2010.4.19.

線形代数　(S-1 クラス)

担当：原　隆（数理学研究院）：伊都キャンパス数理研究教育棟 219 号室，phone: 092-802-4441,
e-mail: hara@math.kyushu-u.ac.jp,　http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html

Office hours: 月曜の午後５時半〜６時半頃，僕のオフィスにて（ただし，その前のセミナーが長引いた場合には少し待って頂くことになります）．なお講義終了後にも質問を受け付けますし，これ以外でもお互いの都合の良い時間にお相手します．

概要：理学部物理学科の学生さん向けに,「線形代数」を講義する．通年講義なので，１年が終わった時点で

1. 「行列」「逆行列」,「行列式」などの計算ができるようになり，
2. 「固有値と固有ベクトル」「行列の対角化」も使いこなせて，
3. 「線型とは」「線型空間」「一次独立」などの重要な概念も理解する，

の３点ができるようになることを目標とする．

キーになる概念：行列，逆行列，行列の基本変形，線形空間，線形独立，線形写像,（行列式）,（固有値と固有ベクトル）,（行列の対角化）．括弧の中は主に後期の内容．

内容予定：（以下は大体の目安です．皆さんの理解の程度などにより，ある程度の変更はあり得ます.）

1. ３次元空間のベクトル，平面や直線の表し方，複素数
2. ベクトル（と線形空間)，特に「一次独立」「基底」などの概念
3. 行列の演算
4. 線形写像，核空間と像空間，写像の合成
5. 連立一次方程式と逆行列の計算（この一部は秋学期かも）

教科書：

- 内田・高木・剱持・浦川「線形代数入門」裳華房

参考書：

- 斉藤正彦「線形代数入門」（東大出版会）．少し難しいだろうが，今でも定番の教科書．物理学科（特に理論を目指す人）にはこのくらいは理解して欲しい．
- Feynman Lectures on Physics, vol. 3 （邦訳は「ファインマン物理学第５巻」）これは量子力学に関する本だが，僕は線形代数の本質をこの本から学んだ．量子力学の数学的構造はほとんど線形代数だから，これは不思議なことではない．
- これ以外に，講義ノートのようなものを作成し，皆さんがダウンロードできるようにする（講義で配布することもある）．以下の URL（http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html）から，この科目のページをご覧ください（4/18 現在，改訂版を作成中.）
- 更に，僕の友達の田崎晴明さんの書きかけの本「数学：物理を学び楽しむために」がお勧めだ．これは彼の web page (`http://www.gakushuin.ac.jp/~881791/mathbook/`) からダウンロードできるので，興味のある人は自分で取ってみてほしい．田崎さんはおもしろい日記も書いているから，そちらもお奨め．

評価方法：主に中間試験（＋レポート）と期末試験の成績を総合して評価する．そのルールは以下の通りだが，優（A）を狙うには特別の関門があるので，後の但し書きを良く読む事．

- 最終成績は一旦，１００点満点に換算してから，この大学の様式に従ってつける．
- その１００点満点（最終素点）は，以下のように計算する．
  - まず,「中間試験の点」「期末試験の点」をそれぞれ 100 点満点で出す．

– 次にこの２つを以下の式で「平均」し，一応の総合点を出す：

$$（総合点\ A）= 0.60 \times（中間の点）+ 0.40 \times（期末の点）$$

– ただし，上の計算式の重みを若干変更する可能性はあることを承知されたい（例えば，総合点 A で，中間と期末の比を 5 : 5 にするなど）.

– 最終素点は

$$（最終素点）= \max\{（総合点\ A）,（期末の点）\}$$

とする．つまり,（総合点 A）と（期末の点）を比べて，良い方をとるのだ.

- 上の「最終素点」をよく見て，必要ならば全体に少し修正（例：全員に下駄をはかせるとか）を加えたものをつくり，これをこの大学の基準と合わせて最終成績を出す.
- レポートは原則としては総合点 A には加えない．しかし，上の計算では合格基準に少し足りない人（百点満点で 10 点不足が限度）を助けるかどうかに使用する．また，チャレンジ問題などでずば抜けた解答をした人にも特例措置を講ずるかもしれない.

（A をとるための重要な但し書き） 期末試験ではあまり冒険をする訳にはいかず,（A と B の区別をつけるような）極端に難しい問題は出題しにくい．そのため，中間試験にも A, B の峻別を行う機能をある程度持たせて，中間・期末ともに成績優秀な人にのみ，A をあたえるようにする可能性がある —— 特に，期末を簡単にしすぎた場合はこうなる．この意味で，A をとるためには期末だけでの一発逆転は無理かも知れない．A を狙って頑張る人はこの点を考慮して，中間・期末とも確実に受験してほしい.

（期末一発逆転を可能にする理由）この講義では（上位 10%の人だけがわかるような）進んだ話題はあまり扱わない．そのため,「できる」人が退屈することも考えられる．そのような人には自主的な学習を奨める意味で,「期末で一発逆転」も可能なようにした．ただし,「期末の一発勝負」がうまくいく人はそれほど多くないだろう（期末試験は中間試験やレポートよりは難しい）から，あくまで自己責任でやってくれ．期末の一発勝負で成績が悪くても，苦情は一切受け付けないからね！(できる人が少ないだろうけどもこの形式をとるのは，僕の美学にこだわっているからである.）

「学習到達度再調査」（？）について：

この大学には「学習到達度再調査」なる変な制度があるらしい．これに変に期待する人がいるかもしれないので，ここではっきり宣言しておこう.

> 「再調査」は行わない可能性が高い — 今学期，原はたくさん教えているので，その余裕がない．もし行うとしても，その権利を得るのはギリギリで不合格になった人だけで，誰を対象とするかは，こちらの一存で（もちろん，公平に，しかし厳しく）決めさせていただく．また，再調査をしてもダメな人も出現しうる（過去にもたくさん存在した）.

（再調査とは独立に，正規の理由があれば追試験は行うのでご安心を.）

更に付言するならば，再調査をする方が，こちらとしては厳しく点を付けやすい（厳しく採点して，誰を助けるかは再調査できちんと確かめれば良いから）．だから，このようなものには頼らず，期末試験でちゃんと合格できるよう，しっかり学習して下さい．期末試験までなら皆さんの学習を助ける努力は惜しまないつもりで，質問などにも忍耐強く相手することを保証する.

なお，言うまでもないことであるが，いくら進級や卒業がかかっていても，単位の出せないものは出せないことは理解されたい.（いわゆる「泣き落とし」は通用しないばかりか，逆効果であるからそのつもりで.）下の合格基準に述べるように，普通に勉強してれば十分に単位が取れる仕組みにはしてあるから姑息なことは考えないように.

合格（最低）基準: 合格のための条件は，講義中に出題する例題（やレポート問題）と同レベルの問題が解けることである．具体的には今学期は大体，以下のようになるだろう（進度の都合で若干の変更があることをご了承願いたい）.

- 一次方程式が解ける．解が不定や不能の場合ももちろん，含む.

