2010.10.04.

線形代数　(S-1 クラス)

担当：原　隆（数理学研究院）：伊都キャンパス数理研究教育棟 219 号室，phone: 092-802-4441，
e-mail: hara@math.kyushu-u.ac.jp,　 http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html
Office hours: 月曜の午後５時半〜６時半頃，僕のオフィスにて（ただし，その前のセミナーが長引いた場合には少し待って頂くことになります）．なお講義終了後にも質問を受け付けますし，これ以外でもお互いの都合の良い時間にお相手します．

概要： 前期の線型代数・同演習 A に引き続き，理学部物理学科の学生さん向けに,「線形代数」を講義する：

1. 「固有値と固有ベクトル」「行列の対角化」などの新しい概念を学ぶ．
2. またこれらを計算するのに必要な「連立方程式の解き方」「逆行列の計算法」,「行列式の計算法」なども学ぶ．
3. また，物理学（特に量子力学）に必須の「内積」の概念も学ぶ．

キーになる概念：(前期の内容に加えて）行列式，固有値と固有ベクトル，行列の対角化，内積．

内容予定：（以下は大体の目安です．皆さんの理解の程度などにより，ある程度の変更はあり得ます．）

1. 連立一次方程式と逆行列の計算（前期の復習も兼ねて）
2. 行列式とその計算法
3. 固有値と固有ベクトル
4. 行列の対角化
5. 内積

教科書（前期と同じ）： 内田・高木・剱持・浦川「線形代数入門」裳華房

参考書（前期と同じなので簡単に）：

- 斉藤正彦「線形代数入門」（東大出版会）．
- Feynman Lectures on Physics, vol. 3 （邦訳は「ファインマン物理学第５巻」）
- これ以外に，講義ノートのようなものを作成し，皆さんがダウンロードできるようにする（講義で配布することもある）．以下の URL（http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html）から，この科目のページをご覧ください（10/4 現在，線型代数・同演習 B については改訂版を作成中.）
- 更に，僕の友達の田崎晴明さんの書きかけの本「数学：物理を学び楽しむために」がお勧めだ．これは彼の web page (`http://www.gakushuin.ac.jp/~881791/mathbook/`) からダウンロードできるので，興味のある人は自分で取ってみてほしい．田崎さんはおもしろい日記も書いているから，そちらもお奨め．

評価方法（大体，前期と同じ）： 主に<u>中間試験（＋レポート）</u>と<u>期末試験</u>の成績を総合して評価する．そのルールは以下の通りだが，優（A）を狙うには特別の関門があるので，<u>後の但し書きを良く読む事</u>．

- 最終成績は一旦，１００点満点に換算してから，この大学の様式に従ってつける．
- その１００点満点（最終素点）は，以下のように計算する．
  - まず,「中間試験の点」「期末試験の点」をそれぞれ 100 点満点で出す．
  - 次にこの２つを「平均」し，一応の総合点を出す：(総合点 A) $= 0.60 \times$ (中間の点) $+ 0.40 \times$ (期末の点)
  - ただし，上の計算式の重みを若干変更する可能性はあることを承知されたい．
  - 最終素点は　(最終素点) $= \max\{$ (総合点 A), (期末の点) $\}$　とする．つまり,（総合点 A）と（期末の点）を比べて，<u>良い方をとる</u>のだ．
- 上の「最終素点」をよく見て，必要ならば全体に少し修正（例：全員に下駄をはかせるとか）を加えたものをつくり，これをこの大学の基準と合わせて最終成績を出す．

- レポートは原則としては総合点 A には加えない．しかし，上の計算では合格基準に少し足りない人（百点満点で 10 点不足が限度）を助けるかどうかに使用する．また，チャレンジ問題などでずば抜けた解答をした人にも特例措置を講ずるかもしれない．

（A をとるための重要な但し書き） 期末試験ではあまり冒険をする訳にはいかず,（A と B の区別をつけるような）極端に難しい問題は出題しにくい．そのため，中間試験にも A, B の峻別を行う機能をある程度持たせて，中間・期末ともに成績優秀な人にのみ，A をあたえるようにする可能性がある —— 特に，期末を簡単にしすぎた場合はこうなる．A を狙って頑張る人はこの点を考慮して，中間・期末とも確実に受験してほしい．

（期末一発逆転を可能にする理由）この講義では（上位 10%の人だけがわかるような）進んだ話題はあまり扱わない．そのため,「できる」人が退屈することも考えられる．そのような人には自主的な学習を奨める意味で,「期末で一発逆転」も可能なようにした．ただし,「期末の一発勝負」がうまくいく人はそれほど多くないだろう（期末試験は中間試験やレポートよりは難しい）から，あくまで自己責任で やってくれ．期末の一発勝負で成績が悪くても，苦情は一切受け付けないからね！(できる人が少ないだろうけどもこの形式をとるのは，僕の美学にこだわっているからである.）

「学習到達度再調査」（？）について：

「再調査」は行わない可能性が高い — 今学期，原はたくさん教えているので，その余裕がない．もし行うとしても，その権利を得るのはギリギリで不合格になった人だけで，誰を対象とするかは，こちらの一存で（もちろん，公平に，しかし厳しく）決めさせていただく．また，再調査をしてもダメな人も出現しうる（過去にもたくさん存在した）.（再調査とは独立に，**正規の理由**があれば追試験は行うのでご安心を.）

