**期末テスト（8/02）の解答編（線型代数 A, 2010.8.24）**

（得点分布は，web で公開するのは適当でないと考えて，公開しません.）

**全体的な講評**

まあ，大体は予想通りでしたが，連立方程式が案外，解けていませんでした．そのために点が伸びなかったのは事実です．また,「部分空間であることを示せ」「線型写像であることを示せ」は非常に基本的な問題ですから，全員，出来てほしかった.（その想いを込めて，問 1 の (2) と問 4 の (2) には 10 点ずつ配点しました．合計 120 点満点．少々，連立方程式が解けなくても，ここだけで 20 点稼げるようにしてますが，効果がなかった人もいましたね...）

**問 1**：中間と似たような問題なので，答えだけ書きます.

(1) $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$ （これは答えだけ書いて,「実際に計算したらなってる」でも O.K.）

(2) これは部分空間の定義を訊く問題ですから，

- $W$ の任意の 2 つの元の「和」が $W$ の元であること
- $W$ の任意の元の「スカラー倍」が $W$ の元であること

を示すだけです（零ベクトルについての条件は上の 2 つから出るから省略可）.

なお，(1) を用いて 「$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ の線型結合だから線型空間」と書いた人が多数でました．しかし，これはベクトルの数がもともとの 5 つから 4 つに減っただけで，線型結合であることには変わりがなく，元の問題と同じレベルに立ったままです．これでは証明ではありません.

(3) ちゃんと計算すると，$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{d}$ がわかるので，また，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}$ は線型独立であることもわかるので，基底は $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d} \rangle$．もちろん，$\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e} \rangle$ なども O.K.

**問 2**：掃き出し法でも，他の方法でも良いですが，ともかく解ききることが大切です．かなりの人が，中途半端に解いたところで答えを出していました．解ききっていない人は零点かそれに近い得点にしています.

> このような「方程式を解け」の問題は，でてきた解をもとの方程式に代入して，本当に解になってるかどうかを確かめなさい，というのは高校で散々，聞かされたのでは？今回，解になってないものをしれっと書いている人が多数いたのは驚き，かつ残念でした.

(1) 係数行列を変形すると（右辺はゼロなので略）

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a-2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{bmatrix}$$

となるから，元の方程式は

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \qquad x_2 = x_4, \qquad x_3 = -x_4, \qquad (a-3)x_4 = 0$$

と同値．$a = 3$ か否かで場合分けする.

<u>$a \neq 3$ のとき</u>

最後の式から $x_4 = 0$，これを前の 3 式に代入して，$x_3 = x_2 = x_1 = 0$．つまり，この場合は零ベクトルのみが解.

<u>$a = 3$ のとき</u>

最後の式は $0 = 0$ で $x_4$ について何の拘束もしない．つまり，$x_4$ は任意にとれる．これを前の 3 式に代入して，

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = t, \qquad x_3 = -t, \qquad x_4 = t \qquad (t \text{ は任意})$$

が答え.

(2) $a \neq 3$ では上の通り，零ベクトルのみ．

$a = 3$ の場合は，基底は $\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ で，次元は 1.

**問３：** 手順通りやるだけです．

(1) 核空間から．「$f$ の行き先＝零ベクトル」を解けば良い．行き先が既に階段状になってるから，これは簡単で，

$$z = w, \qquad y = -(2z + w) = -3w, \qquad x = -(y + z + 2w) = 0 \qquad (w \text{ は任意})$$

と解ける．よって，核空間の基底は $\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ で，次元は 1.

像空間の方は $f$ の行き先が

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

と書けているから，右辺の 4 つのベクトルの線型結合の全体である．つまり，問 1 と同じ状況になっている．始めの 3 つは明らかに独立であり，最後の一つは前の 3 つの線型結合で書けるから，基底の例としては

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{や} \quad \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

があり，次元は 3.

なお，次元定理から（核空間の次元が 1 ゆえ）像空間の次元は $4 - 1 = 3$ であることがわかる．従って，(*) の 4 つのベクトルから一次独立な 3 つを取り出して「これが基底」としても良い —— つまり，4 つ目のベクトルがそれ以外の線型結合で書けることは（「次元定理によると像空間の次元は 3」を書いた上ならば）確かめなくても良い．

(2) こっちは計算がちょっと大変ですね．答えだけ書きます．

核空間の次元は 2 で，基底の例は

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \quad \text{これ以外にも，} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{などから 2 本とればよい．}$$

像空間の次元は（次元定理より）3 で，基底の例は

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

など．

**問4：**多項式の空間の問題ではありますが，レポート問題などに酷似しています．

(1) 答えだけ．基底の例は $\langle 1, x, x^2, x^3, x^4 \rangle$ で，次元は 5.

