書店，1973）．この講義のレベルに割合あった，良い本だとおもう．
- Ya.G. シナイ：確率論入門コース（シュプリンガーフェアラーク東京，1995）．ちょっと程度が高い本だが，著者独自の切り口が随所に見られて面白い本である．この講義で確率論に興味が湧いたなら自分で挑戦してみて欲しい．ただし，至る所に誤植があるので，注意．

この科目に関するお願い：

世相の移り変わりは激しく，僕が学生だったときには想像すらできなかったことが大学で行われるようになりました．そのうちのいくつかは良いことですが，悪いこともあります．オヤジだとの批判は覚悟の上で，また数学科の学生さんには必要のないことだとは思うものの，互いの利益のために以下のルールを定めます．

- まず初めに，学生生活の最大の目的は勉強すること であると確認する．

- 講義中の私語，ケータイの使用はつつしむ．途中入室もできるだけ避ける（どうしても必要な場合は周囲の邪魔にならないように）．これらはいずれも講義に参加している他の学生さんへの最低限のエチケットです．
- 僕の方では時間通りに講義をはじめ、時間通りに終わるよう心がける．
- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義を通して行う．「講義に欠席したから知らなかった」などの苦情は一切，受け付けない．
- 連絡の補助として僕のホームページも使う —— アドレスは最初に載せた．なお，上の長いアドレスを用いなくとも，「原隆」で検索すれば今のところ，「Hara Home Page(J)」というのがトップに来るから，そこから「講義のページ」にいけば，この科目のページがあります．
- レポートを課した場合，その期限は厳密に取り扱う．
- E-mail による質問はいつでも受け付ける（hara@math.kyushu-u.ac.jp）ので積極的に利用するように．ただ，回答までには数日の余裕を見込んで下さい．

重要なお断り：現代の確率論は異常に発達してしまい，日常的な素朴な出発点をともすれば忘れがちである．実際，大学での「確率論」の講義は測度論を下敷きにした高度なものがほとんどである．これには十分な理由がある —— このような高度な技を持ってして始めて扱える面白い問題が，世の中にはいくらでもあるし，そのような問題では「素朴」な直感が往々にして裏切られるからだ．しかし，これは研究者には良くても，初学者にはハードルが高すぎる可能性もある．また，そのような高度なことを強調するあまり，そもそもの確率論の出発点を初学者は忘れやすい．
そこで，この講義では測度論を必要とするような高度な話題は扱わない（または，扱っても，適当にごまかす）．その代わりに確率論の基本概念とその面白さを皆さんに理解してもらい，4 年次の高度な議論への橋渡しを行うことを最大の目的とする．4 年次の講義を聞いた際，技術的な細部に溺れることなく，冒頭の Marc Kac の言葉が実感できるようになって頂ければ本望である．

この講義で扱いたい問題の例

問題 1. （条件付き確率）ある病気にかかっているかどうかを調べる検査があり，この検査の精度は 99% である．つまり，ある人が病気であるのに病気でないと誤判断する（偽陰性）確率は 0.01，病気でないのに病気だと誤判断する（擬陽性）確率も 0.01 である．

一方，この病気は割合に稀なものであって，全人口のうち，0.01%（割合で言えば，0.0001）くらいの人がこの病気にかかっていることがわかっている．

さて，僕がこの検査を受けたところ，僕は陽性（病気だ！）と判断されてしまった．僕が本当に病気である確率はどれくらいと思ったら良いか？

問題 2. （正規分布）同じような人の集団に対する試験，テストなどの結果は往々にして「正規分布」とよばれる分布に近くなる — 試験の点数分布，学生の身長や体重の分布など．これは本当か？どのような時に，この「正規分布」を期待できるのか？正規分布を期待できる場合，その理由は何なのか？

問題 3. （大数の法則）我々の身の回りにある空気は分子からできていることは高校でも学んだ通り．分子は不規則な運動をしているはずなのに，我々の感じる圧力は一定だ．この事実の数学的基礎付けは可能か？

問題 4. （ランダムウォーク）京都のように碁盤目になっている市街がある．非常に酔っぱらった人がいて，自分の家が分からなくなってしまった．この人は四つ辻に来るたびに自分の 4 つの可能な方向からランダムに選んで進む（後戻りもあり）ことをくり返す．この人は果たして自宅にたどり着けるだろうか？たどり着けるとしたら，それまでにかかる時間はどのくらいか？（これは単に酔っぱらいだけの問題ではない．「拡散」と呼ばれる，物理・化学・生物で非常に重要な現象のモデル化である．）

第１回レポート問題：

以下のような「実験」（ゲーム）を考えます.「問題」はそのあとに来ます. レポート結果を集計して，来週の講義で使う予定です.

「実験」のやり方

ゲームのやり方と要点は以下の通りです.

1. ２人一組（A さんと B さん）になって，紙コップを３つと「お宝」（何でもよい，コップの下に隠れるもの）を一つ用意します.
2. A さんは３つの紙コップをテーブルに伏せ，その一つにお宝を（B さんに見られないように）隠します. ただしこのとき，A さんは，どのコップの下にお宝を隠したかをしっかり覚えていて下さい. この情報はステップ４で使います.
3. B さんはお宝が隠されていると思う紙コップを一つ，指定します.
4. B さんからコップの**指定があった後で** A さんは「**お宝が隠れていず，かつ B さんも指定しなかった**」コップをひっくり返してみせます. 当然，お宝は入っていません.（ここで A さんが覚えていたはずの「どのコップの下にお宝を隠したか？」の情報が必要になります.）なお，ここでどのコップをひっくり返すかは非常に重要です. 間違わないで下さい.
5. （ここが一番重要）さて，上の結果を踏まえて，B さんにはもう一度チャンスが与えられます.（残りのコップ２つのどちらかにはお宝が隠れているはずですが）「B さんは先ほど指定したコップから，残されたもう一方のコップに乗り換えてもよい」とするのです.
6. このゲームの面白いところは**乗り換えた方が得**（お宝ゲットの確率が大きくなる）**か**，乗り換えても確率は変わらないか，と言うことです.
7. 以上でゲームの説明は終わります.

「問題」編

1. （こちらがメイン）上のゲームを,「B さんがこのまま乗り換えない場合」「B さんがやっぱり乗り換える場合」について，それぞれ５回程度（もっとたくさんやりたければ１００回でも歓迎！）やってみて，その結果を「このまま乗り換えなかった場合のお宝ゲットは○○回中××回」「やっぱり乗り換えた場合のお宝ゲットは□□回中△△回」とレポートしてください.
2. （こっちはおまけ）このゲームを理論的に考えて,「結果はこうなるはずだからこっちが得！」と言う解析があれば，それも書いて下さい.

レポート提出について：

集計の都合上,

締め切りは 2010 年 12 月 6 日（月）の 16:00 ,

提出場所は数理事務室のポスト

とします. なお，問題の番外編として，**今までの講義内容・講義形態についての感想，不満，文句，このように改善すべしとの意見**などもできるだけ書いてください. お願いします.

なお，この問題は最近では非常に有名で，ネットで検索すればすぐ「答え」が出てくるかもしれません. だけど，ここでは皆さんが実際にやってみることが大事だと思うので，出て来た結果を正直に回答して下さると助かります. 特に，理論的考察や「答え」にあうようなデータだけを採用する，というようなことは決してやってはいけません.（もし「合わない」のなら，なぜ合わないのか，合わないのは本当に良くないのか，を考察するのが筋です.）

1　確率論の基礎

1.1　確率論の舞台 — 事象と標本空間

現実の問題の「確からしさ」を議論するのはなかなか大変である．そこで，数学ではまず，現実から少し切り離した形で，考えやすい舞台を設定する．

定義 1.1.1 **可能な結果の全体**からなる集合を**標本空間**（sample space）$\mathcal{S}$ と言う．標本空間の元（つまり，一回の「実験」の結果になりうるもの）を**標本点**または**根元事象**と言う．

標本空間が有限でない場合はいろいろとややこしいことが起こるので，この講義では主に**標本空間が有限の場合**（および有限からのアナロジーで理解できる場合）を考える．

定義 1.1.2 数学的には**事象**とは単に**標本空間の部分集合**，つまり「根元事象の集まり」のことである．なお，事象には空集合（起こり得ないこと），および標本空間全体も含めて考える．

事象を標本空間の部分集合として定義するのは，以下の事象の演算ともあっている．

定義 1.1.3 2つの事象 E, F に対して，

- その**和事象**を集合としての和集合 $E \cup F$ として，
- その**積事象**を集合としての交わり $E \cap F$ として

定義する（事象の場合，$E \cap F$ を EF と略記することが多い）．更に，

- E^c を $\mathcal{S} \backslash E$ （E の補集合）として定義し，E の **余事象**と言う．

日常言語に直せば，$E \cup F$ とは E または F の**どちらかが起こること**，$E \cap F = EF$ とは E と F の**両方が起こること**を意味する．また，E^c は日常言語では「事象 E が起こらないこと」に相当する．

なお，以上をまとめると，以下の「事象の公理」になる．有限集合なら今までの定義でよいが，$\mathcal{S}$ が無限の時はちと問題になるので，無限の場合は以下の公理を用いるのが良い．

定義 1.1.4 (事象の公理) Sample Space $\mathcal{S}$ が与えられたとき，$\mathcal{S}$ の**事象の集まり**とは，以下を満たす $\mathcal{S}$ の部分集合の集まり（部分集合族）$\mathcal{F}$ のことである．

1. $\mathcal{F} \ni \varnothing$
2. $E \in \mathcal{F}$ ならば $E^c \in \mathcal{F}$
3. $E_1, E_2, E_3, \ldots \in \mathcal{F}$ に対し，$\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{F}$

1.2　数学における確率

今までは単に確率をやる舞台を設定したにすぎない．これからいよいよ，「確率」を考える．数学ではある意味で「天下りに」確率を定める．天下りという意味はこれから徐々にわかるはずだ．標本空間が有限集合の場合から始め，標本空間 $\mathcal{S} = \{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$ を考える（e_j が根元事象）．

そもそも，確率とは何だろうか？いろんな事象の「起こり易さ」を表すもののハズである．その「起こり易さ」は根元事象 e_j の「起こり易さ」を決めれば決まるだろう．だから，要するに，根元事象の起こり易さ p_j （$j = 1, 2, \ldots, N$）をすべて与えれば確率が決まったと言えるのではないか？しかし，各根元事象の起こりやすさを，現実に即して決めるのはなかなか難しい．そこで，数学では確率が満たすべき**外枠を与える**ことから始める．