なお，言うまでもないことであるが，いくら進級や卒業がかかっていても，単位の出せないものは出せないことは理解されたい.（いわゆる「泣き落とし」は通用しないばかりか，逆効果であるからそのつもりで.）下の合格基準に述べるように，普通に勉強してれば十分に単位が取れる仕組みにはしてあるから姑息なことは考えないように．

合格（最低）基準: 合格のための条件は，講義中に出題する例題（やレポート問題）と同レベルの問題が解けることである．具体的には今学期は大体，以下のようになる（進度の都合で若干の変更があることをご了承願いたい）．

- 一次方程式が解ける．解が不定や不能の場合ももちろん，含む．
- 行列式が計算できる．
- 行列の固有値，固有ベクトルが計算できる.（固有値が重根の場合ももちろん，含む）
- 与えられた行列を対角化できるか否かが判断でき，対角化できる場合にはその対角形が求められる．
- 「内積」の意味がわかり，最低限の性質を使いこなせる．

レポート，宿題，教科書の問題，演習の問題について（前期と同じ）：

講義中に何回か，簡単なレポートや「お奨めの宿題問題」を出すだろう．これらの出題の意図は「この程度できれば講義についていけるし，合格も可能だ」という目安を与えることと家庭学習の引き金にすること，である．成績評価に占めるレポートの比重は低いが，この講義をこなす上では重要な意味があるので，やってみること.「レポート」の作成はみんなで協力してやっても構わないし，むしろ協力することを奨励する．ただし、(友達と協力してレポート問題を解いた場合でも）各人のレポートは自分の言葉で記述し、かつ、「○○君と一緒に考えました」とぐらいは書くべきだ．また，教えてもらった事はそのままにせず，自分でもう一回考えて納得しておく事.（これらは高校までで身に付いているべきだが，どうも怪しい人が多いようだから書いておく.）

また，当然のことではあるが，**講義で進んだ部分に該当する教科書の問題くらいは全問，やっておくこと**．

プリントの使いかた（前期と同じ）：

教科書に加えて，僕自身の書いたプリントも用いる．**ただし，印刷したものを配布する代わりに，各自で僕の web page からダウンロードしてもらうことにする可能性も高い**．これらのプリントは板書にアップアップしないでも講義が聴けるように，また，教科書の足りないところを補うために，作ったものである．なお，急いで作っているためにタイプミスなどがかなりあると思うので，気づいたらできるだけ指摘してくれるとありがたい.（前期も何人か，指摘してくれました．ありがとう.）

勉強法などについて（前期と同じ）：

大学での数学では高校での数学にもまして，論理的思考力が要求されます．特にこの科目（線形代数）では**線型空間の概念**にとまどうことも多いと思います．そのような場合に困らないためには，

1．最低限の計算力を身につける．僕の出すレポート問題，教科書の問題，自分で選んだ演習書などを自分でやってみる．
2．論理的に考える癖も身につける．嫌がらずに，教科書や講義での論理展開を自分で追って（再現して）みる

ことがかなり役に立つはずです．

ついでに大学での理想の勉強法について書いておきます．

- 第一原則として，**自分の納得するまで考えて，理解する**ことを目指す．
- でも行き詰まったら，気分転換も兼ねて演習書などをやる．具体的に手を動かすことで,「わかったつもりで全然わかってない」ことが見つかるかもしれない．
- 新しい概念などがわからない時は，その「定義」がそもそもわかってないことが非常に多い（特に線型代数ではそうである）．**重要な概念の定義が言えるか**，自答しよう．定義が言えない時は定義を覚えられるまで，**具体例を考えよう**．(意味もわからずに定義を丸暗記するのは，たいていの場合は無駄だが，やらないよりはましかも．) 具体例さえ思い浮かばない時はかなりの重症です．友達や教官に質問しましょう．
- 定義，定理などでは**反例を常に思い浮かべる**ようにする.「定理のこの条件がなくなったらどこが困るのか」などを考えると，より身近に感じられて理解が深まる．
- （最後に）ここは大学で，これまでのように手取り足取りはしてくれないことを思い出そう．皆さんが自分から動けば道は開けるけども，**助けてくれるのを待っているだけでは何も解決しない**よ．

前期に苦労した人に一言：前期,「線型空間」などの抽象的概念で苦労した人がかなりいたと思います．これは難しいものなので，仕方ない．しかし，**幸いなことに，今学期は「線型空間，線型写像」などはそれほどわかってなくても，なんとかなります．**ぶっちゃけた話，後期の内容はかなりの部分，いろいろな「計算問題」と言えないこともありません．(もちろん，本当は，その背後にある深い構造を理解して欲しいのですが．) ですから，春に苦労した人も，心機一転して頑張って頂きたいと思います．**（ただし，計算だとは言っても，全く深く考えずに計算だけをやり散らかしてたら，試験では大変なことになると思うよ．抽象概念は少しおいといても良いから,「この局面ではこのような理由でこのように計算する」段階まではちゃんと理解すること．）**

なお，参考書として掲げた「ファインマン物理学」は案外，役に立つかもしれません．**しつこいけども，答えの丸暗記はお奨めしない．遠回りに見えても，どんなに苦しくても，納得するまで考えることが最短の道である．**