(2) $p_1, p_2 \in V$ とすると，その和とスカラー倍の行き先について

$$T(p_1+p_2)(x) = p_1(x)+p_2(x)+p_1(-x)+p_2(-x) = p_1(x)+p_1(-x)+p_2(x)+p_2(-x) = T(p_1)(x)+T(P_2)(x)$$

$$T(kp_1)(x) = (kp_1)(x) = kp_1(x) = kT(p_1)(x)$$

が成り立つので，線型写像である．

(3) $p(x) = a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$ のとき（$a, b, c, d, e$ は実定数）その行き先は

$$T(p)(x) = p(x)+p(-x) = 2a+2cx^2+2ex^4$$

である．つまり，行き先（像空間）は $1, x^2, x^4$ で張られる．ので，基底の一例は $\langle 1, x^2, x^4 \rangle$ で，次元は 3.

(4) 上の計算から，行き先がゼロになるには，$a = c = e = 0$ が必要十分．つまり，$b, d$ は任意であるから，核空間は

$$p(x) = bx+dx^3 \qquad (b, d \text{ は任意})$$

の全体である．よって，基底の一例は $\langle x, x^3 \rangle$ で，次元は 2.

(5) 表現行列を $A$ とかくと，$A$ は

$$\begin{bmatrix} 2a \\ 0 \\ 2c \\ 0 \\ 2e \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} \qquad \text{を満たすべし．つまり，} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**問5：**まあ．この問題は難しかっただろうと思います．表現行列を $A$ と書きます．縦ベクトルを一杯書くのは大変なので，

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

とおいておきます．

方針としては，必要条件で出来るだけ攻めて，最後に得られた条件が十分であることをいう，ことを狙います．

$\mathrm{Im} f$ から見て行くのが良いでしょう．$\mathrm{Im} f$ が $\boldsymbol{c}$ で張られているということは，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$A\boldsymbol{x} = (\ \boldsymbol{c} \text{ のスカラー倍})$$

となってることを意味する．$A$ の列ベクトルを $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ として $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \ \boldsymbol{q} \ \boldsymbol{r} \end{bmatrix}$ と表し，$\boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z)$ の場合に具体的に計算すると

$$A\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{p} + y\boldsymbol{q} + z\boldsymbol{r}$$

である．これが任意の $x, y, z$ について $\boldsymbol{c}$ のスカラー倍ということは，$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ の全てが $\boldsymbol{c}$ のスカラー倍でないといけない（$x = 1, y = z = 0$ などの場合を考えてみよ）．つまり，行列 $A$ は

$$A = \begin{bmatrix} \alpha\boldsymbol{c} & \beta\boldsymbol{c} & \gamma\boldsymbol{c} \end{bmatrix} \qquad (\alpha, \beta, \gamma \text{ は未知の定数})$$

の形であることがわかった．以上で像空間についての情報は大体使ったつもり（後でもう一度，戻る）．

次に核空間に行こう．核空間には $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が入ってるから，これの行き先が零ベクトルになる必要がある．上の形の $A$ との積を具体的に計算すると，

$$\boldsymbol{0} = A\boldsymbol{a} = (1\alpha + 0\beta + 1\gamma)\boldsymbol{c} = (\alpha+\gamma)\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{0} = A\boldsymbol{b} = (-1\alpha + 1\beta + 0\gamma)\boldsymbol{c} = (-\alpha+\beta)\boldsymbol{c}$$

が必要ということだ．$\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ なので，これは

$$\alpha + \gamma = 0, \qquad -\alpha + \beta = 0$$

が必要ということね．つまり必要条件として，$\beta = \alpha, \gamma = -\alpha$ が出たので，

$$A = \alpha \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} & \boldsymbol{c} & -\boldsymbol{c} \end{bmatrix} \qquad (\alpha \text{ は未知の定数})$$

の形まで追いつめた．

さて，これで十分かと考えると，像空間については大体良いのだが，一点だけ，$\alpha \neq 0$ が必要であることに気づく．($\alpha = 0$ なら行き先は零ベクトルだけになってしまうぞ！）$\alpha \neq 0$ なら像空間は O.K.

さらに核空間を考えると，上で既に展開した議論から，これで十分とわかる．よって以上から

$$A = \alpha \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} & \boldsymbol{c} & -\boldsymbol{c} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad (\alpha \neq 0)$$

が答え．