外枠を与えるために，根元事象の確率 p_j　$(j=1,2,\ldots,N)$ がどんな性質を満たすべきを考えよう．まず，これは確率だから 0 と 1 の間にないといけない．更に，$\mathcal{S}$ そのものというのは全事象だからこの確率は 1 であるべし．要するに

$$0 \le p_j \le 1, \qquad \sum_{j=1}^{N} p_j = 1 \tag{1.2.1}$$

であるべきだ，ということになる．そして，根元でない事象 $E=\{e_1,e_2,e_3,\ldots,e_n\}$ については，

$$(E \text{ の確率}) = \sum_{j=1}^{n} p_j \tag{1.2.2}$$

となるはずである．と言うのも，$E=\{e_1\}\cup\{e_2\}\cup\{e_3\}\cup\ldots\cup\{e_n\}$ であるので，E とは「e_1 か，e_2 か，…，e_n の**どれか**が起こる」事象だから，それぞれの事象の確率の和になるのが自然．

これが数学での確率論の出発点である．要するに

- sample space $\mathcal{S}$ 上に根元事象の確率 p_j を (1.2.1) を満たす形で与え，
- 根元事象でない一般の事象 E の確率を (1.2.2) で計算する．

それで，**このルールを満たすものを全て確率と認める**のである．(どのように p_j を選ぶか，は個々の問題に応じてうまく決める．)

さて，上のように決めた「それぞれの事象の確率」はどんな性質を満たしているだろうか？上では根元事象から確率を決めたが，そうでない場合 — つまり，根元事象の和事象である色々な事象の確率から決めた方が楽な場合 — も（後で）出てくる[1]．そのために，(根元事象から出発しない）抽象的な確率の性質を公理としてまとめておく．

定義 1.2.1 (確率の公理，簡単バージョン) Sample Space $\mathcal{S}$ が与えられたとき，$\mathcal{S}$ 上の**確率**（または確率測度）とは，以下を満たす $\mathcal{S}$ 上の関数 P のこと．すなわち，$\mathcal{S}$ の部分集合 E のそれぞれについて関数の値 $P[E]$ が定まり，かつ

1. 全ての $E \subset \mathcal{S}$ に対して $0 \le P[E] \le 1$.
2. $P(\mathcal{S}) = 1$
3. $E_1, E_2, E_3, \ldots \subset \mathcal{S}$ が**互いに排反**（mutually exclusive），つまり「$i \ne j$ ならば $E_i \cap E_j = \varnothing$」，のとき，$P\bigl[\bigcup_i E_i\bigr] = \sum_i P[E_i]$

もちろん，上をみたす関数 P が与えられたとき，$P[E]$ を「事象 E の起こる確率」という．なお，sample space $\mathcal{S}$ とその上の確率測度 P をあわせた $(\mathcal{S},P)$ を**確率空間**と言う．

上の性質を満たしている P なら何でも確率と認めてしまおう，というのである．実際にどのような P を採用するかは，もちろん，考えている具体的問題によるが，このように「実際にどんな P を採用するか」と「P の満たすべき枠組み（確率の公理)」を分離したのが Kolmogorov の偉大な着想であった．

この確率の性質については以下が成り立つ．(ベン図を書いて理解した上で公理から厳密に導けるのが望ましい．)

命題 1.2.2

$$P[E^c] = 1 - P[E] \tag{1.2.3}$$

$$E \subset F \quad \Longrightarrow \quad P[E] \le P[F] \tag{1.2.4}$$

$$P[E \cup F] = P[E] + P[F] - P[EF] \tag{1.2.5}$$

[1]皆さんが高校でやったはずの例を挙げよう．表が出る確率が p，裏が出る確率が $q=1-p$ である硬貨がある．この硬貨を 100 回投げることを考える．この場合の根元事象は「1 回目に表，2 回目に裏，3 回目も裏，4 回目は表，5 回目は裏...」というような，「100 回までのそれぞれに何がでたか」である．この一つの根元事象の確率を計算するには，「各回の結果が独立であると仮定して」表が出た回数だけ p，裏が出た回数だけ q をかける．これは根元事象の確率を直接与えるというよりも，根元事象を「一回目表」「2 回目裏」「3 回目裏」「4 回目表」... という事象の積事象として考えたと思った方が自然である．このような意味で，「根元事象の確率を直接与えるよりも絡めてから決める方が自然」な例は応用上，非常に多い

1.3 数の数え方の復習

高校で習ったことの復習ではあるが，時々使うのでまとめておく．もちろん，以下のようなことは頭から覚え込むのではなく，自分で納得して理解するようにすべし．

定義 1.3.1
- $n > 0$ に対して，$n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$，また $0! = 1$ と定義する．
- $0 \le k \le n$ に対して，$\displaystyle\binom{n}{k} := {}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ と定義し，**二項係数**と呼ぶ．
- $0 \le n_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} n_i = n$ のとき，$\displaystyle\binom{n}{n_1\, n_2\, n_3\, \cdots\, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3!\, \cdots\, n_r!}$ を**多項係数**と言う．

1 から n までの数字を書いた n 枚のカードがあって，これから k 枚を取り出す場合を考える．取り出し方（戻し方）に応じて，大体 3 とおりある．

Case 1: n 枚のカードから繰り返しを許して k 枚とり，その結果を並べる場合．この場合の結果は $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ と言う列になる（a_j は j 番目に出たカードの目）．ここでそれぞれの a_j は勝手に 1 から n の値をとれるので，結果の総数（場合の数）は

$$n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k \tag{1.3.1}$$

となる．

Case 2: n 枚のカードから繰り返しを許さないで k 枚とり，その結果を並べる場合．やはり結果は $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ の形になるが，今回は a_j は全て別のものにならざるを得ない．a_1 は n 通り，a_2 は a_1 をよけるから $(n-1)$ 通り，と考えて行くと，結果は

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{1.3.2}$$

となる．

Case 3: n 枚のカードから繰り返しを許さないで k 枚とるが，その順序は気にしない場合．やはり結果は case 2 のように $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ の形になるが，今は a_j の順序を気にしない（順序が異なっても同じものと見なす）．従って場合の数は *Case* 2 のものを 「k 個の数字を並べる並べ方」$k!$ で割ったものになる：

$$\frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{1}{k!} = \binom{n}{k} \tag{1.3.3}$$

ホンの少しだけ，これらの応用例を挙げておく．これらの証明は帰納法でもできるが，Case-3 のような数え方で理解するのが良いと思う．

命題 1.3.2 $1 \le k \le n$ に対して，$\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ ．

命題 1.3.3 (二項定理) $1 \le n$ では，$\displaystyle(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}$ ．

Case 4. なお，補足的に Case 3 の一般化を考えておく．n 枚のカードを，それぞれ $n_1, n_2, \ldots, n_r$ 枚のカードからなる r 個のグループに分ける場合（$\sum_{i=1}^{r} n_i = n$）．この場合はまず n 枚から n_1 枚を取り出し，次に $n - n_1$ 枚から n_2 枚を取り出し，次に $n - n_1 - n_2$ 枚から n_3 枚を取り出し... と考えて

$$\binom{n}{n_1} \times \binom{n-n_1}{n_2} \times \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \times \cdots \times 1 = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3!\, \cdots\, n_r!} = \binom{n}{n_1\, n_2\, n_3\, \cdots\, n_r} \tag{1.3.4}$$

となることがわかる．

命題 1.3.4 (多項定理) $n \geq 0$ に対し，

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{n_1, n_2, \cdots, n_r \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n}} (x_1)^{n_1} (x_2)^{n_2} \cdots (x_r)^{n_r}. \tag{1.3.5}$$

2 条件付き確率とベイズ推定

2.1 独立な事象と条件付き確率

まず，確率論で最も重要な概念（？）とでもいうべき，「独立性」を導入する．

定義 2.1.1 (独立な事象) 確率空間 $(\mathcal{S}, P)$ 中の事象 E, F が，

$$P[E \cap F] = P[E]\, P[F] \tag{2.1.1}$$

を満たすとき，F と E は独立な事象 であると言う．

日常言語で言えば，E と F が独立とは，E と F の**起こり方が無関係**（F が起こっても起こらなくても，E の起こり方には影響がない）という場合にあたる．勿論，世の中には独立でない事象の方が多い（と言うか，大抵の事象は何らかの形で関係している）．しかし，独立でない事象も，**近似的に**独立と看做せることは非常に多い．独立な事象については（後々で見るように）非常に多くのことが言えるので，また，近似的に独立な事象でも独立な事象に対する定理が近似的に成り立つことも多いので[2]独立な事象を考えるのは非常に重要なのである．

E, F が独立でない場合は F の起こり方が E の起こり方に影響しているわけだ．影響の度合いを測るため，「条件付き確率」を導入する．

定義 2.1.2 (条件付き確率) 確率空間 $(\mathcal{S}, P)$ 中の事象 E, F を考える．$P[F] \neq 0$ の場合に，

$$P[\,E\,|\,F\,] := \frac{P[E \cap F]}{P[F]} \tag{2.1.2}$$

を F の下で E が起こる条件付き確率 と言う．

註 2.1.3 E と F が独立の場合はもちろん，$P[E|F] = P[E]$ となる．条件付き確率を先に定義して，この式を独立性の定義とする流儀もある．

場合によっては，$P[E]$ そのものよりも $P[E|F]$ と $P[F]$ の方が良くわかる場合があり，この場合

$$P[E] = P[E|F]\, P[F] + P[E|F^c]\, P[F^c] \tag{2.1.3}$$

として $P[E]$ を計算することもある．条件付き確率そのものに興味がある場合もあるが，このような計算や後述のベイズ推定において，条件付き確率を計算の中間段階として利用する場合も非常に多い（詳しくは講義で）．

2.2 ベイズの公式と推定

ここでは条件付き確率の，今までとは少し違った解釈を学ぼう．すなわち $P[F\,|\,E]$ は 「E が起こったという条件の下で F が起こる確率」なのだが，解釈としては 「E という情報を知った後で F の確率をどのように設定するのがよいか」を示す式とも考えられる．この節では，このような解釈に基づく推論を考える．

[2]もちろん，どの程度「近似的に独立」ならどの程度の定理が成り立つかはよくよく研究する必要があるが

命題 2.2.1 (Bayes の公式) 確率空間 $(\mathcal{S}, P)$ を考える．まず，$E, F \subset \mathcal{S}$ に対して

$$P[F \mid E] = \frac{P[F \cap E]}{P[E]} = \frac{P[E \mid F]\, P[F]}{P[E \mid F]\, P[F] \,+\, P[E \mid F^c]\, P[F^c]} \tag{2.2.1}$$

が成立．また，事象 F_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ が互いに排反（$F_i \cap F_j = \varnothing$ for $i \neq j$），かつ $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} F_i = \mathcal{S}$ を満たすときは，

$$P[F_j \mid E] = \frac{P[F_j \cap E]}{P[E]} = \frac{P[E \mid F_j]\, P[F_j]}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} P[E \mid F_i]\, P[F_i]} \tag{2.2.2}$$