- 逆行列が求められる．
- 一次従属，一次従属，基底などの意味がわかり，与えられたベクトルの組が独立か従属か判定できる．
- 線形写像の意味が理解できる；具体的には与えられた写像が線形かどうか判定できる，またその像空間や核空間が計算できる．
- （以上は最低基準，最低でなければ）線形空間の概念が理解できている．

レポート，宿題，教科書の問題，演習の問題について：

講義中に何回か，簡単なレポートや「お奨めの宿題問題」を出すだろう．これらの出題の意図は「この程度できれば講義についていけるし，合格も可能だ」という目安を与えることと家庭学習の引き金にすること，である．成績評価に占めるレポートの比重は低いが，この講義をこなす上では重要な意味があるので，やってみること．「レポート」の作成はみんなで協力してやっても構わないし，むしろ協力することを奨励する．ただし、（友達と協力してレポート問題を解いた場合でも）各人のレポートは自分の言葉で記述し、かつ、「〇〇君と一緒に考えました」とぐらいは書くべきだ．また，教えてもらった事はそのままにせず，自分でもう一回考えて納得しておく事．（これらは高校までで身に付いているべきだが，どうも怪しい人が多いようだから書いておく．）

また，当然のことではあるが，講義で進んだ部分に該当する教科書の問題くらいは全問，やっておくこと．

プリントの使いかた：

教科書に加えて，僕自身の書いたプリントも用いる．**ただし，印刷したものを配布する代わりに，各自で僕の web page からダウンロードしてもらうことにする可能性も高い．** これらのプリントは板書にアップアップしないでも講義が聴けるように，また，教科書の足りないところを補うために，作ったものである．なお，急いで作っているためにタイプミスなどがかなりあると思うので，気づいたらできるだけ指摘してくれるとありがたい．

勉強法などについて：

大学での数学では高校での数学にもまして，論理的思考力が要求されます．特にこの科目（線形代数）では**線型空間の概念**にとまどうことも多いと思います．そのような場合に困らないためには，

１．最低限の計算力を身につける．僕の出すレポート問題，教科書の問題，自分で選んだ演習書などをともかく自分でやってみる．

２．論理的に考える癖も身につける．何となくウザイと思っても嫌がらずに，教科書や講義での論理展開を自分で追って（再現して）みる

ことがかなり役に立つはずです．

ついでに大学での理想の勉強法について書いておきます．

- 第一原則として，**自分の納得するまで考えて，理解する**ことを目指す．
- でも行き詰まったら，気分転換も兼ねて演習書などをやる．具体的に手を動かすことで,「わかったつもりで全然わかってない」ことが見つかるかもしれない．
- 新しい概念などがわからない時は，その「定義」がそもそもわかってないことが非常に多い（特に線型代数ではそうである）．**重要な概念の定義が言えるか**，自答しよう．定義が言えない時は定義を覚えられるまで，**具体例を考えよう．**（意味もわからずに定義を丸暗記するのは，たいていの場合は無駄だが，やらないよりはましかも．）具体例さえ思い浮かばない時はかなりの重症です．友達や教官に質問しましょう．
- 定義，定理などでは**反例を常に思い浮かべる**ようにする．「定理のこの条件がなくなったらどこが困るのか」などを考えると，より身近に感じられて理解が深まる．
- （最後に）ここは大学で，これまでのように手取り足取りはしてくれない（少なくとも僕はしない）ことを思い出そう．皆さんが自分から動けば道は開けるけども，**助けてくれるのを待っているだけでは何も解決しない**よ．

特に一言：この講義に出てくるいろいろな概念は，ゆっくり考えればそれほど難しいものではありません．しかし，**高校までの数学に対して抽象度が高く**，とくに「線形空間」「線形写像」の概念をつかむのにかなり苦しむことも考えられます．決して甘く見ずに，着実に学習することをお奨めします．なお，参考書として掲げた「ファインマン物理学」は案外，役に立つかもしれません．**しつこいけども，答えの丸暗記はお奨めしない．遠回りに見えても，どんなに苦しくても，納得するまで考えることが最短の道である．**

この科目に関するルール：世相の移り変わりは激しく，僕が学生だったときには想像すらできなかったことが大学で行われるようになりました．そのうちのいくつかは良いことですが，悪いこともあります．オヤジだとの批判は覚悟の上で，互いの利益のために，以下のルールを定めます．

- まず初めに，学生生活の最大の目的は勉強すること であると確認する．
- 講義中の私語，ケータイの使用はつつしむ．途中入室もできるだけ避ける（どうしても必要な場合は周囲の邪魔にならないように）．これらはいずれも講義に参加している 他の学生さんへの 最低限のエチケットです．
- 僕の方では時間通りに講義をはじめ、時間通りに終わるよう心がける．
- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義を通して行う（補助として僕のホームページも使う —— アドレスは最初に載せた）．「講義に欠席したから知らなかった」などの苦情は一切，受け付けない．
- レポートを課した場合，その期限は厳密に取り扱う．
- E-mail による質問はいつでも受け付ける（hara@math.kyushu-u.ac.jp）ので積極的に利用するように．ただ，回答までには数日の余裕を見込んで下さい．

本論に入る前に記号のお約束．

$a < b$ を 2 つの実数，n を非負（負でない）整数とする．

- 整数の全体は $\mathbb{Z}$，自然数（1 以上の整数）の全体を $\mathbb{N}$，有理数の全体を $\mathbb{Q}$，実数の全体を $\mathbb{R}$，複素数の全体を $\mathbb{C}$ と書く．
- 集合 A の要素を大学では「元（げん）」ともいう．(例) 2 は $\mathbb{Z}$ の元である．$\sqrt{2}$ は $\mathbb{Q}$ の元ではない．
- 高校までと異なり,「$a < b$ または $a = b$」を $a \leq b$ と書く（不等号の下が 2 本線ではなく，1 本線）．同様に,「$a > b$ または $a = b$」を $a \geq b$ と書く．
- $a < x < b$ なるすべての実数の集合を (a, b) と書き，開区間 という．$a \leq x \leq b$ なるすべての実数の集合を $[a, b]$ と書き，閉区間 という．
- 高校と同じく，$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ は n の階乗 である．ただし，$0! = 1$ と約束する．

(用語の注）あるものがたった一通りに決まる（存在する）とき，業界用語では○○**が一意に決まる（存在する）**という．この表現『一意』は頻出するから覚えよう（英語の unique, uniquely の訳）．

(用語の注）本来，この科目名は「線型代数」とするのが正しい（形と型は違う）．しかし，いつ頃からか「形」を使うのが主流になってしまった．仕方ないので，この科目でも「形」を使うことがあるが，かなりの部分,「型」と書いてしまうこともあるだろう．そのような場合は「線型＝線形」と読み替えて下さい．

わからない記号が出てきたら，また，僕がおかしなことを言ってると思ったら，質問（または指摘）して下さい．僕の言ってることがわからないままに一時間も座っているのは時間の無駄です．あなたがわからない時は，隣の友達も多分，わかってないでしょう．だから，勇気をだして発言して下さいね．僕は変な人格攻撃以外で激高する（した）ことはありません.（かなりの人格攻撃でも表面上は受け流せると思っているのだが，試さないでね.）

4 月 19 日の講義について：今日は第一回なので簡単なところから．大半は高校の復習です．

４月２６日：今日は平面の方程式，およびベクトルの一次結合くらいまで．

第１回レポート問題： あまり進んでいないので，ちょっと面白くないですが，平面に関する簡単な計算問題をだしました．なお，講義でも注意したように，黒板ではベクトルは縦ベクトルの形で書きます．でも，講義ノートではスペースの節約のため横ベクトルの形で書くことも多いので，ご了承ください．

問１： 以下の条件を満たす平面の方程式を求めよ．
(i) 点 $(4, 1, 1)$ を通り，ベクトル $(1, 1, -2)$ に垂直な平面
(ii) 点 $(1, 2, 3)$ を通り，平面 $3x + y - z = 4$ に平行な平面
(iii) ３点 $A(2, -1, -2), B(1, 2, -2), C(1, 1, -3)$ を通る平面

問２： 上の問１の (i), (iii) の平面のそれぞれを「パラメーター表示」で表せ．(表し方は一通りとは限らないから，ひとつだけ書けば良い．)

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

上の問に解答し，

5 月 6 日（木）13:00 （時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

なお，今回は連休を挟むので，変則的なレポート締め切り日時になっています．第 2 回以降のレポートの締め切り日時は，別の曜日になる可能性も高いので，注意して下さい．

５月１０日：今日は線形独立（一次独立）を中心にやります．

第２回レポート問題： １次結合と１次独立などについての問題です．なお，講義でも注意したように，黒板ではベクトルは縦ベクトルの形で書きます．でも，講義ノートではスペースの節約のため横ベクトルの形で書くことも多いので，ご了承ください．レポート問題は学期を通して番号をつけますので，今日は問３からになります．レポート問題は「その題材に関して典型的な問題を１個だけ」に限定して出しています．言うまでもないことですが，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問３： ベクトル $\boldsymbol{a}, ..., \boldsymbol{e}$ を

$$\boldsymbol{a} := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} := \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e} := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