この科目に関するルール：前期，以下のルールをお願いしました．今学期もよろしく．

- まず初めに，<u>学生生活の最大の目的は勉強すること</u>であると確認する．
- 講義中の私語，ケータイの使用はつつしむ．途中入室もできるだけ避ける（どうしても必要な場合は周囲の邪魔にならないように）．これらはいずれも講義に参加している<u>他の学生さんへの</u>最低限のエチケットです．**（前期の後半，後ろの方での私語が目立ちました．授業に関係することならできるだけ声を上げて質問するように．そうでない私語を発する人は来なくてよろしい．）**
- 僕の方では時間通りに講義をはじめ、時間通りに終わるよう心がける．
- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義を通して行う（補助として僕のホームページも使う —— アドレスは最初に載せた）.「講義に欠席したから知らなかった」などの苦情は一切，受け付けない．
- レポートを課した場合，その期限は厳密に取り扱う．
- E-mail による質問はいつでも受け付ける（hara@math.kyushu-u.ac.jp）ので積極的に利用するように．ただ，回答までには数日の余裕を見込んで下さい．

本論に入る前に記号のお約束（前期と同じ）

$a < b$ を２つの実数，n を非負（負でない）整数とする．

- 整数の全体は $\mathbb{Z}$，自然数（1 以上の整数）の全体を $\mathbb{N}$，有理数の全体を $\mathbb{Q}$，実数の全体を $\mathbb{R}$，複素数の全体を $\mathbb{C}$ と書く．
- 集合 A の要素を大学では「元（げん）」ともいう．(例) 2 は $\mathbb{Z}$ の元である．$\sqrt{2}$ は $\mathbb{Q}$ の元ではない．
- 高校までと異なり,「$a < b$ または $a = b$」を $a \leq b$ と書く（不等号の下が 2 本線ではなく，1 本線）．同様に,「$a > b$ または $a = b$」を $a \geq b$ と書く．
- $a < x < b$ なるすべての実数の集合を (a, b) と書き，<u>開区間</u>という．$a \leq x \leq b$ なるすべての実数の集合を $[a, b]$ と書き，<u>閉区間</u>という．
- 高校と同じく，$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ は <u>n の階乗</u>である．ただし，$0! = 1$ と約束する．

(用語の注) あるものがたった一通りに決まる（存在する）とき，業界用語では○○**が一意に決まる（存在する）**という．この表現『一意』は頻出するから覚えよう（英語の unique, uniquely の訳）．

(用語の注) 本来，この科目名は「線型代数」とするのが正しい（形と型は違う）．しかし，いつ頃からか「形」を使うのが主流になってしまった．仕方ないので，この科目でも「形」を使うことがあるが，かなりの部分,「型」と書いてしまうこともあるだろう．そのような場合は「線型＝線形」と読み替えて下さい．

わからない記号が出てきたら，また，僕がおかしなことを言ってると思ったら，質問（または指摘）して下さい．僕の言ってることがわからないままに一時間も座っているのは時間の無駄です．あなたがわからない時は，隣の友達も多分，わかってないでしょう．だから，勇気をだして発言して下さいね．僕は変な人格攻撃以外で激高する（した）ことはありません．(かなりの人格攻撃でも表面上は受け流せると思っているのだが，試さないでね．)

10 月 4 日の講義について：今日は前期の最後にやった,「連立方程式の解法」の復習からです．

第１回レポート問題：

今日はあまり進めないでしょうから，前学期の期末試験のリベンジを兼ねて，連立方程式を解く問題です．出来ている人には時間の無駄に近いものですが，平均すれば怪しい人がかなりいたので，出題しました．

問 1： 以下の連立方程式を解け．もちろん，未知数は x, y, z, u である．

$$(1)\qquad \begin{cases} x + 2y + 3z + u = 0 \\ x - y + z - u = 0 \\ 3x + 5z - u = 0 \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} 5x + 3y + 5z + 12u = 10 \\ 2x + 2y + 3z + 5u = 4 \\ x + 7y + 9z + 4u = 2 \end{cases}$$

問 2： 以下の連立方程式が解を持つように定数 a, b の値を決め，そのときの解を求めよ．もちろん，未知数は x, y, z, u である．

$$\begin{cases} x + 2y - z + u = 1 \\ 2x - y - z - 2u = 1 \\ x + 7y - 2z + 5u = a \\ 5x - 3z - 3u = b \end{cases}$$

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

上の問に解答し，

10 月 13 日（水）13:00 （時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

なお，今回は連休を挟むので，変則的なレポート締め切り日時になっています．第 2 回以降のレポートの締め切り日時は，別の曜日になる可能性も高いので，注意して下さい．

10 月 18 日：今日は行列の基本変形と階数の関係など．
どこまで行けるかわからなかったので，レポートは出題していません．

前回のレポートの略解

問 1： 係数行列をとりだして階段状にします．

(1) 定数項がゼロなので，x, y, z, w の係数だけを抜き出す．

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であるから，元の方程式は

$$\begin{cases} x + 0 + \frac{5}{3}z - \frac{1}{3}u = 0 \\ \quad y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}u = 0 \end{cases}$$

と同値である．従って，z, u は任意にとれて，$x = -\frac{5}{3}z + \frac{1}{3}u$ かつ $y = -\frac{2}{3}z - \frac{2}{3}u$ が答えである．わかりやすく書いておくと

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -5/3 \\ -2/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (s, t \text{ は任意})$$

となる．

(2) 今度は定数項もあるので，定数項を含めて考える．

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 & 12 & 10 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるから，元の方程式は

$$\begin{cases} x + 0 + \frac{1}{4}z + \frac{9}{4}u = 2 \\ \quad y + \frac{5}{4}z + \frac{1}{4}u = 0 \end{cases}$$

と同値である．従ってやはり z, u は任意にとれて，

$$x = -\frac{1}{4}z - \frac{9}{4}u + 2, \qquad y = -\frac{5}{4}z - \frac{1}{4}u$$