が成立．

上の式は単に条件付き確率の定義

$$P[F \mid E] = \frac{P[F \cap E]}{P[E]} \tag{2.2.3}$$

と (2.1.3) の一般化

$$P[E] = \sum_{i=1}^{k} P[E \mid F_i]\, P[F_i] \tag{2.2.4}$$

を組み合わせた**だけ**のものである．しかしそうは言っても，$P[E]$ の計算に (2.2.4) が不可欠な事例が多々あるから，応用上は非常に役立つ．また，解釈としても，左辺は E で条件づけているのに，右辺は F_i で条件付けていて，**条件付けの立場が逆転**しているように見えるのも面白い．

下の問は最初に述べた問 1 そのものである．ただ，正直に言って，僕にとっては下の問の答えの方が直感と合わないように感じる「検査が間違う確率 p, q は 0.01%なんだよ．この検査は 99.99%正しいんだから，君は病気！」と言われたらどうします？

問 2.2.2 （問 1 again）かなり稀な病気の血液テストを考える．このテストの誤差の入り方は，

- この病気にかかっている人をテストすると $(1 - p)$ の確率で「病気だ」と正しく判定するが，残りの p の確率で見逃してしまう
- 健康な人をテストすると $(1 - q)$ の確率で「健康だ」と正しく判定するが，残りの q では（健康なのに）「病気だ」と言ってしまう

となっている．さて，独立な疫学的調査から病気の人の割合は r であるだろうとわかっている（p, q, r はすべてゼロに近いがゼロではない）．

僕の検査結果は陽性（病気だ）だった．僕が本当に病気である確率，健康なのに間違って病気と診断された確率，をそれぞれ求めよ．

問 2.2.3 ある工場ではカメラのフラッシュ[3]を作っている．通常の工程では不良品（光らない）が出る割合は p である（つまり「N 個のうち pN 個が不良」）が，今日のだけ，担当者の居眠りのために不良品が q の割合で混じってしまったようである（$0 < p \le q \ll 1$ とする）．さて，ここにフラッシュが N 個づつ入った箱が k 個ある．k 個の箱のうち $(k - 1)$ 個には昨日までに正常に製造されたものが入っており，残りの一つには今日（不良率 q で）製造されたものが入っていることまではわかっているが，どの箱に今日の製品が入っているかはわからない．本来ならばこれら k 個の箱を全て廃棄処分にすべきであるが，それは余りにもったいないと考え，「抜き取り検査」を行うことにした．以下の a, b のそれぞれの場合について，問に答えよ．

a.
- 今，一つの箱を選び，その中からフラッシュを一つ取り出して点火したところ，光らなかった（不良品）．この箱に入っているのは今日製造された製品である確率を求めよ．

[3]多分，今の学生さんにはわからないと思うが，昔のカメラには使い捨てのストロボ（一回光ったら終わり）のようなものを使っていたのです．その使い捨ての電球をフラッシュといいました

- 同じ箱からもう一つ取り出して点火すると，またもや不良品であった．この箱に入っているのは今日製造された製品である確率を求めよ．

b. （a とは無関係）全ての箱からフラッシュライトを一つずつ取り出して点火したところ，箱 A から取り出したもののみ不良品，残りは正常であった．箱 A に入っているのは今日製造された製品である確率を求めよ．

言うまでもないことであるが，こんな時はあくまで k 箱全てを捨てるべきであり，上のような計算に基づいて「最も不良品の多そうな箱以外を全て売ってしまおう」などと言うのは非常にマズイ！(なお，わざわざ「フラッシュ」などというものを持ち出したのは，一回テストしたら使い物にならなくなるものを例にしたかったため — 非破壊検査ができない場合の推定法)

問 2.2.4 ○○科目の期末試験は（数学ではあり得ないことに）○×式の問題で，各問は m 個の選択肢から一つ正解を選ぶ形になっています．A 君はかなり怠けていたので，実力で（つまり，まぐれ無しで）正しく答えられる確率は各問毎に p であると思われます（$p < 1/2$）．答を正しく知っているときは勿論，A 君はその正解を答えますが，答がわからないときはヤケクソで m 個の答から等確率で 1 個を選びます．さて，

1. ある一問に対して（まぐれであれ何であれ）A 君が正解を答える確率はいくらでしょう？
2. ある一問をテストしてみたところ，A 君は正解を答えました．このとき，A 君が実際に答を知っていた（まぐれ当たりではない）確率はいくらでしょう？
3. 以上の結果を解釈せよ． どのような p, m の値の場合に「マグレ当たり」が多くなるか，考えてみよう．

問 2.2.5 行方不明の飛行機を捜索中である．現在，墜落した可能性のあるのは 1, 2, 3 の 3 地区に限ること，およびこれらの 3 地区に墜ちている確率は等しい（つまり 1/3）こと，までは絞り込んだ．これから捜索に入るが，厳しい気象条件のため，確実に見つけられる保証はない — 実際に i-地区に墜ちていたとしても，確率 p_i で見逃すだろうと思われる（$p_i \ll 1$）．

まず 1-地区を捜索したところ，飛行機は見つからなかった．この事実から，i-地区に墜ちている確率を推定せよ（$i = 1, 2, 3$）．

問 2.2.6 (Laplace) $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ と（非常に小さな）印が付けられた $(k + 1)$ 個のコインが壺に入っている．これらは非常にいびつなコインで，i 番目のコインを投げたときに表が出る確率は i/k となるように調節されている．目隠しをしたままこの壺から一枚のコインを選んで実験をする．以下の問いに答えよ．

1. 取り出したコインを一回投げたところ，表が出た．このコインが i 番目のコインである確率はいくらか？ $(i = 0, 1, 2, \ldots, k)$
2. 取り出したコインを更に投げ続け，合計 n 回投げた．結果は全て表だった．このコインが i 番目のコインである確率はいくらか？$(i = 0, 1, 2, \ldots, k)$
3. 取り出したコインを更にもう一回（つまり通算で $(n+1)$ 回目）投げる事にした．このとき，やはり表が出る確率はいくらか？
4. 上の小問 2, 3 の答はそれほど簡単にならなかったかも知れない．そこでこれらの確率が $k \to \infty$ の極限でどうなるか，求めてみよう．結果は直感と合うだろうか？

（注）この問では，コインは最初に一枚取り出したら，同じ物を使い続ける．コインを何回か投げるとき，一回ごとの結果は独立だとする．また，コインについている印は大変小さいので，取り出したコインがどれかは見ただけではわからないものとする．(そうでないと，小問 2, 3 が面白くない．)

問 2.2.7 3 人の射撃手（$1, 2, 3$）が 200m 離れた，同じ的を狙う．今までの練習成績から，射撃手 i が一発で的に当てる確率はそれぞれ p_i と考えられる（$i = 1, 2, 3$）．さて，3 人が一発ずつ撃ったところ，的には**丁度一発だけ**当たっていた．この当たった一発が射撃手 i のものである（つまり，他の二人ははずした）確率について，以下の問いに答えよ．

1. まず，計算を始める前に，直感的に答を推定してみよう．
2. では，講義での説明に基づき,「正しく」計算してみよう．
3. 2 の結果は直感とあっているか？例えば，$p_1 = 0.2, p_2 = 0.4, p_3 = 0.6$ として，射撃手 1 が当てた確率はいくらになっているか？(勿論，1, 2 の答が一緒になった人は立派なものである．僕にはこの結果は意外だったけどね.)

3 確率変数

3.1 確率変数とは

今，確率空間 (S,P)（標本空間 S とその上の確率 P）が与えられたとする．(S,P) 上の確率変数とは，大ざっぱには「その値が確率的に（ランダムに）変動する数」のこと．土台になる確率空間を考えた上での確率変数だから，それぞれの値をとる確率は（原理的に）計算できる．

3.2 期待値と分散

定義 3.2.1 確率変数 X が $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の値をとり，その確率が

$$P[X = x_i] = p_i \qquad \Bigl(\sum_{i=1}^{n} p_i = 1\Bigr) \tag{3.2.1}$$

と与えられているとする．このとき，X の期待値 を

$$E[X] := \langle X \rangle := \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i \tag{3.2.2}$$

により定義する．(数学では $E[X]$ の記号を，物理などでは $\langle X \rangle$ の記号を用いることが多い.）また，X の分散 を

$$\mathrm{Var}[X] := E\Bigl[\bigl(X - E[X]\bigr)^2\Bigr] = E\bigl[X\bigr]^2 - E[X]^2 = \bigl\langle X^2 \bigr\rangle - \langle X \rangle^2 = \bigl\langle \bigl(X - \langle X \rangle\bigr)^2 \bigr\rangle \tag{3.2.3}$$

により定義する．

X が連続の値を取り，その確率密度が $\rho(x)$ で与えられている場合には，

$$E[X] := \int_{-\infty}^{\infty} x\, \rho(x)\, dx$$

として期待値を定義する．また，確率変数 X の関数 $f(X)$ の期待値は

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho(x)\, dx$$

と書ける．[$f(X)$ そのものは確率変数であるから，$f(X)$ の期待値を定義に従って計算すると上の表式に一致することがわかる.]

（少し脱線）事象 F の確率を期待値の形で書くことができる．すなわち，関数 $I[F]$ を

$$I[F] := \begin{cases} 1 & (F \text{ が起こるとき}) \\ 0 & (F \text{ が起こらないとき}) \end{cases} \tag{3.2.4}$$

として定義すると[4],

$$P[F] = E[\, I[F]\,] = \langle I[F] \rangle \tag{3.2.5}$$

となる．つまり，F の起こる確率は関数 $I[F]$ の期待値 なのだ．

期待値の重要な性質はその**線形性**である．すなわち，確率空間 (S,P) における確率変数 X, Y に対して，

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y] \tag{3.2.6}$$

が成り立つ．

[4]この関数 I を事象 F の**指示関数**（indicator function）とよぶ

命題 3.2.2 確率空間 $(\mathcal{S}, P)$ における確率変数 X, Y と実定数 $a > 0$ に対しては以下が成り立つ：

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y], \qquad E[aX] = aE[X] \tag{3.2.7}$$

$$\mathrm{Var}[aX] = a^2\,\mathrm{Var}[X] \tag{3.2.8}$$

$$\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2\mathrm{Cov}(X,Y), \qquad \mathrm{Cov}(X,Y) := \langle (X - \langle X \rangle)(Y - \langle Y \rangle) \rangle\,. \tag{3.2.9}$$

$\mathrm{Cov}(X,Y)$ は X と Y の**共分散**と言う.

註： これらの結果は X, Y の分布が独立で**なくても**成り立つ.