とする．以下のベクトルの組が１次独立か１次従属かを判定せよ．更に可能ならば，カッコの中のように，指定されたベクトルを他のベクトルの線形結合で表せ（表し方が一通りに定まらない時は，一つの表し方を書けば良い）．

1. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の３つのベクトル（もし表せるならば，$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の線型結合で表せ）
2. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の３つのベクトル（もし表せるならば，$\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の線型結合で表せ）
3. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ の４つのベクトル（もし表せるならば，$\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ の線型結合で表せ）

問 4*： （この問題は少し「抽象的」なので，出来なくても悲観するには及ばない）２次以下の多項式の作るベクトル空間を V とし，そのベクトル $\boldsymbol{a}, \ldots, \boldsymbol{e}$ を

$$\boldsymbol{a} = x^2 + 2x, \quad \boldsymbol{b} = x^2 + 3x + 2, \quad \boldsymbol{c} = x + 1, \quad \boldsymbol{d} = x^2 - 2, \quad \boldsymbol{e} = 1$$

とする．以下のベクトルの組が１次独立か１次従属かを判定せよ．更に可能ならば，カッコの中のように，指定されたベクトルを他のベクトルの線形結合で表せ（表し方が一通りに定まらない時は，一つの表し方を書けば良い）．

1. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の３つのベクトル（もし表せるならば，$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の線型結合で表せ）
2. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の３つのベクトル（もし表せるならば，$\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の線型結合で表せ）
3. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ の４つのベクトル（もし表せるならば，$\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ の線型結合で表せ）

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

上の問に解答し，

5 月 17 日（月）　12:45 （時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

先週のレポートの略解

問１： ともかくやるだけ．

(i) 法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = (1, 1, -2)$ で点 $\boldsymbol{x}_0 = (4, 1, 1)$ を通るから，平面の方程式は $\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$ となるはずだ．これを成分で書き下すと

$$(x - x_0) + (y - y_0) - 2(z - z_0) = 0 \qquad \text{つまり} \qquad x + y - 2z = x_0 + y_0 - 2z_0 = 3$$

となる．

(ii) 平面 $3x+y-z=4$ に平行ということは，法線ベクトルが $(3,1,-1)$ ということだ．後は (i) と同様に計算して

$$3x+y-z=2$$

が答え．別解としては答えが $3x+y-z=d$ の形になることを用いて，点 $(1,2,3)$ が平面上にあるように $d=3\times1+2-3=2$ と定めてもよい．

(iii) 地道には平面の方程式を $ax+by+cz=d$ の形に仮定して，この平面上に 3 点が存在する条件，つまり

$$\begin{cases} 2a-b-2c=d \\ a+2b-2c=d \\ a+b-3c=d \end{cases}$$

を解けば良い．答えは一意には決まらないが，

$$a=\frac{3}{7}d, \qquad b=\frac{1}{7}d, \qquad c=-\frac{1}{7}d$$

と求まる．$d=0$ ならすべてゼロになって意味のない結果になるから，$d\neq0$ を考えると，平面の方程式は

$$\frac{3}{7}d\,x+\frac{1}{7}d\,y-\frac{1}{7}d\,z=d \qquad \text{つまり} \qquad 3x+y-z=7$$

となる．

（別解）ベクトルの外積 $\vec{AB}\times\vec{AC}$ を計算すれば，この平面の法線ベクトルが一発で求まるから，後は (i) のように解けば良い．

問 2： (iii) の方が簡単だから，こっちから行こう．この場合，平面上の 3 点 A,B,C が与えられているから，

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_A=s\vec{AB}+t\vec{AC} \qquad (s,t\in\mathbb{R})$$

がパラメーター表示の式である（$\boldsymbol{x}_A$ は点 A の位置ベクトル）—— もちろん，この場合，$\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ が平行であってはいけないが，これは大丈夫．具体的に成分で書くと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad s,t\ \text{は任意の実数}$$

が一例である．もちろん，他にもいろいろな表し方はある．これらはすべて，点 A,B,C のいろいろな取り方に対応している．$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+s\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{q}$ と書いたときの $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ の取り方の例は以下の通り：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix},$$

(i) ともかく，法線ベクトルに直交する（平行でない）ベクトルを 2 つ，求めよう．そのために，平面上の 3 点を適当に求める．題意から $A(4,1,1)$ が平面上にあることはわかっている．これ以外に（例えば $y=0,z=1$ や $y=1,z=0$ の時の x 座標を，問 [1] の (i) の平面の方程式に代入して求めるつもりになって）$B(2,1,0)$ と $C(5,0,1)$ も平面上にある．更にこの時，$\vec{AB}=(-2,0,-1)$ と $\vec{AC}=(1,-1,0)$ は平行ではない．よって，$\boldsymbol{x}_0=(4,1,1)$ として

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0=s\vec{AB}+t\vec{AC}, \qquad \text{つまり} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s,t\ \text{は任意の実数}$$

がパラメータ表示（の一例）である．もちろん，他にもいろいろな表し方はある．これらはすべて，点 A,B,C のいろいろな取り方に対応している．$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+s\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{q}$ と書いたときの $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ の取り方の例は以下の通り：

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

実はこれらはすべて，皆さんのレポートにあったものばかりである（これだけ色々出て来たということは，自力でやった人が一杯いたということですね．大変よろしい．）これらはすべて互いに平行でないから，好きなもの 2 つを選べば良い．

（別解）実は (i), (iii) ともに，既に平面の方程式を求めているのだから，適当に $x=s,y=t$ などとおいて，z を s,t で表せばパラメーター表示になる．この方法が一番簡単だろう．例えば (iii) なら $3x+y-7=z$ が平面の方程式だから，$x=s,y=t,z=3s+t-7$（s,t は任意の実数）というのが一つの解である．

5 月 18 日の連絡：２〜４週間後に中間テストをする可能性が高いので連絡を聞き漏らさないように．
今日のキーワード：一次独立，一次従属，基底，(線形空間)

第３回レポート問題：基底についての問題です．言うまでもないことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問５： ３項列ベクトルの組（あ）〜（え）を以下のように定義する．それぞれが $\mathbb{R}^3$ の「基底」になっているか，なっていないか，理由とともに答えよ．

（あ） $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の３本．

（い） $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ の２本．

（う） $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の３本．

（え） $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の４本．

ヒント：「基底」の定義の２つの条件（一次独立である，全てのベクトルを線型結合で表せる）が満たされているか，地道に確かめるのが本筋．(今日の講義でもう少し良い方法をやるかもしれないが.)

問 6*： ３次以下の多項式の作る線型空間を V とし，多項式（をベクトルとみなしたもの）の組（あ）〜（え）を以下のように定義する．それぞれが V の「基底」になっているか，なっていないか，理由とともに答えよ．ただし，その理由は問５よりも簡単であってもよいとする（連立方程式を一杯解くのは大変だろうから）．

（あ） $\boldsymbol{a} = 1, \boldsymbol{b} = x, \boldsymbol{c} = x^2$
（い） $\boldsymbol{a} = 1, \boldsymbol{b} = x, \boldsymbol{c} = x^2, \boldsymbol{d} = x^3$
（う） $\boldsymbol{a} = x^2 + 1, \boldsymbol{b} = x^3 + x, \boldsymbol{c} = x - 1, \boldsymbol{d} = x^3 - x^2$
（え） $\boldsymbol{a} = x^2 + 1, \boldsymbol{b} = x^3 + x, \boldsymbol{c} = x - 1, \boldsymbol{d} = x^3 + x^2$

注意：以下の問７は進度の関係で**来週のレポート問題**とします．今週は解く必要はありません．

問７： ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の成分に対して，以下のように制限を付けて，$\mathbb{R}^3$ の部分集合 W を作る．この W が $\mathbb{R}^3$ の部分空間になっているかどうかを考えて，部分空間になっていないものについては「なぜ部分空間でないのか」の理由を答えよ．また，部分空間になっているものについては，その基底を一つ，答えよ．

(1) W は $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ を満たすような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体．

(2) W は $x_1 + x_2 - x_3 = 1$ を満たすような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体．

(3) W は $x_1 - (x_2)^3 = 0$ を満たすような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体.