が解である．わかりやすく書いておくと

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1/4 \\ -5/4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -9/4 \\ -1/4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (s, t \text{ は任意})$$

となる．

問 2： 解き方は問 1 と同じですが，a, b が入ってるところだけが異なります．階段状にすると

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & -2 & 5 & a \\ 5 & 0 & -3 & -3 & b \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-3 \end{bmatrix}$$

となるから，元の方程式は真ん中の行列を使うと

$$\begin{cases} x + 2y - z + u = 1 \\ \quad\;\; 5y - z + 4u = 1 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = a-2 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b-3 \end{cases}$$

と同値である．下の 2 行から，$a=2$ かつ $b=3$ 以外では解がないことがわかる．また，$a=2$ かつ $b=3$ の解は，上の 2 つから（分数が入ってくるのはいい加減，いやになってきたので，x,z について解くことにする）y,u は任意で，

$$z = 5y + 4u - 1, \qquad x = 3y + 3u$$

となる．わかりやすく書いておくと

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (s,t \text{ は任意})$$

となる．

もちろん，右端の行列を使うと，方程式は

$$\begin{cases} x - 3y - 0 - 3u = 0 \\ \quad\;\; 5y - z + 4u = 1 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = a-2 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b-3 \end{cases}$$

となる．これなら x,z について解くのは非常に簡単である．もちろん，最終的な答えは上のに一致する．

（注）問 1 と問 2 ともに，答えの書き方は一通りではない．s,t に相当するものとして x〜u のどの二つをとっても良いからである．この点は TA の人がちゃんと見てくれてるはずです．もちろん，試験のときには僕もちゃんと見ます．

10 月 25 日の：「連立方程式の解法」のまとめと逆行列の求め方.

第 2 回レポート問題：

問 3： 以下の行列 A, B, C の逆行列を求めよ．A については答えだけで良い.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります.

レポート提出について：

上の問に解答し，

10 月 29 日（金）13:00 （時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ.

11 月 1 日：今日は行列式．どこまで行けるかわからないので，レポートは出題しません．

前回のレポートの略解

問 3： ともかく定法どおりにやります．ただし，A はそこまでやらなくても簡単．

（A について） 対角行列（ただし，対角成分はゼロでない）の逆行列は，その対角成分の逆数を並べたものになる（各自検算してチェックすること）．この事実を用いれば

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

（B について）行の基本変形を行う：

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 14 & -8 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 14 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

よって，

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 14 & -8 & 3 \\ -8 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

となる．

（C について）行の基本変形を行う：

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5/3 & -4/3 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5/3 & -4/3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5/3 & -4/3 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5/3 & 4/3 & -1 \end{array}\right]$$

よって，

$$C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -5 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

となる．

良く出来ていた人が多かったし，かなりの人は検算もやってました．大変に良かったと思います．しかし一方で，間違った答えを平気で書いている人もいました．検算できるのは検算しましょう！(逆行列を求める問題を試験で問うた場合，間違った答えを平気で書いていれば部分点は差し上げません．)

11 月 8 日：「行列式の求め方」その 1

第 3 回レポート問題：

問 4： 以下の行列 A, B, C, D の行列式を求めよ．A については答えだけで良い．なお，この問では a, b, c は定数であり，A, C, D の答えはこれらの定数が入った式になることが期待される．

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 3 & 4 \\ 0 & b & -1 & 1 \\ 0 & 0 & c & 8 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{bmatrix}$$

なお，上の C, D は典型的な問題であり，教科書や参考書などに答えが載っているかもしれない．しかし，行列式の計算に慣れるためにも，ともかく自分で解いてみることを強く奨める．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

上の問に解答し，

> 11 月 12 日（金）13:00 （時刻は 24 時間制）までに，
> 全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，2 枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

11 月 15 日：「行列式の求め方」その 2（展開による）

第 4 回レポート問題：

問 5： 以下の行列 A, B, C の行列式を求めよ．A については答えだけで良い．この問では x は定数であり，答えは x が入った式になることが期待される．実は係数をうまく選んで，結果の行列式がある程度までは因数分解できるようにしてあるから，できるだけ，答えは因数分解した形で書いてくれるとうれしい．

もちろん，どんな解き方をしても良いが，Sarrus の公式を使うのは感心しない．

$$A = \begin{bmatrix} x-2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & x-4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & x-2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & x-3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ 1 & x-4 & 1 \\ -1 & 1 & x-2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2-x & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2-x & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1-x \end{bmatrix}$$

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

上の問に解答し，

11 月 19 日（金）13:00 （時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

前回のレポートの略解

問 4： （問題文に a, b, c は定数としましたが，d も定数のつもりでした．ほぼ明らかだったとは思うけど，すみません.）

ともかく定法どおりにやります．ただし，A は対角行列なので，$abcd$ が答え．

B は行または列の引き算をやるとすぐに出ます．列の方が少しだけ簡単ですが，行でやれば

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

ということで，1 でした．

C は一行ずつ足したり引いたりしても良いけども,「全ての行を足す」が，より有効．まず全ての行を足したのを新しい第 4 行にする．そしたら $(a+3b)$ がくくりだせる：

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ a+3b & a+3b & a+3b & a+3b \end{vmatrix} = (a+3b) \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

最右辺の行列は第 4 行が 1 ばかりだし，a, b が入ってないので，かなり楽になった．後は例えば,「第 4 行の b 倍を 1〜3 行から引く」と $(a-b)$ を 1〜3 行からくくりだせる（各行からひとつずつ $(a-b)$ がでることを忘れない）．結