確率変数 X と Y が任意の $A, B \subset \mathbb{R}$ に対して

$$P[X \in A \text{ かつ } Y \in B] = P[X \in A]\,P[Y \in B] \tag{3.2.10}$$

を満たすとき，X と Y は**独立**な確率変数と言う．X と Y が**独立**な場合には,

$$E[XY] = E[X]\,E[Y], \qquad \mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] \tag{3.2.11}$$

が成り立つ.

3.3 チェビシェフの不等式とその仲間

前節でも,「分散は確率変数のばらつきの目安を与える」と言ったが，ここではもう少し定量的な議論を行う．ここでも確率空間 $(\mathcal{S}, P)$ 上の確率変数 X を考える．まず，$A \in \mathbb{R}$ について

$$P[X \in A] = \langle I[X \in A] \rangle \tag{3.3.1}$$

であることに注意しておこう.（ここの A としては実数軸上の適当な区間を考えておけば十分.）

命題 3.3.1 (マルコフの不等式) 正の値のみをとる確率変数 X と任意の正の数 a に対して,

$$P[X \geq a] \leq \frac{\langle X \rangle}{a} \tag{3.3.2}$$

が成立.（勿論，右辺の期待値が存在しないときは右辺には意味がないけど.）

命題 3.3.2 (チェビシェフ の不等式) 確率変数 X の期待値を μ，分散を $\mathrm{Var}[X]$ と書くと，任意の正の数 a に対して,

$$P[|X - \mu| \geq a] \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{a^2} \tag{3.3.3}$$

が成立.（勿論，右辺の分散が存在しないときは右辺には意味がないけど.）

調子に乗って似たような不等式を作ることもできる．例えば,

$$P[|X - \mu| \geq a] \leq \frac{\langle |X-\mu|^n \rangle}{a^n} \qquad (a > 0,\ n \text{ は任意の正の整数}) \tag{3.3.4}$$

同様に，任意の $a, b > 0$ に対して

$$P[|X - \mu| \geq a] \leq \frac{\left\langle e^{b|X-\mu|} \right\rangle}{e^{ab}}. \tag{3.3.5}$$

また，マルコフの不等式の仲間として,（X が非負の値しかとらないとき）

$$P[X \geq a] \leq \frac{\left\langle e^{bX} \right\rangle}{e^{ab}} \tag{3.3.6}$$

など．これらの不等式は勿論，右辺の期待値が存在しなければ意味がないが，存在する場合には（特に $a \to \infty$ について）強力なものになる．実際の応用については後述.

4 大数の法則と中心極限定理

この章では，平均が μ，分散が σ^2 の独立同分布な確率変数 X_i （$i = 1, 2, \ldots$）を考え，

$$S_N := \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad (*)$$

を定義する．N が大きいとき，S_N の分布はどうなっているだろうか？

この問に対する以下の結果は，近代確率論の一つの頂点とも言える．

- 大数の弱法則：かなり大ざっぱだが簡単に導出できる．
- 大数の強法則：上よりも精密だが，導出がちと厄介．
- 中心極限定理：上の２つの一つの精密化．
- 大偏差（large deviation）の理論：上の 3 つの場合でカバーできない部分をカバーする理論．

4.1 大数の弱法則と強法則

定理 4.1.1 (大数の弱法則) (*) の確率変数 X_i を考える．任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{N\to\infty} P\Bigl[\Bigl|\frac{S_N}{N} - \mu\Bigr| > \epsilon\Bigr] = 0 \qquad \text{より詳しくは} \qquad P\Bigl[\Bigl|\frac{S_N}{N} - \mu\Bigr| > \epsilon\Bigr] \le \frac{\sigma^2}{N\epsilon^2} \tag{4.1.1}$$

が成り立つ．ここで $\mu := E[X_i]$ は X_i の期待値．

右辺に出ている確率が $N \to \infty$ でもゼロにならないためには，ϵ が定数ではダメである．つまり，$N \to \infty$ につれ，$\frac{S_N}{N}$ は μ の周りの非常に狭い範囲に集中して分布していくことがわかる．

定理 4.1.2 (大数の強法則) (*) の X_i と S_N に対して，

$$P\Bigl[\lim_{n\to\infty} \frac{S_N}{N} = \mu\Bigr] = 1 \tag{4.1.2}$$

強法則と弱法則の違いは $\lim_{n\to\infty}$ が $P[\cdots]$ の外にあるか，中にあるかだけなのだが，これは時には大きな違いになる．勿論，名前の通り，強法則の方が強い．

4.2 中心極限定理

前節の「大数の法則」で，S_N がその平均値の周り $\sqrt{N}$ くらいのところに集中していくことを見た．そこで，集中していくとしたら行った先はどうなっているのか，に答えるのが中心極限定理である．

定理 4.2.1 (*) の確率変数 X_i に対して，

$$S_N := \sum_{i=1}^{N} X_i, \qquad Z_N := \frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} \bigl(X_i - \mu\bigr) = \frac{S_N - \langle S_N \rangle}{\sigma\sqrt{N}} \tag{4.2.1}$$

を定義すると，任意の $a < b$ に対して

$$\lim_{N\to\infty} P\Bigl[\, a \le Z_N \le b \,\Bigr] = \int_a^b \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dx \tag{4.2.2}$$

右辺に出てきた分布を「正規分布」（normal distribution）というのは，皆さんが統計で習った通り．

上の定理の主張をもう少し述べておく．S_N や $S_N - N\mu$ 自身は N 個のものの和だから，N が大きくなると（普通は）大きくなる．けれども，$S_N - N\mu$ の大きくなり方は N に比例するのではなく，$\sqrt{N}$ に比例する，と言うのが前節までの話だった．そこで上の定理では $S_N - N\mu$ を $\sqrt{N}$ で割ることによって Z_N を定義した．こうすることで，$N \to \infty$ でも（大抵は）有限にとどまるような量を定義したわけである．それで，定理は，この Z_N が「正規分布」に近づいていくことを主張している．

4.3 大偏差（large deviation）の理論

これまで，まず大数の法則で $S_N := \sum_{i=1}^{N} X_i$ のふるまいを大まかに押さえ，次に中心極限定理で，典型的な場合の S_N のふるまいを見た —— $(S_N - \langle S_N \rangle)/\sqrt{N}$ が正規分布になる．では，$S_N - \langle S_N \rangle$ が N のオーダーの場合はどうだろうか？これは $S_N - \langle S_N \rangle$（偏差）が典型的な大きさ（$\sqrt{N}$）よりも極端に大きい場合を考えることに相当するので,「大偏差の理論」と呼ばれている．簡単な例での定式化は以下の通り：

まず,

$$Y_N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{4.3.1}$$

を定義しよう．つぎに，$a \in \mathbb{R}$ に対して

$$h(a) := \sup_{\theta} \bigl\{ \theta a - \log \left\langle e^{\theta X} \right\rangle \bigr\} \tag{4.3.2}$$

も定義する．すると，実数の任意の区間 A に対して

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{P}[\, Y_N \in A\,] = - \inf_{a \in A} h(a) \qquad \text{つまり} \qquad \mathbb{P}[\, Y_N \in C\,] \approx \exp\Bigl(-N \inf_{a \in A} h(a) \Bigr) \tag{4.3.3}$$

がなりたつ，というのである．この確率は N とともに指数関数的に減少する．

第２回レポート問題：

A さん夫妻には二人の子供がいることがわかっている．また，子供は双子ではない．簡単のため,

- 男の子と女の子が生まれる確率は等しい
- 子供が生まれる確率は曜日，時間帯にはよらず常に一定である

と仮定して，以下の問に答えよ．

(1) 二人の子供のうち，少なくとも一人は女の子だという．このとき，もう一人の子も女の子である確率はいくらか？

(2) 二人の子供のうち，少なくとも一人は「日曜に生まれた女の子」だという．このとき，もう一人の子も女の子である確率はいくらか？

レポート提出について：

締め切りは 2010 年 12 月 17 日（金）の 16:00 ,

提出場所は数理事務室のポスト

とします．なお，問題の番外編として，**今までの講義内容・講義形態についての感想，不満，文句，このように改善すべしとの意見**なども書いてくださると助かります．

この問題もかなり有名ですが，まあ，自分で考えてみて下さい.「生まれた曜日」という，どう考えても関係なさそうな条件が確率に関係するのかどうか...

第 3 回レポート問題：

ランダムウォークがどこまで進むかわからないのと，冬休みがあるので，少し骨のある問題にしました（問 2）．ただ，問 2 はかなり難しく，できる人がかなり少ないと思われるので，問 1 を加えました．

レポート提出について：

締め切りは 2011 年 1 月 11 日（火）の 10:30，
提出場所はこの教室（講義開始前に集めます）

とします．なお，問題の番外編として，**今までの講義内容・講義形態についての感想，不満，文句，このように改善すべしとの意見**なども書いてくださると助かります．

問 1． A 君は空手の昇段試験に挑戦することにした．この昇段試験は「続けて 2 回 勝てば合格」と言うルールで行われるが，(通常とは異なり），以下のように変な規則がある．

- A 君の相手は B, C の二人と決まっていて，A 君は合計 3 回，試合をすることができる
- ただし，その試合順は BCB （まず B と戦い，次に C と戦い，最後にまた B と戦う）か，CBC （まず C と戦い，次に B と戦い，最後にまた C と戦う）のどちらかしか選べない．

さて，対戦相手 B は A 君よりかなり弱いが，逆に C は A 君よりも非常に強い有段者である．この場合,「続けて 2 回勝てば合格」の確率を少しでも上げるためには，A 君は BCB または CBC のどちらを選ぶべきであろうか？

> 実際に試合をすると疲れたり，負けたことで落ち込んだり，逆に勝って勢いに乗ったりなどする．でもここは簡単のため，どの順で戦っても A 君が B 君に勝つ確率はいつでも p，A 君が C 君に勝つ確率はいつでも q として良い（$1 \approx p > q \approx 0$）．C 君がいる限り，どっちにしろ A 君の昇段は望み薄だが，少しでも昇段の確率を大きくするにはどうすべきか，と言う問題．

（問 2 は裏に）

問２． （警告：この問題は面白いが，非常に難しいと思う．できなくてもあまり気にする必要はないが，頭の体操だと思って考えてくれるとうれしい.）

数字が一つだけ書いてあるカードが N 枚ある．N 個の数字は全て異なることはわかっている（例：1 から N）が，どのような順番に並んでいるかはわからない．また，数字がどの範囲であるかもわからない.（1 から N かもしれないし，$-1000, -100, -1, 0, 2, 5, \ldots, 2000$ などとなっているかもしれない.）この N 枚のカードで，以下のゲームを行う．