(4) W は x_1 が整数であるような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体.

(5) W は $x_1 = 0$ または $x_2 = 0$ であるような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体.

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ.

レポート提出について：

上の問 5 と問 6 に解答し，

5 月 24 日（月）　12:10 （時刻は 24 時間制；先週より 35 分早い！）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法（ゼムクリップは不可）で綴じてくだされ.

先週のレポートの略解

問 3：

1. $c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{c} + c_3\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ を成分毎に書くと

$$c_1 + c_3 = 0, \qquad c_1 + c_2 - c_3 = 0, \qquad c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

の３本の連立方程式になるが，この解は，$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ しかない．従って，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ は一次独立である．また一次独立なので，$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の線型結合で書くことは不可能.

2. $c_1\boldsymbol{b} + c_2\boldsymbol{c} + c_3\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ を成分毎に書くと

$$2c_1 + c_3 = 0, \qquad -c_1 + c_2 - c_3 = 0, \qquad 3c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

となるが，この解は $c_1 = t, c_2 = -t, c_3 = -2t$ （t は任意の数）であって,「すべてゼロ」以外の解が存在する．従って一次従属である．また，上の解から

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$$

となっているので，これを移項して $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{d}$ と線型結合で書ける.

3. 今度は $c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} + c_3\boldsymbol{c} + c_4\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ を解くことになる．成分毎に書くと,

$$2c_1 + c_3 + c_4 = 0, \qquad -c_1 + c_2 - c_3 = 0, \qquad 3c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

を解くことになるが，これは未知数が 4 つ，方程式の数が 3 つ，なのでゼロ以外の解があるのは明らかだ（なぜ明らか，かは今学期の最後の方でやる）．実際に解いてみると，$c_4 = 0, c_2 = -c_1, c_3 = -2c_1$ ならよい（c_1 は任意の数）．このように「すべてゼロ」ではない解を持つから，一次従属だ．またこれから

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0} \qquad \text{つまり} \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{d} = \boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{d} + 0\boldsymbol{e}$$

と線形結合の形で書ける．（線型結合で書く場合，特に最右辺のように $0\boldsymbol{e}$ と書く必要はないが，念のために書いておいた．真ん中のように書いても「$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ の線型結合」で書いたことにはなっている.）

（注意）

- 小問 3 については，実は小問 2 で既に $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{d}$ と書けることがわかっているので，一次従属であることはわかっているし，かつ，このように線型結合で書けることもわかる．この意味で，小問 3 を新たに解く必要は全くないのだが，上では小問 2 を知らなかったフリをして解いてみた．
- ベクトルは太字で書きましょう．実のところ，もっと高度な数学になるとベクトルも普通の字体で書きます．しかし，今のレベルではベクトルとスカラーの区別をちゃんとつける意味で，ベクトルは太字で書きましょう．
- 小問 1 に関しては，$\boldsymbol{a} = k_1\boldsymbol{c} + k_2\boldsymbol{d}$ と書けるかどうか，だけを考えて，「このように書けないから一次従属」とした人が多数いました．これは厳密には間違いです．一次従属の定義（または定理）を思い出してもらえばわかるように，$\boldsymbol{a}$ だけでなく，$\boldsymbol{c} = k_3\boldsymbol{a} + k_4\boldsymbol{d}$，および $\boldsymbol{d} = k_5\boldsymbol{a} + k_6\boldsymbol{c}$ の残り 2 つも否定して初めて一次従属と言えるのです．ここは間違い易いから注意のこと．

問 4： この問題は実は見かけ倒しである．多項式の作る空間をベクトル空間とみなす，ということは，単に（中学以来の）多項式の計算（定数倍と足し算，引き算）をやれ，ということだ．以下，念のために言葉を翻訳しながら説明する．

1. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ が一次独立であるか否かを判断したいのだから，問 [3] と同様に，$c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{c} + c_3\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ を解けば良い．ここで，c_i 倍や「足し算」は中学以来の多項式の演算をやればよいから，

$$c_1(x^2 + 2x) + c_2(x + 1) + c_3(x^2 - 2) = 0$$

を解けば良いのだ．

ただし，このイコールの意味には注意が必要．上のイコールは，**両辺が x の多項式として等しい**，ことを主張している．つまり，上の式が**全ての x について成り立つ**（x の恒等式である）ことを主張している．

ということは，上が成り立つ必要十分条件は，x^n の係数を（$n = 0, 1, 2$）比較して

$$c_1 + c_3 = 0, \qquad 2c_1 + c_2 = 0, \qquad c_2 - 2c_3 = 0$$

ということになる．この解は $c_1 - c_3, c_2 = 2c_3$（c_3 は任意）となる．従って，

$$-\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$$

であるので，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ は一次従属である．また，$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$ と，線型結合の形で表せる．

2. 同様に，$c_1\boldsymbol{b} + c_2\boldsymbol{c} + c_3\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ を解く．これは

$$c_1(x^2 + 3x + 2) + c_2(x + 1) + c_3(x^2 - 2) = 0$$

ということ（これが x の恒等式として成り立て！）だから，

$$c_1 + c_3 = 0, \qquad 3c_1 + c_2 = 0, \qquad 2c_1 + c_2 - 2c_3 = 0$$

とを解けば良い．この解は $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ しかないので，一次独立である．また，$\boldsymbol{b}$ を他の 2 つの線型結合で表すことはできない．

3. 今度は $c_1\boldsymbol{b} + c_2\boldsymbol{c} + c_3\boldsymbol{d} + c_4\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$ を解くことになる．これは

$$c_1(x^2 + 3x + 2) + c_2(x + 1) + c_3(x^2 - 2) + c_4 = 0$$

ということ（これが x の恒等式として成り立て！）だから，

$$c_1 + c_3 = 0, \qquad 3c_1 + c_2 = 0, \qquad 2c_1 + c_2 - 2c_3 + c_4 = 0$$

を解けば良い．この解は

$$c_2 = -3c_1, \qquad c_3 = -c_1, \qquad c_4 = -c_1 \qquad (c_1 \text{ は任意})$$

となるから，一次従属である．また，上から $c_1 = 1$ とおいて，

$$\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c} - \boldsymbol{d} - \boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$$

であるから，

$$\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{e}$$

と，線型結合の形で表せる．実際，中学以来の多項式の計算をやると

$$x^2 + 3x + 2 = 3(x+1) + (x^2 - 2) + 1$$

となっているので，上のは正しい（検算）．

5 月 24 日の連絡：２〜４週間後に中間テストをする可能性が高いので連絡を聞き漏らさないように． 今日のキーワード：部分空間と基底

第４回レポート問題：

部分空間と基底についての問題です．言うまでもないことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問７： （先週出題して，進度の関係で取りやめになった問題です.）ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の成分に対して，以下のように制限を付けて，$\mathbb{R}^3$ の部分集合 W を作る．この W が $\mathbb{R}^3$ の部分空間になっているかどうかを考えて，部分空間になっていないものについては「なぜ部分空間でないのか」の理由を答えよ．また，部分空間になっているものについては，その基底を一つ，答えよ．

(1) W は $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ を満たすような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体.

(2) W は $x_1 + x_2 - x_3 = 1$ を満たすような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体.

(3) W は $x_1 - (x_2)^3 = 0$ を満たすような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体.

(4) W は x_1 が整数であるような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体.

(5) W は $x_1 = 0$ または $x_2 = 0$ であるような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体.

問８： ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ の成分に対して，以下のように制限を付けて，$\mathbb{R}^4$ の部分集合 W を作る．それぞれの場合，W は $\mathbb{R}^4$ の部分空間になっているが，(1) その次元は何か？また，(2) その基底を一つ，答えよ．

(a) W は $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$ を満たすようなベクトルの全体.

(b) W は $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$ かつ $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$ を満たすようなベクトルの全体.

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ.

レポート提出について：

上の問に解答し，

> 5 月 31 日（月）　12:10 （時刻は 24 時間制）までに，
> 全学教育教務係（センターゾーン１号館２階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，<u>用紙はできるだけ A4</u> を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法（ゼムクリップは不可）で綴じてくだされ.