果は対角行列だから簡単．

$$= (a+3b)\begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+3b)(a-b)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+3b)(a-b)^3$$

D はちょっと厄介である．まあ，各行に a, b などが混じって入ってるのがいかん！ので，例えば，第 1 列を b のみ，c のみの 2 つの列に分けてやろう．そうしたら，b や c をくくりだして，残りを単なる数にできる：

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & a \\ b & c+a & b \\ 0 & c & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a \\ 0 & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & c+a & b \\ 0 & c & a+b \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & c+a & b \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

単なる数ばっかりの列ができたら後はまあ簡単で，

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & c+a & b \\ 0 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & c & b-a \\ 0 & c & b+a \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & b-a \\ 0 & 1 & b+a \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 1 & b+a \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 2a \end{vmatrix} = 2ac$$

および

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & c+a & b \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c+a & b \\ 1 & c-a & b \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c+a & 1 \\ 1 & c-a & 1 \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c+a & 1 \\ 0 & c-a & 1 \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & c-a & 1 \end{vmatrix} = 2ab$$

以上を併せて

$$\det D = b \times 2ac + c \times 2ab = 4abc$$

（D の別解）まあ，答えを知ったら思いつく方法ではあるので，あまり気にする必要はないが，将来，似たような考え方が役に立つこともあるので，紹介しておこう．

D の行列式は $a = 0$ ならゼロになることにまず，気づこう．実際，$a = 0$ の場合，

$$\begin{vmatrix} b+c & 0 & 0 \\ b & c & b \\ c & c & b \end{vmatrix}$$

は第 2 列と第 3 列が比例しているので，ゼロである．$b = 0$ や $c = 0$ の場合も同様にゼロ．

さて，（行列式の定義を思い出すと）この行列式は a, b, c の 3 次の多項式である．a, b, c がゼロの時に行列式がゼロということは，この多項式が a, b, c を因数として持つ，ことを意味する．つまり，$\det D = Kabc$（K は定数）の形になっているはずである．

後は K の値を決めてやればよい．これは a, b, c に特別な値を入れて計算すれば十分で，例えば $a = b = c = 1$ として

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \text{（1,2 行入れ換え，そのあと 2,3 行入れ換え）} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{（1 行に 2 行を足す）} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

であるから，$K = 4$ である．

11 月 25 日：固有値と固有ベクトル

第 5 回レポート問題：

問 6： 以下の行列 A, B, C の固有値と，対応する固有ベクトルを求めよ．行列 A, B, C は先週のレポートと似ているので，必要な行列式の計算のかなりの部分は省略してもよい．ただし，どのように考えたら先週の答えが使えるのか，は明記すること — 似ているとは言っても，ある種の引っかけにはなっているからよくよく注意されたい．

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について（今週は変則だから注意！）：

上の問に解答し，

> 11 月 29 日（月）の 3 限，この講義の**開始時**にこの場で集めます．
> 締め切り厳守．講義が始まってからはレポート提出は受け付けません．

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，2 枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

前回のレポートの略解

問 5： A は下半三角行列なので，$(x-2)(x-4)(x-2)(x-3) = (x-2)^2(x-3)(x-4)$ が答え．

B は実のところ，すべての行を足すと簡単：でやれば

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ 1 & x-4 & 1 \\ -1 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & x-2 & x-2 \\ 1 & x-4 & 1 \\ -1 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x-4 & 1 \\ -1 & 1 & x-2 \end{vmatrix}$$

ここまでくれば第 1 行が 1 ばかりだから，第 2，第 3 行から第 1 行を引いたものを新しい第 2，第 3 行としていくと

$$= (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-5 & 0 \\ -1 & 2 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)(x-5)$$

が答え．

（後知恵の検算を試みると）$x = 1$ なら行列式がゼロなのは第 1，第 3 列が比例するから O.K. でも $x = 2$ や $x = 5$ の場合はよくわからない．このように，行列式がゼロになるのに，特にすぐにわかる理由がない場合も多いから，行列式の計算にはあまり有効な検算方法はない．

実は C も全ての行（または列）を足すと簡単だ．列でやってみると，

$$\begin{vmatrix} 2-x & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2-x & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & -2 & 0 & 1 \\ 1-x & 1-x & 1 & 1 \\ 1-x & 1 & 2-x & -2 \\ 1-x & 1 & -2 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1-x \end{vmatrix}$$

後は，第 1 列が 1 ばかりなので第 1 行を引いて，そのあと第 1 列で展開：

$$= (1-x)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3-x & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2-x & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} 3-x & 1 & 0 \\ 3 & 2-x & -3 \\ 3 & -2 & -x \end{vmatrix}$$

ここで出て来た 3×3 行列の行列式を求めるために，新しい方法の練習も兼ねて，第 1 行で展開すると

$$\begin{vmatrix} 3-x & 1 & 0 \\ 3 & 2-x & -3 \\ 3 & -2 & -x \end{vmatrix} = (3-x)\begin{vmatrix} 2-x & -3 \\ -2 & -x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -x \end{vmatrix} = (3-x)\{(2-x)(-x)-6\} - (-3x+9)$$

$$= (3-x)\{x^2-2x-6\} - 3(3-x) = (3-x)\{x^2-2x-9\}$$

となるので，最終的な答えは

$$\det C = (x-1)(x-3)(x^2-2x-9)$$

記号上，行列と行列式の区別がついていない人がかなりいたようです．問題では A, B, C は行列ですから，答えは $A = ...$ などではなく，$\det A = ...$ または $|A| = ...$ という書き方になります．多分，わかってるとは思うけども，注意して下さい．