1. ゲームの目的は，N 枚のカードの内，最大の数字の書いてある物 を選ぶことである．
2. しかし，君は N 枚のカードを一度に見るわけにはいかない.（見ることができるなら苦労はせん.）また，しつこいけど，最大の数字が何かは知らない（知ってたら苦労せんわな.）
3. 君に許されるのは，まず，１枚目のカードの数字を見て，ここでやめるか否かを決めることである．
   - ここでやめれば１枚目を選んだことになる．
   - やめない場合は１枚目は捨てることになり，２枚目以降に進む．
4. ２枚目に進んだ場合，また２枚目の数字をみて，ここでやめるか（２枚目を選ぶ），３枚目以降に進むか（２枚目も捨てたので３枚目以降から選ぶ）を決める．
5. 以下，同様に続けて君の納得するところでやめ，そのときのカードを選ぶ．
6. この場合，例えば４枚までカードをめくってみた段階で「やっぱり２枚目のを選びたい」と思っても，後戻りはできない．２枚目のカードは既に選ばなかったのだから，ここは４枚目以降のカードから選ぶしかない．

（以上でゲームの説明終わり）（次に「最大のカード」を選ぶ作戦について）

さて，闇雲に一枚のカードを選べば，N 枚のカードから最大のものをたまたま選ぶ確率は $1/N$ である．この確率を $1/N$ より大きくするため，以下のような作戦を考えた．

> カードを初めから s 枚めくってみて，その中の最大数を記録する（この最大数を $\max(s)$ と書く）．この s 枚は捨て石にして，$s+1$ 枚目以降を順にめくり，$\max(s)$ より大きい数が初めて出たカードを選ぶ.（最後まで $\max(s)$ より大きい数が出なければ，最後のカードを選ぶ.）

（これで作戦の説明も終わり）

（いよいよ問題です.）上の作戦を実行するとき，一番効率の良い —— つまり,「最大のカードを選ぶ確率」が最大になるような —— s の選び方（もちろん，s は N の関数としてうまく選ぶ）はなんだろう？（この効率の良い s を s_N と書く.）また，そのように効率よく $s = s_N$ を選んだとき，最大のカードを選べる確率 P_N はどのくらいだろうか？

（注意）s_N や P_N を有限な N に対して奇麗なコンパクトな表式で書くのはなかなか難しいと思われる．ので，N が無限大に行く極限での

- **比 $\dfrac{s_n}{n}$ の値と**
- **極限 $P_n(s_n)$ の値**

を求めれば十分である

> この問も非常に有名なものであるが，その名前はここでは伏せておこう．人生には色々な決断を迫られる局面があるが，大抵の場合,「これからもっと良くなるのか悪くなるのか」がわからない場面で決断しなければならない．そのような場合の一つのモデル化がこの問題である．

5 ランダムウォーク

この節では物理などでも重要な，ランダムウォークについて考えていく．

5.1 背景説明

ランダムウォークは色々なところに顔を出す．

- 講義の一番初めにも言った，「酔っぱらいのおっさん」の問題．酔っぱらってフラフラ歩いていたら，そのうちに自分の家にたどり着けるか？
- ブラウン運動．（例えば）タバコの煙が空気の分子にぶつかられてフラフラ動く運動．
- 気体中の拡散の問題．部屋の隅に置いた香水の香りが部屋の中程まで伝わるのにはどのくらいの時間がかかる？
- 株価の動き．

これらの運動に共通するのは，粒子（や人や株の値）が，周りから色々な力を受け，あっちこっちへ移動することである．その結果として，これらの運動には共通の性質がみられるが，これはまた，空間の性質に敏感に依存する．

この節ではこのような性質を調べることを目的とする．

5.2 １次元のランダムウォーク

まず，一次元で粒子が動く場合を考えよう．株価の変動などが例になる．

粒子の動く場所としては，一次元の x-軸の上で，粒子は座標が整数の点のみを移動するものとする．粒子は原点（$x = 0$）から出発し，確率的に左右に移動していく．その移動のルールは，今までの履歴には全く関係なく $(0 \le p \le 1)$

確率 p で左へ一歩，確率 $(1-p)$ で右へ一歩

動くものとする．問題は n 歩経ったときにどこにいるか，とか， n 歩までにどのような点を通ってきているか，などである．

さて，以上の問題はもう少し抽象的に以下のようにも定式化できる．まず，確率変数 X_i （$i = 1, 2, ...$）を

$$X_i = \begin{cases} -1 & (\text{確率 } p \text{ で}) \\ 1 & (\text{確率 } 1-p \text{ で}) \end{cases} \tag{5.2.1}$$

となるように定義し，$\{X_i\}$ は互いに独立であるとする．そして

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{5.2.2}$$

と定義すると，この S_n が n 歩たったときにどこにいるかを表す数になる．

まず，n 歩経ったときに x にいる確率を $P_n(x)$ と書いて，この $P_n(x)$ を求めることにしよう．これは簡単に計算できる（今まで何回かやった２項分布）．実際，n 歩で x にいると言うことは，これまでに

左へ $(n-x)/2$ 歩，右へ $(n+x)/2$ 歩

動いていると言うことだ．右へ動く確率が $(1-p)$，左へ動く確率が p だから，このように動く確率は

$$P_n(x) = \binom{n}{\frac{n+x}{2}} p^{(n-x)/2} (1-p)^{(n+x)/2} \tag{5.2.3}$$

と計算できる．上で $P_n(x)$ がゼロにならない x の値は，（１） $x-n$ が偶数で，かつ（２） $|x| \le n$ であることは容易にわかる．

この $P_n(x)$ は n が大きくなると正規分布に近づく（中心極限定理）．実は今考えている S_n は中心極限定理の時に出てきたものと同じだから，それを思い出すと，確率変数

$$Z_n := \frac{1}{\sqrt{4pqn}}\Big[S_n - n(1-2p)\Big] \tag{5.2.4}$$

が

$$\lim_{n\to\infty} P\big[a \le Z_n \le b\big] = \int_a^b \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dz \tag{5.2.5}$$

をみたすことになる．ここで $q := 1-p$ であり，また $(1-2p)$ と $4pq$ はそれぞれ X_i の平均と分散である．

これからすぐにわかること：

- n 歩後の位置は中心が $n(1-2p)$，拡がりが大体 $\sqrt{4pqn}$ になっている．
- $p \neq \frac{1}{2}$ では，中心は右か左にどんどん移動していき，その位置は n に比例している．つまり，中心の移動速度は一定（$1-2p$）である．
- 一方，位置の拡がりは大体 $\sqrt{n}$ のオーダーである．だから，$p \neq \frac{1}{2}$ ではこの拡がりは位置が移動した距離（オーダー n）に比べて非常に小さい．つまり，$n \gg 1$ では粒子は $n(1-2p)$ の周りに集中しているように見える．
- $p = \frac{1}{2}$ では話は別で，このときだけ，中心が動かない．位置の拡がりは $\sqrt{n}$ で，今までと本質的な差はないが，何分，中心が動かないので，この「位置の拡がり」が主役を演じる．

こんな訳で，$p = \frac{1}{2}$ が一番面白いから，以下，$p = \frac{1}{2}$ に話を限る

さて，ランダムウォークの「再帰性」について考えよう．ランダムウォークはフラフラ動いている訳なので，色々なところへ行く．あるサンプルをとれば出発点に何回も戻ってくるだろうし，別のサンプルでは戻ってこないだろう．それで

無限の（十分大きい）時間待ってやったら，どんなサンプルでも出発点に戻ってくるか

と言う問題を考えたい．上の答が YES, つまり無限時間待ったら原点に絶対戻ってくるとき，ランダムウォークは「再帰的」（recurrent）と言う．一方，無限時間待っても戻ってこない確率がゼロでない時，ランダムウォークは「推移的」（transient）と言う．

（注意）上で $P_n(x)$ を求めたから，$P_n(0)$ もわかっている．けども，この $P_n(0)$ だけでは上の問には答えられない．と言うのは，$P_n(0)$ は「n 歩後にたまたま原点に戻っている確率」であって，これまでに何回でも原点に戻っているものも数えてしまっているから．そこで，$P_n(x)$ とその仲間を以下のように定義する：

- $P_n(x)$ とは「原点から出発したランダムウォークが時刻 n に x にいる確率」．
- $F_n(x)$ とは「原点から出発したランダムウォークが時刻 n で初めて x に到達する確率」．
  ただし，$x = 0$ の場合は $F_n(0)$ を「ランダムウォークが時刻 n で初めて原点に戻ってくる確率」とする（$n \ge 2$）．また，$F_0(0) = 0$ と決めておく．
- $G(x) := \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$
- $r(x) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)$．言葉では「ランダムウォークがいつかは x に到達する確率．

我々の考えたい確率は $r(x)$ であり，これは $F_n(x)$ の和で書けている．そこで $F_n(x)$ を求めたいのだが，これは良くわからない．一方，$P_n(x)$ については既に求めてある — (5.2.3) 参照．そこで F_n と P_n の関係をつけよう．

このためには以下のように考える．$P_n(x)$ にはいろんなランダムウォークが寄与している．あるものは n 歩目で<u>初めて</u> x に来た．あるものは x に来るのは n 歩目で <u>2 回目</u> だ．あるものは <u>3 回目</u> だ... 式では

$$P_n(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} P[\text{時刻 } n \text{ には } x \text{ にいるが，これは } x \text{ へは } \ell \text{ 回目の訪問である}] \tag{5.2.6}$$

と書いて良かろう．

この内，$\ell=1$ のは「x に来るのはこの n 歩目が初めてだ」と言うことだから，これは定義から $F_n(x)$ そのものである．

そこで，これから x に 2 回以上来るもの（$\ell \geq 2$）をまとめて考える．この場合，n 歩目の前に少なくとも一回は x に来ている訳なので，そのときの時刻を k と書くと，

$$\begin{aligned}&\sum_{\ell=2}^{\infty} P[\text{時刻 } n \text{ には } x \text{ にいるが，これは } x \text{ へは } \ell \text{ 回目の訪問である}]\\&= P[\text{時刻 } n \text{ には } x \text{ にいるが，以前にも } x \text{ に来たことがある}]\\&= \sum_{0<k<n} P[\text{時刻 } n \text{ には } x \text{ にいるが，時刻 } k \text{ に初めて } x \text{ に来た}]\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

と書ける．ところが,「時刻 n には x にいるが，時刻 k に初めて x に来た」というランダムウォークを，時刻 k で 2 つに分けて書くと，時刻 k までの部分は $F_k(x)$ への寄与であるし，k 以降の部分は $P_{n-k}(0)$ への寄与と考えられる．（ここで k 以降の部分は x から出発して $n-k$ 歩で x へ戻る確率なので，一見 $P_{n-k}(0)$ とは異なる — $P_{n-k}(0)$ は 0 から出発して 0 へ戻る．しかし，今のランダムウォークは平行移動不変性があって，出発点と終点が同じならどこから出発しても同じだから問題の確率は $P_{n-k}(0)$ に等しい．）以上から上の確率は

$$= \sum_{0<k<n} F_k(x)\, P_{n-k}(0) \tag{5.2.8}$$

となる．

以上から (5.2.6) は

$$P_n(x) = F_n(x) + \sum_{k:0<k<n} F_k(x)\, P_{n-k}(0) = \sum_{k:0<k\leq n} F_k(x)\, P_{n-k}(0) \tag{5.2.9}$$