先週のレポートの略解

今，風邪をひいていてかなりしんどいので，簡単に書きます．多分，間違ってはいないと思うけど，眉に唾つけて読んで下さい（流石に解き方を間違うつもりはないが，細かい計算については保証できない）．

問 5： 基底の条件は (1) 一次独立である (2) 全てのベクトルを基底の線形結合で表せる，ことだったから，これをチェックして行く．実は今日やるところ（$\mathbb{R}^3$ の次元は 3）を用いると一次独立か否かのみチェックすれば良いのだが，地道に両方チェックする．

（あ） $c_1\boldsymbol{a}+c_2\boldsymbol{b}+c_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ を解くと，$c_1=-c_2, c3=-2c_2$（c_2 は任意）となる．ので，これは一次従属だから，基底ではない．

（い）この 2 本は独立である（地道にやっても良いが，第 1 成分と第 3 成分が片方ずつゼロであることに注意するとすぐにわかる）．しかし，任意のベクトルをこの 2 本の線型結合で表すことはできない．実際，任意の x, y, z に対して

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

と書けるような c_1, c_2 があるかというと，否である（第 1，第 2 成分だけで c_1, c_2 が決まってしまい，任意の z に対しては第 3 成分の等式が満たせない）．よって基底ではない．

（う）（あ）と同様にやると，今度はこの 3 本は独立とわかる．更に，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

は，任意の x, y, z に対して

$$c_1 = z - y, \qquad c_2 = y - z + x, \qquad c_3 = z - x$$

と云う解をもつ．つまり，任意のベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で書けるのだ．よって基底である．

（え）（あ）と同様にやると，この 4 本は一次従属であることがわかる．よって，基底ではない．

問 6：

（あ）基底ではない．なぜなら，3 次の多項式を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合として表せないから．

（い）普通に 3 次以下の多項式を $c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ と表せ，更にこの 4 つは一次独立なので，基底である．

（う）この 4 つは一次従属である（$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}$）．よって，基底ではない．

（え）この 4 つは一次独立である（先週のレポートのように確かめる）．また，任意の 3 次以下の多項式は

$$\begin{aligned} c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 &= \frac{c_0+c_1+c_2-c_3}{2}(x^2+1) + \frac{c_0+c_1-c_2+c_3}{2}(x^3+x) \\ &\quad + \frac{-c_0+c_1+c_2-c_3}{2}(x-1) + \frac{-c_0-c_1+c_2+c_3}{2}(x^3+x^2) \end{aligned}$$

と書けるので，基底である．

5 月 31 日の連絡：おそらく 6/14 に中間テストをする可能性が高いので覚悟のほどをお願い．
今日のキーワード：一般の線型空間，数ベクトル表現，行列

第 5 回レポート問題：

数ベクトル表現についての問題です．言うまでもないことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問 9： V を x の 3 次以下の多項式の作る線型空間とする（「和」と「スカラー倍」は通常通りに定義）．

(1) 多項式 $\boldsymbol{p} = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3$ の数ベクトル表現を，V の基底として $E = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ をとった場合に求めよ．この数ベクトル表現を $[\boldsymbol{p}]_E$ とする．

(2) 同じく多項式 $\boldsymbol{p} = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3$ の数ベクトル表現を，V の基底として $F = \langle 1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3 \rangle$ をとった場合に求めよ．この数ベクトル表現を $[\boldsymbol{p}]_F$ とする．

(3) 上で求めた 2 つの数ベクトル表現は，同じ多項式 $\boldsymbol{p}$ の，異なる基底についての表現である．一般に異なる基底に関する数ベクトル表現は，それぞれの基底に依存する行列 T を用いて

$$[\boldsymbol{p}]_F = T_{FE}\,[\boldsymbol{p}]_E \qquad \text{右辺は行列 } T_{FE} \text{ と数ベクトル } [\boldsymbol{p}]_E \text{ の積}$$

などと書けることがわかっている（右辺の行列は基底 E, F によって決まるので，その依存性をあからさまにするために添字 $_{EF}$ をつけた）．上の (1)(2) の $[\boldsymbol{p}]_F$ と $[\boldsymbol{p}]_E$ について，行列 T_{FE} を具体的に書き下せ．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：いつもと違うので注意！

上の問に解答し，

6 月 4 日（金）　17:00 （時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，2 枚以上にわたる場合は何らかの方法（ゼムクリップは不可）で綴じてくだされ．

先週のレポートの略解

風邪が大変にしつこくで，まだまだしんどいので，簡単に書きます．多分，間違ってはいないと思うけど，眉に唾つけて読んで下さい（流石に解き方を間違うつもりはないが，細かい計算については保証できない）．なお，スペースを節約するために，$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ を ${}^t(a, b, c)$ と書いたところがあります．

問 7：

(1) これは部分空間である（3 つの条件をチェックする）．基底の一つは

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

(2) 部分空間ではない．$\mathbb{R}^3$ の零ベクトルが W に入っていない．また.「和」や「スカラー倍」も W の外に出てしまう．

(3) 部分空間ではない．零ベクトルは W に入っているが「和」と「スカラー倍」が一般には W に入らない．例えば，${}^t(1, 0, 1)$ 同士の「和」は ${}^t(2, 0, 2)$ だが，これは W の元ではない．

(4) 部分空間ではない．零ベクトルは W に入っているし,「和」も W に入る．しかし，整数ではない数による「スカラー倍」は成分が整数にならないから，W に入らない．

(5) 部分空間ではない．零ベクトルは W に入っているし,「スカラー倍」も W に入る．しかし,「和」がダメである．例えば，${}^t(0,1,0)+{}^t(1,0,0)\notin W$.

問 8：

(a) $x_1+x_2+x_3-x_4=0$ ということは，$x_4=x_1+x_2+x_3$ さえ満たせば，x_1,x_2,x_3 は任意で良い，ということだ．つまり，W の任意の元は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1+x_2+x_3 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \qquad x_1,x_2,x_3 \text{ は任意}$$

と書ける．右辺に出ている 3 つのベクトルは明らかに一次独立であり，この線型結合で W の任意の元を表せるから，基底になっている．よって，次元は 3，基底の一つは

$$\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} \right\rangle$$

(b) $x_1+x_2+x_3-x_4=0$ かつ $x_1-x_2-x_3-x_4=0$ を解くと，

$$x_2+x_3=0 \quad \text{かつ} \quad x_1-x_4=0 \qquad \text{（これらを満たす限り, } x_j \text{ は任意）}$$

となる．上の 2 つが同値なのは，元の 2 式を足し引きすると新しい 2 式になり，逆に新しい 2 式を仮定すれば元の 2 式が成り立つことからわかる．このような連立方程式の解き方は，もっと系統的に，後でやります．

従って，W の任意の元は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}, \qquad x_1,x_2 \text{ は任意}$$

と書ける．よって次元は 2，基底の一つは

$$\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix} \right\rangle$$

である．

（注）小問 (a) の W を W_a，小問 (b) の W を w_b と書くと，W_b は W_a の部分空間になっている（why?）．このような場合，W_a の基底をうまくとってやると，その基底を作るベクトルから何個かを取り除いて W_b の基底を作ることができる．別の言い方をすると，W_b の基底を作るベクトルに何個かを付け加えて W_a の基底を作ることができる．今の場合，W_a の次元が 3，W_b の次元が 2 であるから，付け加えるベクトルは 1 個である．

実際，上で示した (b) の基底にベクトル ${}^t(0,0,1,1)$ を付け加えて

$$\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} \right\rangle$$

を作ってみると，これは W_a の基底になっていることがわかる（基底になっていることはどうやったら示せるか？）．

6 月 7 日の連絡：6/14 の 3 限（いつもの時間）に中間テストをします．**教室はいつもと異なり，2308 です．**
試験範囲は主に「線型空間（ベクトル空間)」，その主なキーワードは，線型空間，線型結合，一次独立と一次従属，基底と次元，部分空間，などです．更に,「空間内の平面などの方程式」や「行列の足し算とかけ算」なども出題する可能性もあります．
なお,「一般の線型空間」の問題も出す可能性がありますが,「一般の線型空間の定義」（講義ノートの定義 2.7.1）だけは問題用紙に印刷しておきますので，覚える必要はありません．
6/14 の中間試験を「公欠」などで受けられないことが予想される人は，事前に原（hara@math.kyushu-u.ac.jp）までお知らせください．
今日のキーワード：行列のかけ算など．(今日は試験直前なので，レポートの出題はありません．)