11 月 29 日：固有値と固有ベクトル，対角化
講義で宣言した通り，12/13（月）の 3 限（いつもの授業時間）に中間試験を行う可能性が高いです．範囲は講義で宣言した通り，「行列の対角化」までです．

第 6 回レポート問題：

問 7： 以下の行列 B, C の固有値と，対応する固有ベクトルを求めよ．また，このそれぞれが対角化できるかどうかを判定せよ．更に，対角化できるのなら，対角化する行列 P を一つ，求めよ．

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

上の問に解答し，

12 月 3 日（金）13:00 （時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，2 枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

前回のレポートの略解

問 6： A は下半三角行列なので，対角成分が固有値である．つまり，固有値は $-2, -3, -4$ で，-2 が重根．

それぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めると，

$$-2 \text{ に対しては } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad -3 \text{ に対しては } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad -4 \text{ に対しては } \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

となる．-2 は二重根であるが，これに対する固有ベクトルは 1 次元分しかないことに注意．

（注意）数学的に厳密な書き方は，ゼロでない定数倍をすべて書いて

$$-2 \text{ に対しては } k\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad -3 \text{ に対しては } l\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad -4 \text{ に対しては } m\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad (k, l, m \text{ はゼロでないスカラー})$$

となる．以下では（前回の講義の時にも断ったように）このようにややこしい，正しい書き方はしない．

B の固有値を求めるには

$$\det(B - xI_n) = \det \begin{bmatrix} -2-x & 1 & -1 \\ 1 & -4-x & 1 \\ -1 & 1 & -2-x \end{bmatrix} \qquad (*)$$

を解けば良い．この方程式に似たものは先週のレポートでやった．つまり，先週の問題の B において x を $-x$ に置き換えれば上のものになる．先週の答えは $(x-1)(x-2)(x-5)$ だったので，上の行列式の答えは

$$(-x-1)(-x-2)(-x-5) = -(x+1)(x+2)(x+5)$$

である．つまり固有値は $-1, -2, -5$ とわかる．それぞれの固有値について解いてみよう．例えば固有値 -1 なら，(*) に出ている行列において $x = -1$ としたものを考えて，その連立方程式を解けば良い．つまり

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を解くのである（もちろん，零ベクトルでない解を探す）．この答えは（第一行と第三行が比例しているからランクが下がっているのはすぐにわかるね）

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{のゼロでないスカラー倍}$$

となる．他の固有値も同様にして解くと，

$$-1 \ \text{に対しては} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad -2 \ \text{に対しては} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad -5 \ \text{に対しては} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる．(検算）これらが実際に固有ベクトルになっていることは検算すれば容易に確かめられる．いつも検算する癖をつけよう．

C の方は $\det(C - xI_n) = 0$ を解くことになるが，ここに出ている方程式が先週のレポート問題そのものである．この答えは $(x-1)(x-3)(x^2-2x-9)$ だったので，固有値は $1, 3, 1 \pm \sqrt{10}$ である．対応する固有値は A, B と同様に計算して

$$1 \ \text{に対しては} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad 3 \ \text{に対しては} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad 1 \pm \sqrt{10} \ \text{に対しては} \begin{bmatrix} 1 \pm \sqrt{10} \\ -3 \\ -(1 \pm \sqrt{10}) \\ 3 \end{bmatrix}$$

となる（複合同順）．

12 月 6 日：対角化と三角化，内積
講義で宣言した通り，12/13（月）の 3 限（いつもの授業時間）に中間試験を行います．
範囲は講義で宣言した通り,「行列の対角化（＋三角化)」までです.「Jordan の標準形」「内積」は入りません.
試験場所はいつもと違って 2305 です．

前回のレポートの略解

問 7： B について．まずは固有値から求める．

$$\begin{vmatrix} 3-x & 1 & 1 \\ -1 & 5-x & 1 \\ 0 & 0 & 4-x \end{vmatrix} = (4-x)\begin{vmatrix} 3-x & 1 \\ -1 & 5-x \end{vmatrix} = (4-x)\{(3-x)(5-x)+1\} = (4-x)^3$$

となるから，固有値は 4 のみで，3 重根．固有値に対する固有ベクトルを ${}^t(a,b,c)$ と置くと，

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ということになるが，これは「$a = b + c$ なら何でも良い」ということである．ので，独立な固有ベクトルとしては，例えば

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad と \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

がとれる．

この場合，元の行列が 3×3 なのに，独立な固有ベクトルは 2 つしかない.（3 つの独立な固有ベクトルがとれないのは，$a = b + c$ の関係式が要求されてしまっていることからもわかる.）ので，この B は対角化できない．

（注意）一般に，$n \times n$ 行列 A の固有値 α が n 重根になっており，かつ A が対角化できる場合，A は単位行列の定数倍しかない.（逆にいうと，単位行列の定数倍でない A が固有値 α を n 重根に持つなら，A は対角化できない.）理由は各自で考えておくこと．

C について．やはり固有値から求めると

$$0 = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 4-x & 4-x & 4-x \end{vmatrix} = (4-x)\begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (4-x)\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4-x)(x-1)^2$$