と書くことができる（第 2 の等号は，$P_0(0)=1$ である事から出る）．この両辺を $n \geq 1$ について和をとると

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k:0<k\leq n} F_k(x)\, P_{n-k}(0) = \sum_{k:k>0} \sum_{n=k}^{\infty} F_k(x)\, P_{n-k}(0) = \Bigl(\sum_{k:k>0} F_k(x)\Bigr)\Bigl(\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(0)\Bigr) \tag{5.2.10}$$

従って

$$r(x) = \sum_{k:k>0} F_k(x) = \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)}{\displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(0)} = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) - \delta_{0,x}}{\displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(0)} \tag{5.2.11}$$

と書ける．最後のところは分子の和を $n=0$ からにする代わりに $n=0$ の寄与 1 をひいておいた．（ここで $\delta_{0,x}$ とは，$x=0$ の時のみ 1，他は 0 の値をとるもの．）

以上で長い準備が終わった．$r(x)=1$ か否かを見るには，(5.2.11) の分母子を計算すればよい．まず $P_n(0)$ は n が偶数の時のみゼロではなくて，Stirling の公式を用いると，

$$P_{2m}(0) = \binom{2m}{m}\Bigl(\frac{1}{2}\Bigr)^{2m} = \frac{(2m)!}{m!\,m!}\frac{1}{4^m} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\, m}} \tag{5.2.12}$$

である事がわかり，

$$\sum_{n=0}^{2N} P_n(0) \approx 1 + \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{\pi\, m}} \approx 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{N} \tag{5.2.13}$$

となって，$N \to \infty$ では発散することがわかる．これと (5.2.11) から直ちに，

$$r(0) = 1 - \frac{1}{\displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(0)} = 1 - \frac{1}{\infty} = 1 \tag{5.2.14}$$

が得られる．すなわち，**１次元ランダムウォークは再帰的**である．

これ以降は鋭意，執筆中です．2010 年 12 月 7 日．

5.3 特別付録： $x \neq 0$ についての $r(x)$

以下の議論は，相当に細かいし，少し技術的なので，あくまで「おまけ」である．興味のある人は読んでくださ れ.（この節の内容は講義では触れない予定）．

上では $r(0)$ （いつかは原点に戻ってくる確率）を計算したが，$r(x)$ （ゼロでない点 x に戻ってくる確率）はまだだった．そこで，$x \neq 0$ に対して $r(x)$ も求めておこう．

(5.2.11) を用いたいが，分母子共に発散するので，注意が必要である．そこで (5.2.9) から (5.2.10) 辺りまで戻る．N を大きな数として，$1 \leq n \leq N$ なる n について (5.2.9) の両辺の和をとってみると，

$$\sum_{n=1}^{N} P_n(x) = \sum_{k=1}^{N} F_k(x) \sum_{\ell=0}^{N-k} P_\ell(0) \tag{5.3.1}$$

となる．このままでは右辺の和が別れないので，強引に以下のように変形する．まず，右辺の k の和を $1 \leq k \leq N/2$ に制限すると和の項が少なくなるので右辺の値は下がる：

$$\sum_{n=1}^{N} P_n(x) \geq \sum_{k=1}^{N/2} F_k(x) \sum_{\ell=0}^{N-k} P_\ell(0) \tag{5.3.2}$$

更に，この範囲の k に対しては $N-k \geq N/2$ なので，ℓ の和も $1\ell \leq N/2$ に制限すると，更に値は下がる：

$$\geq \sum_{k=1}^{N/2} F_k(x) \sum_{\ell=0}^{N/2} P_\ell(0) = \Bigl(\sum_{k=1}^{N/2} F_k(x)\Bigr) \Bigl(\sum_{\ell=0}^{N/2} P_\ell(0)\Bigr) \tag{5.3.3}$$

従って，

$$\sum_{k=1}^{N/2} F_k(x) \leq \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} P_n(x)}{\displaystyle\sum_{\ell=0}^{N/2} P_\ell(0)} \tag{5.3.4}$$

が得られた．

逆側の不等式を作るには，まず，(5.3.1) の ℓ の和を $0 \leq \ell \leq N$ まで拡げる．すると，和の数が多くなるから，右辺の方が大きくなる：

$$\sum_{n=1}^{N} P_n(x) \leq \sum_{k=1}^{N} F_k(x) \sum_{\ell=0}^{N} P_\ell(0) = \Bigl(\sum_{k=1}^{N} F_k(x)\Bigr) \Bigl(\sum_{\ell=0}^{N} P_\ell(0)\Bigr) \tag{5.3.5}$$

すなわち，

$$\sum_{k=1}^{N} F_k(x) \geq \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} P_n(x)}{\displaystyle\sum_{\ell=0}^{N} P_\ell(0)} \tag{5.3.6}$$

も，得られた．

この節の中間報告：$r(x)$ については

$$\frac{\sum_{n=1}^{N} P_n(x)}{\sum_{\ell=0}^{N} P_\ell(0)} \le \sum_{k=1}^{N} F_k(x) \le \frac{\sum_{n=1}^{2N} P_n(x)}{\sum_{\ell=0}^{N} P_\ell(0)} \tag{5.3.7}$$

が成り立つ．

後は (5.3.7) のそれぞれの分母子を計算すればよい．$\sum_{\ell=0}^{N} P_\ell(0)$ については (5.2.13) で計算してある．$P_n(x)$ については，まず $x = 2y$ が偶数の時から考える（ついでに $x > 0$ としておこう）．この場合，n も偶数でないと $P_n(x) = 0$ になってしまうので，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2N} P_n(2y) &= \sum_{m=y}^{N} P_{2m}(2y) = \sum_{m=y}^{N} \frac{1}{4^m}\binom{2m}{m-y} = \sum_{m=y}^{N} \frac{1}{4^m}\frac{(2m)!}{(m-y)!\,(m+y)!} \\ &= \sum_{m\approx y}^{N} \frac{1}{\sqrt{\pi m}}\Bigl(1-\frac{y}{m}\Bigr)^{-(m-y+1/2)}\Bigl(1+\frac{y}{m}\Bigr)^{-(m+y+1/2)} \\ &= \sum_{m\approx y}^{N} \frac{1}{\sqrt{\pi m}}\Bigl(1-\frac{y^2}{m^2}\Bigr)^{-(m+1/2)}\Bigl(1-\frac{y}{m}\Bigr)^{y}\Bigl(1+\frac{y}{m}\Bigr)^{-y}\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

和は $m = y$ からとるべきだが，実際に (5.3.7) で重要になるのはこの和の $N \to \infty$ での発散の仕方である．これは m が大きいところだけで決まるから，上で y/m が小さいものとして展開すると，

$$\approx \sum_{m\approx y}^{N} \frac{1}{\sqrt{\pi m}}\Bigl(1-\frac{y^2}{m}+\dots\Bigr) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{N} - (\text{定数}) \tag{5.3.9}$$

となる（最後のは $N \to \infty$ で正しい）．これを (5.3.7) に入れると，どちらの分母子も全く同じ速さ $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{N}$ で発散することがわかる．すなわち，

$$r(x) = \sum_{k>0} F_k(x) = 1 \tag{5.3.10}$$

となり，この場合も（長い間待っておれば）そのうちに x を訪問することがわかる．

x が奇数の時も本質的に同じ計算なので省略する．結果は同じで (5.3.10) が成り立ち，やはりいずれは x を訪問することがわかる．

$x = 0$ の時も本当は上のような議論をして，$N \to \infty$ の極限を考えるべきであるが，話をややこしくしないために講義では触れなかった．

以上の結論：一次元ランダムウォークは十分に長い時間経てば必ず（確率 1 で），出発点に戻ってくる．また，十分に長い時間経てば必ず（確率 1 で），どの点（$x \in \mathbb{Z}$）にでも到達する．

5.4　２次元のランダムウォーク

5.4.1　定義

では，２次元のランダムウォークを考えよう．今度は２次元平面で，座標の値が整数値である点を考える．これを $\mathbb{Z}^2$ と書くことにする：

$$\mathbb{Z}^2 = \{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{Z}\} \tag{5.4.1}$$

$+x$ 方向を東，$-x$ 方向を西，$+y$ 方向を北，$-y$ 方向を南と呼ぶ．

さて，この $\mathbb{Z}^2$ 上で粒子が動くことを考える．その規則は

- 粒子はやはり原点 $(0,0)$ から出発する．
- 粒子は整数時刻毎に今いるところから隣の点へうごく．
- 隣への跳び方は，東西南北のいずれにでも，それぞれ確率 $\frac{1}{4}$ で跳ぶ．
- 跳び方は粒子の過去の履歴には全くよらない（今までいたところを避けようとしたり，逆に今までいたところに移行としたり，はない）．

と言うものである．1 次元ランダムウォークの $p = 1/2$ の場合には左右へ同確率で跳んだが，この 2 次元では，東西南北へ同確率（1/4）で跳ぶのである．この意味で 1 次元ランダムウォークの自然な拡張になっている．

1 次元の時と同じく，少し抽象的な定式化をしておこう．2 次元ベクトルである確率変数（確率ベクトル）$\vec{X}_i$ で以下のように値をとるものを導入する．

$$\vec{X}_i = \begin{cases} (1,0) & (\text{確率}\,1/4\,\text{で}) \\ (-1,0) & (\text{確率}\,1/4\,\text{で}) \\ (0,1) & (\text{確率}\,1/4\,\text{で}) \\ (0,-1) & (\text{確率}\,1/4\,\text{で}) \end{cases} \tag{5.4.2}$$

すると，今度は

$$\vec{S}_n := \sum_{i=1}^{n} \vec{X}_i \tag{5.4.3}$$

が時刻 n での粒子の位置を表す．

5.4.2 大体の振る舞い

少し今までやった「中心極限定理」の範囲を超えるが，ともかく以下のように考えてみる．時刻 n でどのくらい原点から離れているか，見てみたい．そのためにまず，$\vec{S}_n$ の期待値と「分散」を考える．期待値は

$$\left\langle \vec{S}_n \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \vec{X}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \vec{X}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \vec{0} = \vec{0} \tag{5.4.4}$$