先週のレポートの略解

問 9：

(1) 与えられた $\boldsymbol{p}$ は，問題にしている基底 E で展開した形になっている．だから，

$$[\boldsymbol{p}]_E = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

(2) $\boldsymbol{p} = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3$ を基底 F で展開してみる．そのためには，

$$p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 = q_0 + q_1(x+1) + q_2(x+1)^2 + q_3(x+1)^3$$

とおいて右辺を展開し，x^n の係数を比較するとよい —— もちろん，q_0〜q_3 を並べたものが $[\boldsymbol{p}]_F$ である．また，係数を求めるもう一つの手としては，以下も有効である：$y = x + 1$ つまり，$x = y - 1$ とすると上の式は

$$p_0 + p_1(y-1) + p_2(y-1)^2 + p_3(y-1)^3 = q_0 + q_1 y + q_2 y^2 + q_3 y^3$$

となるから，この両辺を展開して y^n の係数を比べてもよい．ともかく結果は

$$[\boldsymbol{p}]_F = \begin{bmatrix} p_0 - p_1 + p_2 - p_3 \\ p_1 - 2p_2 + 3p_3 \\ p_2 - 3p_3 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

(3) まあ，上の結果を良く眺めて，下の左の式が成り立つように行列 T_{FE} を求める：

$$\begin{bmatrix} p_0 - p_1 + p_2 - p_3 \\ p_1 - 2p_2 + 3p_3 \\ p_2 - 3p_3 \\ p_3 \end{bmatrix} = T_{FE} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \qquad \text{結果は} \qquad T_{FE} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である．

6 月 21 日の連絡：このプリントは講義終了後の夜に作りました．ただし，内容は講義で言ったことと同じです．中間試験では一つ，出題ミスがありました．そのため，採点に手間取り，今日は試験答案を返却できません．来週，6/28 に必ず返却します．
今日のキーワード：いろんな行列，線型写像

第 6 回レポート問題：線型写像の簡単な問題です．言うまでもないことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問 10： 講義に配った「講義ノート」p.20 の問 2 を解け．再録すると問 2 とは以下の通り：

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が線型写像で，$f(3) = 1$ だと言う．このとき，$f(5)$ はいくらか？
- 上の f に対して，$f(x) = 10$ となる x を求めよ．

問 11： 講義に配った「講義ノート」p.20 の問 3 を解け．再録すると問 3 とは以下の通り：

- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が線型写像で，$g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ かつ，$g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ だと言う．このとき，$g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ と $g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ を求めよ．
- 上の g に対して，$g(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ となるようなベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ を求めよ．

問 12： 講義に配った「講義ノート」p.20 の問 4 を解け．再録すると問 4 とは以下の通り：

- $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ が線型写像で，$h\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$h\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ かつ，$h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ だと言う．このとき，$h\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ と $h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ を求めよ．
- 上の h に対して，$h(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ となるようなベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ はあるか？

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：

上の問に解答し，

> 6 月 28 日（月） 12:10 （時刻は 24 時間制）までに，
> 全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法（ゼムクリップは不可）で綴じてくだされ．

6 月 28 日：今日は線型写像，特にその表現行列です．
今日のキーワード：線型写像，表現行列.（時間があれば）核空間と像空間

第 7 回レポート問題：線型写像の簡単な問題です．言うまでもないことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問 13： 写像 f が以下の性質を満たしている．それぞれの場合について，f が線型写像ではあり得ないものを挙げ，その理由（なぜ線型写像でないか）を説明せよ．

(a) f は実数から実数への写像で，$f(1) = 2, f(3) = 4$

(b) f は 2 項縦ベクトルの空間 $\mathbb{R}^2$ から実数 $\mathbb{R}$ への写像で，$f\Big(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\Big) = 1$ かつ $f\Big(\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\Big) = 2$

(c) f は 3 項縦ベクトルの空間 $\mathbb{R}^3$ から実数 $\mathbb{R}$ への写像で，$f\Big(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\Big) = 1$ かつ $f\Big(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\Big) = 2$ かつ $f\Big(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\Big) = 3$

(d) f は 3 項縦ベクトルの空間 $\mathbb{R}^3$ から実数 $\mathbb{R}$ への写像で，$f\Big(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\Big) = 1$ かつ $f\Big(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\Big) = 2$ かつ $f\Big(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\Big) = 4$

問 14： 行列 A，および $\mathbb{R}^3$ の基底 E, F を以下のように定義する：

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\\2 & 2 & 2\end{bmatrix}, \qquad E = \left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle, \qquad F = \left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \right\rangle$$

また，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に $A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を対応させる写像として，線型写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を定義する（ここで $A\boldsymbol{x}$ は行列 A とベクトル $\boldsymbol{x}$ の積である）．

(1) 基底 E, E に関する f の表現行列は何か？（アタリマエの答えになるが，念のために訊いた.）

(2) 基底 F, F に関する f の表現行列を求めよ.（この基底 F がどんな意味を持っているかは来学期のお楽しみ.）

問 15： V を x の 2 次以下の多項式の空間（和とスカラー倍はいつも通り定義）とし，線型写像 f を「$p(x)$ を $q(x) := p(x+1)$ にうつす写像」として定義する．V の基底 $\langle 1, x, x^2 \rangle$ に関する f の表現行列を求めよ．

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：

上の問に解答し，

7 月 5 日（月） 12:10 （時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，2 枚以上にわたる場合は何らかの方法（ゼムクリップは不可）で綴じてくだされ．

先週のレポートの略解

問 10： f が線型なので，任意の $k, x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$f(kx) = kf(x)$$

が成り立つはず.（共に実数で区別しにくいが，k はスカラー倍の k，x はベクトルの x のつもり）．

よって，

$$f(5)=f\Big(\frac{5}{3}\cdot 3\Big)=\frac{5}{3}f(3)=\frac{5}{3}.$$

また，$f(x)=10$ のとき，$x=k\cdot 3$ と表せる k を探すと（$x\neq 0$ は明らかゆえ，こんな k は絶対にある），

$$10=f(x)=f(k\cdot 3)=kf(3)=k$$

より，$k=10$．よって $x=30$ が答え．

問 11： ノリは問 10 と同じである．$\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$ のとき，$f(\boldsymbol{x})=\alpha f(\boldsymbol{a})+\beta f(\boldsymbol{b})$ であるから，求めたいベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ に対して，上のような表現を行えば良い．具体的には

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

であるから，

$$f\Big(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\Big)=\frac{1}{2}f\Big(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\Big)+\frac{1}{2}f\Big(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\Big)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix},\qquad f\Big(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\Big)=\frac{1}{2}f\Big(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\Big)-\frac{1}{2}f\Big(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\Big)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

次に，$\boldsymbol{x}=\alpha\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ が $f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$ を満たすなら，

$$\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}=f(\boldsymbol{x})=\alpha f\Big(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\Big)+\beta f\Big(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\Big)=\frac{\alpha}{2}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}+\frac{\beta}{2}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\alpha+\beta\\4\alpha+2\beta\end{bmatrix}$$

となっているはずで，$3\alpha+\beta=-6, 4\alpha+2\beta=10$．これを解くと，$\alpha=-11,\beta=27$．よって，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-11\\27\end{bmatrix}$.