より，$1, 4$ が固有値（1 は重根）．

それぞれの固有値に対する固有ベクトルを見つけると（段々としんどくなって来たので詳細は略）

$$4 \ \text{に対しては} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad 1 \ \text{に対しては} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ と \ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

がとれることがわかる．この 3 つは一次独立であるから，この行列 C は対角化可能である．また，C を対角にする行列 P はこの 3 つの固有ベクトルを並べて

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

と求められる．

講義中にも強調したが，固有値（固有方程式の解）は必ず固有ベクトルを持つ．もし固有ベクトルを求めたつもりなのに零ベクトルしか出なかったら，(1) 固有値の計算がそもそも間違っていたか (2) 固有値は正しいが，固有ベクトルの計算を間違ったか，のいずれかである．

12 月 27 日：内積，特に正規直交基底とシュミットの直交化
既に宣言した通り，**1 月 13 日（木）の 3 限に補講**を行います．**場所は　2203　です．**
また，1/17（月）は休講です．

第 7 回レポート問題：

内積の練習問題です．講義でも宣言したように，このレポートで「内積」といえば，$\mathbb{C}^n$ の標準内積のことです．また，i は虚数単位です．

（注意）ベクトルの成分が複素数の（かつ実数でない）ところがあるから，内積の定義などには十分に注意すること．成分が複素数の場合はかなり間違いやすいので，計算が大変とは思ったが敢えて出題した．提出までにある程度の時間があるから，複素数の計算練習だと思ってやって下さい．

問 8： ベクトル $\boldsymbol{x}$ および $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ を以下のように定義する：

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} i \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の線型結合として表せ．この場合，以下の (3) の方法は使わず，$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} + c_3\boldsymbol{c} + c_4\boldsymbol{d}$ と書いて，係数 c_1, c_2, c_3, c_4 に関する連立方程式を地道に解いて求めること．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の相互の内積［$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ や $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d})$ や $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ など 6 通りの組み合わせすべて —— 本当は順序を変えた $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ なども考えるべきだが，流石に数が多いからそれは書かなくて良い］を具体的に計算せよ．（ほとんど答えだけで良いが，これが次の (3) のヒントになっている．）

(3) $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の線型結合として表せ．ただし，今回は，$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} + c_3\boldsymbol{c} + c_4\boldsymbol{d}$ と書いた上で，この式の両辺と $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の内積を考えて c_1, c_2, c_3, c_4 を求めよ．

問 9： ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を以下のように定義する：

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

この $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ をシュミットの直交化法によって直交化して得られる正規直交系を求めよ．（採点の便宜上，正規直交化は $\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{b} \to \boldsymbol{c}$ の順にやってくれると嬉しい．）

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

上の問に解答し，

1 月 6 日（金）13:00 （時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

1 月 13 日：内積，直交補空間，ユニタリー行列，およびエルミート行列の対角化
また，1/17（月）は休講です．

前回のレポートの略解

問 8： (1) 解くべき連立方程式は

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -i & 0 \\ i & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

である．$c_4 = 1$ は直ぐにわかる．残りの c_i は仕方ないから頑張って解く．結果として，

$$c_1 = \frac{1}{2}, \qquad c_2 = \frac{-i-2}{6}, \qquad c_3 = \frac{1+i}{3}, \qquad c_4 = 1$$

が得られるので，答えは

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{-i-2}{6}\boldsymbol{b} + \frac{1+i}{3}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$$

である．係数が複素数なので，かなり計算は大変だったと思う．

(2) ともかく地道に計算すると，全ての異なるベクトル同士の内積は全てゼロであることがわかる．

(3) $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} + c_3\boldsymbol{c} + c_4\boldsymbol{d}$ と $\boldsymbol{a}$ の内積を考えると，

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = c_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + c_2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + c_3(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) + c_4(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a}) = c_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$$

となるから，

$$c_1 = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \frac{1}{2}$$

同様に

$$c_2 = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})} = \frac{-i-2}{6}, \qquad c_3 = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c})} = \frac{1+i}{3}, \qquad c_4 = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d})}{(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{d})} = \frac{1}{1} = 1,$$

となるので，答えは

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{-i-2}{6}\boldsymbol{b} + \frac{1+i}{3}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$$

である．もちろん，(1) と一致する．

大半の人が，(2) を間違っていた．間違いの原因は，内積の定義における複素共軛を忘れたことにある．この複素共軛を忘れても，手順通りにやれば (3) の答えは正しいものがでるが，これは偶然の一致としか言いようがない（本当は偶然ではなく，理由はあるが）．ともかく，内積の定義における複素共軛を忘れるのは致命的なので，(2) の複素共軛を忘れた人は問 8 の以後は零点にしてある．授業でもしつこく言ったように，この複素共軛は大変に忘れやすいから，今，身につけておいてほしい．

問 9： ともかくやります．まず，$\boldsymbol{a}$ を規格化する．

$$\boldsymbol{e}_1 := \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\i\end{bmatrix}$$

次に，$\boldsymbol{b}$ から，上の $\boldsymbol{e}_1$ に直交するのを作る：

$$\boldsymbol{b}' := \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b},\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\i\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\i\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\2i\\-i\end{bmatrix}$$

これを規格化して

$$\boldsymbol{e}_2 := \frac{\boldsymbol{b}'}{\|\boldsymbol{b}'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2i\\-i\end{bmatrix}$$

最後に，$\boldsymbol{c}$ から上の $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ に直交するのを作る：

$$\boldsymbol{c}' := \boldsymbol{c} - (\boldsymbol{c},\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{c},\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\i\end{bmatrix} - \frac{1-i}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2i\\-i\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1+2i\\2-i\\2-i\end{bmatrix}$$