上のはベクトルの**各成分毎に期待値をとっている**ことに注意（講義で説明）．

「分散」に相当するものとしては，原点からの距離の二乗 $|\vec{S}_n|^2$ の期待値を考えるのが自然である．これは期待値の線形性から

$$\left\langle |\vec{S}_n|^2 \right\rangle = \left\langle \vec{S}_n \cdot \vec{S}_n \right\rangle = \left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{X}_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \vec{X}_j\right) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \vec{X}_i \cdot \vec{X}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left\langle \vec{X}_i \cdot \vec{X}_j \right\rangle \tag{5.4.5}$$

となる．ところが，

$$\left\langle \vec{X}_i \cdot \vec{X}_j \right\rangle = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{5.4.6}$$

となることがわかる（講義で説明）．従って，

$$\left\langle |\vec{S}_n|^2 \right\rangle = n \tag{5.4.7}$$

となる．

以上の解釈：粒子の分布の中心は原点 $(0,0)$ である．その周りの粒子の拡がりは大体 $\sqrt{\left\langle |\vec{S}_n|^2 \right\rangle} = \sqrt{n}$ ぐらいである．

以上を見る限り，1 次元のランダムウォーク（の $p = 1/2$ の場合）と定性的に同じ振る舞いをしているように見える．

5.4.3 $P_n(x,y)$ の計算

更に，時刻 n で (x,y) にいる確率を $P_n(x,y)$ と書いて，これを求めよう．今度は 1 次元に比べてちと厄介である．上下左右に n 歩動いた結果として (x,y) にいると言うことは，それぞれの方向にどれくらい動いたことになるだろうか？

東に n_e 歩，西に n_w 歩，北に n_n 歩，南に n_s 歩

だけ動いているとすると（e, w, n, s はそれぞれ，east, west, north, south の略），n 歩目での位置は，

$$x = n_e - n_w, \qquad y = n_n - n_s \tag{5.4.8}$$

となっているハズである．また，全体で n 歩なのだから，

$$n_e + n_w + n_n + n_s = n \tag{5.4.9}$$

の関係がある．この 3 条件をみたす n_e, n_w, n_n, n_s なら何でも良い．

さて，このような n_e, n_w, n_n, n_s 歩で n 歩を行くやり方は何通りあるかと言うと，全体で n の時刻（ステップ）の中から n_e 個の「東へ行くステップ」，n_w 個の「西へ行くステップ」，等々をとるやり方だけある．これは

$$\binom{n}{n_e} \times \binom{n-n_r}{n_w} \times \binom{n-n_e-n_w}{n_n} \times \binom{n-n_e-n_w-n_n}{n_s} = \binom{n}{n_e\ n_w\ n_n\ n_s} \tag{5.4.10}$$

通りある（最後の量は「多項係数」）．それぞれの行き方の確率はいつも $(\frac{1}{4})^n$ であるから，最終的に，

$$P_n(x,y) = {\sum_{n_e,n_w,n_n,n_s}}' \frac{1}{4^n} \binom{n}{n_e\ n_w\ n_n\ n_s} \tag{5.4.11}$$

となる．ただし，上の和は (5.4.8) と (5.4.9) の条件を満たすような n_e, n_w, n_n, n_s についてとる．(このように条件が付いていることを明示するため，和の記号にプライムを付けた．)

一つ，具体例をやってみよう．時刻 n で原点にいる確率 $P_n(0,0)$ を考える．$P_n(0,0)$ がゼロにならないためには n は偶数である必要がある．更に，(5.4.8)，(5.4.9) の条件は（$n = 2m$ と書く）

$$n_e = n_w, \qquad n_n = n_s, \qquad n_e + n_n = \frac{n}{2} = m \tag{5.4.12}$$

と言うことになる．よって，(5.4.11) より

$$P_{2m}(0,0) = \sum_{n_e+n_n=m} \frac{1}{4^{2m}} \binom{n}{n_e\ n_e\ n_n\ n_n} = \frac{1}{4^{2m}} \sum_{\ell=0}^{m} \frac{(2m)!}{(\ell!)^2\,((m-\ell)!)^2} \tag{5.4.13}$$

となっている（最後のところでは n_e を ℓ と書き，多項係数を具体的に書き下した）．

5.4.4 再帰性と推移性

2 次元のランダムウォークが再帰的かどうかも，1 次元の時と同様に判定できる．1 次元の時に倣って，

- $P_n(x,y)$ とは「原点から出発したランダムウォークが時刻 n に (x,y) にいる確率」．
- $F_n(x,y)$ とは「原点から出発したランダムウォークが時刻 n で初めて (x,y) に到達する確率」．
  ただし，$x = y = 0$ の場合は $F_n(0,0)$ を「ランダムウォークが時刻 n で初めて原点に戻ってくる確率」とする（$n \geq 2$）．また，$F_0(0,0) = 0$ と決めておく．
- $G(x,y) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x,y)$
- $r(x,y) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x,y)$．言葉では「ランダムウォークがいつかは (x,y) に到達する確率．

を導入すると，(5.3.7) がそのまま成り立つ：

$$\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} P_n(\vec{x})}{\displaystyle\sum_{\ell=0}^{N} P_\ell(\vec{0})} \le \sum_{k=1}^{N} F_k(\vec{x}) \le \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{2N} P_n(\vec{x})}{\displaystyle\sum_{\ell=0}^{N} P_\ell(\vec{0})} \tag{5.4.14}$$

従って，ここに出てくる分母子を計算すればよい．一般の $\vec{x}$ は大変なので，$\vec{x}=\vec{0}$ （原点に戻ってくるかどうか）を考えよう．

ちょっとずるいけども，以下の公式：

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \tag{5.4.15}$$

を使うのが一番簡単である．この公式自身は，

$$(1+t)^n \times (1+t)^n = (1+t)^{2n} \tag{5.4.16}$$

の両辺を展開して t^n の係数を比較すると証明できる．ともかく (5.4.13) に (5.4.15) を用いると，

$$P_{2m}(0,0) = \frac{1}{4^{2m}} \sum_{\ell=0}^{m} \frac{(2m)!}{(m!)^2} \times \frac{(m!)^2}{(\ell!)^2\,((m-\ell)!)^2} = \frac{1}{4^{2m}} \binom{2m}{m} \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell}^2 = \frac{1}{4^{2m}} \binom{2m}{m}^2 = \left[\frac{1}{4^m}\binom{2m}{m}\right]^2 \tag{5.4.17}$$

となるので，更に Stirling の公式を用いて — 右辺に出ている量は (5.2.12) の２乗であることに注意

$$\approx \frac{1}{\pi\, m} \tag{5.4.18}$$

となる．そこで

$$\sum_{m=1}^{N} P_{2m}(0,0) \approx \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} \approx \frac{1}{\pi} \log N \tag{5.4.19}$$

が得られるので，$N \gg 1$ では (5.4.14) から

$$\sum_{k=1}^{N} F_{2k}(0,0) \approx 1 - \frac{1}{\displaystyle\sum_{m=1}^{N} P_{2m}(0,0)} \approx 1 - \frac{\pi}{\log N} \tag{5.4.20}$$

ぐらいであることがわかる．(5.4.14) には N だけでなく $2N$ も入っているが，$\log(2N) = \log N + \log 2$ であることなどを考えると，大まかな振る舞いは (5.4.20) で良い．

と言うわけで，２次元でも

$$r(0,0) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k}(0,0) = 1 \tag{5.4.21}$$

であり，ランダムウォークは再帰的であることがわかった．

5.4.5 戻ってくるための歩数

ついでに，(確実に）原点に戻ってくるためにはどのくらいの歩数が必要か，考えておこう．ランダムウォークには色々なものがあるから，あるものは短い歩数で戻ってくるし，あるものはなかなか戻ってこない.「無限時間まで待てば確実に戻ってくる」と言うのが上の結論だが，無限時間も待たない場合，何パーセントくらいのランダムウォークが戻ってきていないだろうか，と言うことを考えたい．

この問に対する答は１次元と２次元でかなり異なる．１次元の場合は (5.4.20) に相当する計算を行うと，

$$\sum_{k=1}^{N} F_{2k}(0) \approx 1 - \frac{1}{\displaystyle\sum_{m=1}^{N} P_{2m}(0)} \approx 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{N}} \tag{5.4.22}$$

となっている（ちょっと N と $2N$ をごまかしたが...）．これから時刻 N では全体の $\dfrac{1}{\sqrt{N}}$ くらいの割合のランダムウォークが原点に返って来ていない，と結論できる．２次元では (5.4.20) であるから，時刻 N で帰ってきていないのは $\dfrac{\pi}{\log N}$ である．

勿論，１次元でも２次元でも，帰ってきていないウォークの割合は，$N \to \infty$ ではゼロになる．ただ，ここで見たように，ゼロになるなり方は２次元では非常に遅い．$N = 10^8$ の時，１次元ではたったの 0.01% だけが帰ってきていないのに対し，２次元では 17% くらいも帰ってきていないのだ．$N = 10^{32}$ まで待っても，２次元では 4% も帰っていない．

上では原点に戻ってくることを考えたが，一般の点 (x, y) にたどり着く確率も同様の振る舞いをする．つまり，無限時間待てば，任意の点 (x, y) に必ずたどり着く．ただし，たどり着くまでの時間は２次元では非常にかかる．

（と言うことは酔っぱらいのおっさんは家にたどり着く前に餓死している公算が高い...）

5.5 ３次元のランダムウォーク

今までの拡張として３次元のランダムウォークを考える．今度は確率 $\frac{1}{6}$ で「東西南北上下」の６方向にランダムに動く．これは煙の粒子のブラウン運動などのモデル化である．

大まかな振る舞いは１次元，２次元と同じである．時刻 n での位置 $\vec{S}_n$ の期待値はゼロ，また原点からの距離は大体 $\sqrt{n}$，つまり (5.4.4)，(5.4.7) が成り立つ．この観点からは次元による差異は認められない．

大きな差が出るのは再帰性に関してである．２次元でもなかなか帰って来なかったんだから３次元ならもっと帰ってこないことは予想できる.（１次元では２方向ある内の一つを選べば帰れるが，２次元では４方向の内の１つを選ばないといけない．３次元では６方向中の１方向で，いよいよ大変.）

この問題はやはり，(5.3.7) や (5.4.14) に相当する式を計算することによって解決される．特に問題になるのは今までと同じく，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P_n(\vec{0})$ が有限か否か，である．この計算は余りに大変なので省略し，結果だけを述べると，

> ３次元では（更に４次元以上でも），$\displaystyle\sum_{n} P_n(\vec{0})$ は有限である．従って，ランダムウォークは推移的で，いくら待っても原点に戻ってこないものがたくさん存在する．

いろんな次元における $r(\vec{0})$（いつかは原点に戻ってくる確率）の値を表にしておこう．

d	3	4	5	6	7	8	9	10
r	0.3405373	0.1932017	0.1351786	0.1047155	0.0858449	0.0729126	0.0634477	0.0561975