問 12： ノリは問 11 と全く同じである．

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

なので（右辺の 3 つのベクトルは一次独立ゆえ，表し方は一通り），

$$f\Bigg(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\Bigg)=f\Bigg(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\Bigg)-f\Bigg(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\Bigg)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\qquad f\Bigg(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\Bigg)=f\Bigg(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\Bigg)-f\Bigg(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\Bigg)=\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$$

となる．

最後に，$f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$ となる $\boldsymbol{x}$ を求める．

$$\boldsymbol{x}=\alpha\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\implies \begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}=f(\boldsymbol{x})=\alpha f\Bigg(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\Bigg)+\beta f\Bigg(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\Bigg)+\gamma f\Bigg(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\Bigg)=\alpha\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

となるはずだから，$2\alpha+\gamma=-3,\ 2\beta+\gamma=5$ となれれば良い．これは $\beta=\alpha+4,\ \gamma=-2\alpha-3$ なら任意の α でなりたつ．ので，こんな $\boldsymbol{x}$ は存在し，その具体形は（$\alpha\in\mathbb{R}$ は任意）

$$\boldsymbol{x}=\alpha\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+(\alpha+4)\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+(-2\alpha-3)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\0\\1\end{bmatrix}$$

となる．うえで任意のスカラー α がでてきたのが変に思える人もいるかもしれないが，これはベクトル ${}^t(2,1,0)$ が f の核空間を張っていることを理解すればわかる．詳しくは講義で．

7 月 5 日：今日は線型写像，特に核空間と像空間です．
今日のキーワード：線型写像，核空間と像空間

第 8 回レポート問題：線型写像の簡単な問題です．言うまでもないことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問 16： 行列 A を $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ と定義する．さらに $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に $A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を対応させる写像として，線型写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を定義する（ここで $A\boldsymbol{x}$ は行列 A とベクトル $\boldsymbol{x}$ の積である）．以上，問 14 と全く同じ状況である．

(1) f の核空間と像空間をそれぞれ求めよ（集合の形で書け）．

(2) f の核空間と像空間の次元と基底を求めよ．もちろん，基底は何通りもありうるから，基底の一つを答えれば良いが，問 14 の結果の使いやすい方を使うと良いだろう．

問 17： $X = \mathbb{R}^3$ から $Y = \mathbb{R}^3$ への線型写像 f が以下を満たしているという．

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{かつ} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{かつ} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

このとき，

(1) f の核空間と像空間をそれぞれ求めよ（集合の形で書け）．

(2) f の核空間と像空間の次元と基底を求めよ．

(3) **（この小問は進度の関係で取り消しますが，参考までにここに残します）** f の階数を求めよ．

(4) 標準基底に関する f の表現行列を求めよ．

問 18： （おまけの問題）上の問 17 の状況で，X と Y の基底として

$$E = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \qquad F = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

を採用した場合，この基底に関する f の表現行列を求めよ．**（お詫び：上の F は基底になっていません！詳しくは 7/5 のプリントをご覧ください．講義では訂正済みです．**

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：

上の問に解答し，

7 月 12 日（月）　12:10（時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法（ゼムクリップは不可）で綴じてくだされ．

先週のレポートの略解

問 13： 結論から言うと，線型写像ではあり得ないものは (a) と (d) です．一方，(b) と (c) はこれだけの条件では線型写像の条件を全く破っていないので，線型写像である可能性が十分にあります.（本当に (b) や (c) が線型写像であるかどうかを判断するには，問題に与えた以外のベクトルに対する行き先をすべて見る必要があります；これは問題の条件だけではできません.）

(a) が線型写像だとすると $f(3)=3f(1)=3\times 2=6$ のはずだが，これは $f(3)=4$ と与えられたことに矛盾する．

(d) が線型写像だとすると $f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)+f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=1+2=3$ のはずなのに，問題では $f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=4$ となっていて，これは矛盾である．

(b), (c) については，f の引数に入っているベクトルがそれぞれ，一次独立なので，これだけでは何とも断定できません．(d) の方は，3 つのベクトルが線型従属であったので，それぞれの行き先もその線型従属の関係を満たすべきだったのですが，これが満たされてない，というわけです．

問 14： 簡単のため，$E=\langle \boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\rangle$，$F=\langle \boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3\rangle$ と書く．

(1) $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ の E に関する数ベクトル表現は $[\boldsymbol{x}]_E=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ である．つまり，$\boldsymbol{x}$ を基底 E で表現したものは，数ベクトルとしての普通の $\boldsymbol{x}$ の表し方になっている．

問題は要するに，$\boldsymbol{x}$ の行き先 $A\boldsymbol{x}$ を基底 E で展開したものが行列 A とベクトル $[\boldsymbol{x}]_E$ の通常のかけ算で与えられる，と主張している．つまり $[f(\boldsymbol{x})]_E=A[\boldsymbol{x}]_E$ ということである．これはすなわち，この f の表現行列が A そのものであることを意味する．

(2) 今度は基底 F での表現を具体的に作ってやらねばならない．$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ は $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{f}_1+x_2\boldsymbol{f}_2+x_3\boldsymbol{f}_3$ と展開できる．これを f で送ると，線型性から

$$f(\boldsymbol{x})=f(x_1\boldsymbol{f}_1+x_2\boldsymbol{f}_2+x_3\boldsymbol{f}_3)=x_1f(\boldsymbol{f}_1)+x_2f(\boldsymbol{f}_2)+x_3f(\boldsymbol{f}_3)$$

がなりたつ．また，$\boldsymbol{f}_j$ の行き先は定義通り計算すると

$$f(\boldsymbol{f}_1)=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\2&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\\6\end{bmatrix}=3\boldsymbol{f}_1,\quad f(\boldsymbol{f}_2)=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\2&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-2\\2\end{bmatrix}=2\boldsymbol{f}_2,\quad f(\boldsymbol{f}_3)=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\2&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

となっている．従って，行き先が

$$f(\boldsymbol{x})=f(x_1\boldsymbol{f}_1+x_2\boldsymbol{f}_2+x_3\boldsymbol{f}_3)=x_1f(\boldsymbol{f}_1)+x_2f(\boldsymbol{f}_2)+x_3f(\boldsymbol{f}_3)=3x_1\boldsymbol{f}_1+2x_2\boldsymbol{f}_2$$

と展開できた．表現行列の定義を思い出すと，これから直ちに，F に関する表現行列が $\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ とわかる．

問 15： V の任意の元は $\boldsymbol{p}=p_0+p_1x+p_2x^2$ と展開できる．これを f で送ると，

$$q(x)=p(x+1)=p_0+p_1(x+1)+p_2(x+1)^2=p_0+p_1+p_2+(p_1+2p_2)x+p_2x^2$$

に移る．従って，これは

$$\boldsymbol{p}\ \text{の数ベクトル表現が}\quad [\boldsymbol{p}]_E=\begin{bmatrix}p_0\\p_1\\p_2\end{bmatrix}\quad\text{である場合，その行き先が}\quad\begin{bmatrix}p_0+p_1+p_2\\p_1+2p_2\\p_2\end{bmatrix}=[f(\boldsymbol{p})]_E$$

ということを主張している訳である．したがって，$[f(\boldsymbol{p})]_E=A_{EE}\,[\boldsymbol{p}]_E$ となるような表現行列は $A_{EE}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$．

7 月 12 日：今日は線型写像の階数，線型写像の合成です．
今日のキーワード：線型写像の階数，線型写像の合成
今週の金曜日（7/16）は「月曜の授業」ですから，3 限にはこの線型代数の講義をやります．

第 9 回レポート問題：

これまでの問題と重なる部分もありますが，駄目押しの意味で出しておきます．言うまでもないことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問 19： $X = \mathbb{R}^3$ から $Y = \mathbb{R}^3$ への線型写像 f が以下を満たしているという．

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \quad \text{かつ} \quad f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix} \quad \text{かつ} \quad f\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\-1\\-2\end{bmatrix}$$

以下の小問に答えよ（解答の順序はどのようにしても良い．ただし，採点の便宜を考えて，どの小問の答えがどれか，がわかるように明記して下さい．）

(1) f の核空間と像空間の次元と基底を求めよ．
(2) f の階数を求めよ．
(3) 標準基底に関する f の表現行列を求めよ．
(4) $f\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\right)$ を求めよ．