これを規格化して

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix}1+2i\\2-i\\2-i\end{bmatrix}$$

正規直交系は上の $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ から得られる

$$\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\i\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2i\\-i\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix}1+2i\\2-i\\2-i\end{bmatrix} \right\rangle$$

である．

ともかく，手順通りにやるだけだが，内積の定義中の複素共軛などを良く忘れるので，十分に注意すること．この問では e_3 を規格化するためにノルムを計算する際，複素共軛をわすれて，根号の中に虚数単位 i が出ている人が散見された．また，ノルムを計算するための根号を忘れた人もかなりいたので，注意．

なお，複素数の計算に慣れていない人も何人か見受けられた．特に複素数で割り算をする場合（分母の実数化）は，分母の複素共軛を分母分子にかければ良いことを知らない人が何人かいたようだ．物理の学生なら，複素数の計算には慣れておいた方が良いでしょうね．

（例）a, b, c, d が実数のとき

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \times \frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

1 月 24 日：エルミート行列と正規行列の対角化など．来週は「二次形式」をやって，この講義を締める予定です．

第 8 回レポート問題：

正規行列の対角化の問題です．

問 10： 次の行列をユニタリー行列を用いて対角化せよ．もちろん，実直交行列はユニタリー行列の一部である．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

上の問に解答し，

1 月 28 日（金）13:00 （時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，2 枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

1月31日：最終回です.「二次形式」をやります.
期末試験は教務課の掲示通りにやります．範囲はやったところ全部ですが，特に「行列の（ユニタリー行列による）対角化」「内積」などの問題が大半かも.（これらを訊くと，今学期やったことのほとんどを訊いたことになるからね.）

前回のレポートの略解

問 10： ともかく，手順通りやります.

A の固有値は

$$0 = \det(A - \lambda I_3) = (10 - \lambda)(1 - \lambda)^2$$

から，$\lambda = 10, 1$ (1 は重根) と求められる．これから固有ベクトルを求めると

$$\lambda = 10 \text{ に対しては } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 1 \text{ に対しては } \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ と } \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

がとれることがわかる．これにシュミットの直交化を行うが，$\lambda = 10$ と $\lambda = 1$ の固有ベルトルは直交するので，実質，$\lambda = 1$ の 2 つを直交化すれば良い．結果は

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

となる．ので，行列 A を対角にするユニタリー行列の一例は

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

であり，その時の対角形は

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である.

B の方もやり方は同様である．固有値の満たすべき式は

$$0 = \det(B - \lambda I_4) = (2 - \lambda)^2 (4 + \lambda^2)$$

なので，固有値は $2, \pm 2i$（2 は重根）．固有ベクトルは

$$\lambda = 2 \text{ に対しては } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ と } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \pm 2i \text{ に対しては } \begin{bmatrix} \mp i \\ \pm i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{（複合同順）}$$

幸いなことに，この 4 つのベクトルは始めから直交してるから，ユニタリー行列を作るには，それぞれの長さだけをそろえれば良い．結果として行列 B を対角にするユニタリー行列の一例は

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-i}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{2} & \frac{-i}{2} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

で，その時の対角形は

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \end{bmatrix}$$

である．

- 固有ベクトルになっていないものを固有ベクトルとしているレポートが散見された．今回，計算もそこそこ大変だったから息切れした面もあるとは思うが，固有ベクトルになっているかどうかはできるだけ検算してほしい．**特に注意すべきは直交化した後，である．一旦は正しく固有ベクトルを出したにも関わらず，直交化で計算間違いをした人がかなりいた．**
- ユニタリー行列を作る際,「直交化」をせず,「規格化」だけをしている人が A の方で散見された．採点の都合上，2 点しか引いていないが，本番の期末ではダメージが大きくなるだろうから，ユニタリー行列を作るには何をすべきなのか，もう一度確認してほしい．

かなりの人が，対角形を求める場合に U^{-1} を具体的に計算した上で，更に行列のかけ算 $U^{-1}AU$ などを行っていた．これはすべてわかった上で，検算を含めてやっているのであれば全く問題ないし，むしろ褒められるべきことである．ただ，どうも中にはよくわからずにやっている人がいるようにも思えたので，再度，以下を注意しておく．

- U がユニタリー行列の場合は，$U^{-1} = U^\dagger$ であるから，逆行列は（通常のややこしい方法でなくても）$U^\dagger$ を作ればすぐにわかる．
- ただしく U を作っておれば，$U^{-1}AU$ は対角形になり，かつその対角形は U の列ベクトルに対する固有値を順に並べたものになる．つまり，U の作り方さえ見ておけば，$U^{-1}AU$ が何になるかはわかるから，計算をしなくても書き下せる．

期末試験でも同様の問題を必ず出すが，その場合，U^{-1} や $U^{-1}AU$ を行列のややこしい演算を使って具体的に計算する必要はない．U の形さえ具体的に求めた後は，上に述べた（講義でもしつこく説明した）一般論からわかるはずの,「$U^{-1}AU$ はこうなるはず」の最終形を書けば良い．要するに，上の解答例のように書けば良いのである —— ただし，固有値を求める際の行列式の計算法や，固有ベクトルの求め方はそれぞれ，詳しく書いてくれると（この人はよくわかっているな，と納得できるので）うれしい．
もちろん，検算として U^{-1} や $U^{-1}AU$ を具体的に計算してみるのは大変に良いことではある．