次元が大きくなるほど帰って来にくい．例えば，仮想的に１０次元（！）の空間を考えると，いくら待っても 5.6% しか帰ってこない事がわかる．

（注）この講義ではあまり難しいテクを使わず，地道に計算したため，この３次元くらいになると「お手上げ」の観がある．これについては，次節で．

ここに２次元 RW の例を載せる予定だったのですが，ソフトの相性が悪いのか，うまく行きません．とりあえず，2/7 バージョンは図無しで公開します．

5.6 フーリエ（級数）変換

さて，上のやり方では，再帰的かどうかの判定がかなり大変である．要するに $\sum_n P_n(\vec{0})$ さえ求めれば良いのではあるが，この計算が大変．そこで，この節と次の節では，もっと一般にこれを求める方法を述べる．この方法は「解析 II」でもっと詳しく習うであろうから，ここでは必要最小限だけを述べる．

まず，$\mathbb{Z}$ 上の関数 f を考える．$x \in \mathbb{Z}$ での値は $f(x)$ とかく．これは関数とは言っても，整数の x でののみ定義されているから，数列だと思った方が良いかもしれない．議論を厳密にするために，

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}} |f(x)| < \infty \tag{5.6.1}$$

を仮定しておく．

さてともかく，この $f(x)$ に対して，天下りではあるが，以下の量を考える：

$$\hat{f}(k) := \sum_{x\in\mathbb{Z}} f(x)\, e^{-ikx} \tag{5.6.2}$$

ここで，i は虚数単位，また，$k \in [-\pi, \pi)$ は実数である．(5.6.1) により，この和はちゃんと定義されているが，面白いことは，$\hat{f}(k)$ を知れば，これから元の $f(x)$ が再現できることである：

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx} \hat{f}(k) \tag{5.6.3}$$

実際，計算してみると

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx} \hat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx} \sum_{y\in\mathbb{Z}} f(y)\, e^{-iky} \\
&= \sum_{y\in\mathbb{Z}} f(y) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\, e^{-iky} = \sum_{y\in\mathbb{Z}} f(y) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ik(x-y)} \\
&= \sum_{y\in\mathbb{Z}} f(y)\, \delta_{x,y} = f(x)
\end{aligned} \tag{5.6.4}$$

となっている．上で勝手に積分と和の順序を交換したが，これは仮定 (5.6.1) の絶対収束条件（$+\,\alpha$）によって保証されるものである（詳細は「解析 II」の講義で説明されるはず）．

f から $\hat{f}$ を作ることをフーリエ変換，$\hat{f}$ から f を作ることをフーリエ逆変換という[5]．これは次節の例でもわかるように，非常に強力な解析の手段である[6]．

さて，以上の結果は多次元にも拡張できる．結果だけを書くと，$\mathbb{Z}^d$ 上の関数 f が条件

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} |f(x)| < \infty \tag{5.6.5}$$

を満たしているとき，

$$\hat{f}(k) := \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} e^{-ik\cdot x} f(x) \qquad \text{ここで} \qquad k \in [-\pi,\pi)^d,\ \ k\cdot x = \sum_{j=1}^{d} k_j x_j \tag{5.6.6}$$

を定義すると

$$f(x) = \int_{[-\pi,\pi)^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, e^{ik\cdot x} \hat{f}(k) \tag{5.6.7}$$

が成り立つのである．

---

[5]通常，フーリエ変換を考える場合には，閉区間上の関数（上の $\hat{f}$ に相当）を先に考え，これから上の f に相当する数列を作る．この方法をフーリエ級数変換といい，逆方向をフーリエ級数逆変換という．また，単にフーリエ変換というと，$\mathbb{R}$ 上の関数から $\mathbb{R}$ 上の関数への類似の変換を指す．しかし，我々の今の問題では出発点が数列の形の f であったため，f から $\hat{f}$ の方向を敢えて「順」方向の変換と呼んだ．また,「級数」変換か否かを区別することもこの段階では意味がないだろうと考えて，緩やかに「フーリエ変換」と呼んでいる．この辺りの詳しい話は「解析 II」を楽しみにしていて下さい

[6]そもそも，この手法を考えだしたフーリエは，拡散方程式という偏微分方程式を解きたいと思って試行錯誤しているうちにこの方法を見いだしたと言われている

5.7 一般の次元での再帰性の判定

では，前節の結果をもとにして，一般の次元 $\mathbb{Z}^d$ での再帰性を考えよう．そのために，$0 < p \le 1/(2d)$ なる実数 p に対して，

$$G_p(x) := \sum_n p^n P_n(x) \qquad x \in \mathbb{Z}^d \tag{5.7.1}$$

を定義しよう．ここで $P_n(x)$ とは 2 次元などの時も使ったけども，原点を出発したウォークが，n 歩めに x にいる確率である．n 歩のランダムウォークの数は $(2d)^n$ 以下であるから，上の和は少なくとも $0 < p < 1/(2d)$ ではちゃんと定義できている．

さて，この $G_p(x)$ については，講義の時に説明したように（今はここを詳細に説明する時間がないので略します．すみません）

$$G_p(x) = \delta_{0,x} + p \sum_{|y|=1} G_p(x-y) \tag{5.7.2}$$

の関係式が満たされる．そこで，この両辺に $e^{-ik\cdot x}$ をかけて x で和を取ると

$$\hat{G}_p(k) = 1 + 2dp\hat{D}(k)\,\hat{G}_p(k) \tag{5.7.3}$$

が得られる．ここで

$$\hat{G}_p(k) = \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} e^{-ik\cdot z} G_p(z), \qquad \hat{D}(k) = \frac{1}{2d}\sum_{|y|=1} e^{-ik\cdot y} = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} \cos k_j \tag{5.7.4}$$

である．これから直ちに

$$\hat{G}_p(k) = \frac{1}{1 - 2dp\hat{D}(k)} \tag{5.7.5}$$

が得られるので，これを逆変換して

$$G_p(x) = \int_{[-\pi,\pi)^d} \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\, e^{ik\cdot x} \hat{G}_p(k) = \int_{[-\pi,\pi)^d} \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\, e^{ik\cdot x} \frac{1}{1 - 2dp\hat{D}(k)} \tag{5.7.6}$$

がでる．ただし，p の範囲は $0 < p < 1/(2d)$ である．

さて，我々の欲しかったのは $\sum_n P_n(\vec{0}\,)$ であるが，これは上の左辺で $x = 0, p = 1/(2d)$ としたものに相当する．しかし，$x = 0$ の場合，右辺の被積分関数は正で，かつ p について単調増加．従って，

$$\sum_n P_n(\vec{0}\,) = G_{1/(2d)}(0) = \lim_{p\uparrow(2d)^{-1}} \int_{[-\pi,\pi)^d} \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{1 - 2dp\hat{D}(k)} \tag{5.7.7}$$

が成り立つ．これで欲しかった量の積分表示が得られた．(時間不足のため，すこし議論を粗くしてしまったが，上の議論は皆さんが今まで習ったことで完全に正当化できる．)

この積分は $p \uparrow (2d)^{-1}$ につれて，$k = 0$ のところが特異点になるから，そこでの積分が収束するか否かを考えれば良い．やってみると，$d > 2$ なら収束，$d \le 2$ なら発散，とわかる．再帰確率の表式を思い出すと，これから $d > 2$ では推移的，$d \le 2$ なら再帰的，ということがわかる．

Self-avoiding walk についてはまだ，執筆中ですが，Self-avoiding walk はレポートには関係ないから，今晩か明日（2/8）くらいまでの完成を目指しています．

第 4 回レポート問題：

ランダムウォークについての問題 2 つです．フラクタルなどを用いた問題を考えたのですが，ちょっと難しくなりすぎそうなので，諦めました．

レポート提出について：

締め切りは 2011 年 2 月 10 日（木）の 16:50，
提出場所は数理事務室内のレポート提出ポスト

とします．(元々2/11 を締め切りにしていましたが，この日は祝日で数理の建物に入れないので，提出してもらえません．申し訳ありません．)

問 1． (1 次元や 2 次元で, 再帰的でないランダムウォークを作る問題)
$\mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォークについて，その再帰確率の計算は講義で行った．そして「単純」ランダムウォークは，1 次元でも 2 次元でも再帰的であることを見た．

そこで，この問題では 1 次元で**再帰的にならない**ようなランダムウォークの例を作ってみよう．(1 次元より 2 次元の方がやりやすい側面もある．2 次元が良い人は 2 次元をやっても良い．)

(1) 具体的には，隣り合った点だけでなく，より遠距離に跳ぶようなランダムウォークを考える．そのランダムウォークの x から y への遷移確率を $p_{x,y} = f(y-x)$ として，f を適切に与えて，再帰的でないものを作るとよい．例えば，$f(x) = C|x|^{-\alpha}$ (C は規格化定数，α はこれから選ぶ定数) の形のものを考えるとどうなるか —— どのように α をとるべきか？ —— などと考えてみると良いだろう．ただし，ランダムウォークが対称になるように，$f(x) = f(-x)$ なる f の範囲で探すこと．(一般に対称でなければ再帰的でないので，対称でないウォークを考えると簡単すぎる．)

(2) 上で選んだ $f(x)$ が，実際に再帰的でないランダムウォークを与えることを証明せよ (厳密にやるのは少し難しいかも)．

問 2． $\mathbb{Z}^d$ 上の単純ランダムウォークは $d \geq 3$ では再帰的ではない，ことも講義でやった．つまり，再帰確率は 1 より小さい訳だが，これを単純ランダムウォークについて計算するのはなかなか難しい．そこで，この問題では以下のように遠距離まで跳ぶランダムウォークを考えて，その場合の再帰確率を求めよう．

L は大きな正の整数とする．考えるランダムウォークは，現在いる点から距離 L 以下の点に等確率で跳ぶものとする．つまり，$x, y \in \mathbb{Z}^d$ に対して，一歩で x から y に跳ぶ確率は，$\|x\| = \max_{1\leq j\leq d} |x_j|$ として，

$$p_{x,y} = \begin{cases} \frac{1}{(2L+1)^d - 1} & (0 < \|x-y\| \leq L) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とするのである．このようなランダムウォークの原点への再帰確率を r_L と書く．

(1) $L \to \infty$ の時，r_L はどのような値に近づくか？この極限値を α とする．

(2) （余力があれば解いてほしい）$L \to \infty$ の時に，r_L は α にどのような速さで近づくか（$1/L$ のようであるとか，e^{-L} のようであるとか...），考察せよ．

レポートのお約束：友達と相談しても，本を調べても，何をやっても良いから，**自分で理解した範囲を書く**こと．その際，**参考文献や議論した友達の名前も明記**すること．(友達と議論したり本を見たからと言って，悪い点をつけることは絶対にしない．一番大事なのは自分でわかったところを表現することだから，それまでの過程で何をやっても問題ない．)