問 20： 3 次以下の x の多項式の全体が作る線型空間（「和」と「スカラー倍」はいつものやつ）を V とする．V の線型写像 F として

$$p(x) \in V \quad \text{を} \quad p'(x) \in V \quad \text{に写す写像}$$

を考える（p' は多項式 $p(x)$ の x に関する微分）．以下の小問に答えよ（解答の順序はどのようにしても良い．ただし，採点の便宜を考えて，どの小問の答えがどれか，がわかるように明記して下さい．）

(1) 基底 $\langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ に関する，F の表現行列を求めよ．
(2) F の像空間と核空間の基底と次元をそれぞれ求めよ．
(3) F の階数は何？

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：

上の問に解答し，

7 月 16 日（金）　12:10（時刻は 24 時間制）までに，
全学教育教務係（センターゾーン 1 号館 2 階）のレポートボックス 42 番に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，2 枚以上にわたる場合は何らかの方法（ゼムクリップは不可）で綴じてくだされ．

先週のレポートの略解

問 16：

(1) まあ，集合の形で書け，と言うことなので，単に像と核を縦ベクトルの集まりとして書けば良い訳です．最も手抜きの書き方としては

$$\text{像は } \left\{ A\boldsymbol{x} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \right\}, \qquad \text{核は } \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$$

というものですが，これはちょっと騙されたみたいな感じがするかもしれません…

そこでもう少し「マトモ」にやってみると以下のようになります．以下，(1)(2) をまとめて解答します．
まず，具体的に写像を書いてみると

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \text{の行き先は} \qquad A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ 2y \\ 2x+2y+2z \end{bmatrix}$$

となっている．
核空間は上の右辺が零ベクトルになるような $\boldsymbol{x}$ の全体だ．具体的には x, y, z が連立方程式

$$x+z=0, \qquad 2y=0 \qquad 2x+2y+2z=0$$

を満たすような $\boldsymbol{x}$ の全体である．この連立方程式は３つの式からなるが，３番目の式は１番目と２番目からすぐにでる．従って，これははじめの２つ，つまり

$$x+z=0, \qquad y=0$$

と同値であり，要するに，$y=0$ かつ $z=-x$（x は任意）というわけ．従って，

$$Ker\ f = \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \,\middle|\, x \text{ は任意} \right\} \text{ であり，その基底の一つは } \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ で，次元は } 1$$

像空間の方は

$$\begin{bmatrix} x+z \\ 2y \\ 2x+2y+2z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = (x+z) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 2y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の全体が作る空間である．これは右辺に出ている２つのベクトルで張られており，またこの２つのベクトルは線形独立である．従って集合の形で書くと，

$$Im\ f = \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, s, t \text{ は任意} \right\} \text{ である．その基底の一つは } \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ で，次元は } 2$$

となる．

なお，前回のレポート問 14 の (2) を利用すると，以下のように解答できます．前回と同じく F のベクトルを $F = \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3 \rangle$ と書く．前回のレポート問 14 の (2) の解答によると，

$$f(\boldsymbol{f}_1) = 3\boldsymbol{f}_1, \quad f(\boldsymbol{f}_2) = 2\boldsymbol{f}_2, \quad f(\boldsymbol{f}_3) = \boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{f}_3$$

であった．従って，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{f}_1 + x_2\boldsymbol{f}_2 + x_3\boldsymbol{f}_3$ と書いた場合，行き先が

$$(*) \qquad f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{f}_1 + x_2\boldsymbol{f}_2 + x_3\boldsymbol{f}_3) = x_1 f(\boldsymbol{f}_1) + x_2 f(\boldsymbol{f}_2) + x_3 f(\boldsymbol{f}_3) = 3x_1\boldsymbol{f}_1 + 2x_2\boldsymbol{f}_2$$

となることがわかっている．(以上，既に前回の解答で出したことの復習.)
これから像と核を出してみよう．まず像の方は，(*) の線型結合全体（x_1, x_2 は任意だから）になるから，

$$Im\ f = \{ s\boldsymbol{f}_1 + t\boldsymbol{f}_2 \,|\, s, t \text{ は任意} \} \quad \text{となって，その基底の一つは } \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \rangle \text{ で，次元は } 2$$

となる．また，核の方は (*) が零ベクトルになるものだから，$x_1 = x_2 = 0$ が必要充分である．つまり，$x = x_3\boldsymbol{f}_3$（x_3 は任意）であるから，

$$Ker\ f = \{ s\boldsymbol{f}_3 \,|\, s \text{ は任意} \} \quad \text{となって，その基底の一つは } \langle \boldsymbol{f}_3 \rangle \text{ で，次元は } 1$$

となる．もちろん，この答えは最初に示したものと一致する．

問 17： いちいち縦ベクトルを書くのは大変なので，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

とおく．問題の条件は，f が

$$f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{b}_1, \qquad f(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{b}_2, \qquad f(\boldsymbol{a}_3) = \boldsymbol{b}_3 \tag{2}$$

を満たしている，ということである．

まず，事前に $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$ は一次独立であり（これをチェックする方法は今までに散々やった），３本からなっているので，$\mathbb{R}^3$ の基底をなしていることに注意しておこう．これはつまり，$\mathbb{R}^3$ の任意の元をこの３つのベクトルの線型結合で書けることを意味する．よって任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $f(\boldsymbol{x})$ が計算できることになる．具体的に書くと，$\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 \tag{3}$$

と線型結合の形で表すと，

$$f(\boldsymbol{x}) = f(c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3) = c_1 f(\boldsymbol{a}_1) + c_2 f(\boldsymbol{a}_2) + c_3 f(\boldsymbol{a}_3) = c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 \tag{4}$$

となるはずなのだ．

また，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ も一次独立かどうかを見ておこう．これは

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0} \tag{5}$$

を解けばわかる．この解は

$$c_1 = -6c_3, \quad c_2 = \frac{9}{2}c_3 \quad (c_3 \text{ は任意}) \tag{6}$$

となって，**一次独立ではない**．特に

$$12\boldsymbol{b}_1 = 9\boldsymbol{b}_2 + 2\boldsymbol{b}_3 \tag{7}$$

が成り立つことに注意しておく．以下ではこれらの事実をふんだんに用いる．

<u>像空間</u> からやる．上で見たように，任意の $\boldsymbol{x}$ に対する $f(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ の線型結合で書ける．ので，像空間はこの３つのベクトルで張られる空間だ．この３つのベクトルは一次独立ではなく，(7) の関係を満たしている（また，$\boldsymbol{b}_2$ と $\boldsymbol{b}_3$ は明らかに一次独立である）．従って像空間の基底は $\langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 \rangle$，その次元は 2 であって，

$$\mathrm{Im}\ f = \{ s\boldsymbol{b}_2 + t\boldsymbol{b}_3 \,|\, s \text{ と } t \text{ は任意のスカラー} \} \tag{8}$$

となる．もちろん，ここは $\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$ や $\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3 \rangle$ を基底として採用してもよい．

<u>核空間</u> をやろう．これは表現行列を求めてから出す方法もある．けども，あえて今の段階でやってみる．核空間というのは，$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ となるような $\boldsymbol{x}$ の全体だ．(3) と (4) を思い出すと，

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0} \tag{9}$$

となるような c_1, c_2, c_3 を求めた場合，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3$ の全体が $\mathrm{Ker}\ f$ なのである．ところが (9) は (5) と全く同じでその解は (6) で与えられている．よって核空間とは（$c_3/2$ を c にした）

$$\mathrm{Ker}\ f = \left\{ c(-12\boldsymbol{a}_1 + 9\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3) \,\middle|\, c \text{ は任意のスカラー} \right\} \tag{10}$$

とわかる．$\boldsymbol{d} = -12\boldsymbol{a}_1 + 9\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3$ とおくと，この空間の基底は $\langle \boldsymbol{d} \rangle$，次元は 1 である．具体的に計算すると，

$$\boldsymbol{d} = -12\boldsymbol{a}_1 + 9\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -10 \\ -3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

となっている．

f の階数 は像空間の次元そのものだから，2 です．(別の問題にする必要もなかったけど，階数をちゃんと理解してもらいたかったので，問題にしました．ただし，進度の関係から，この小問 3 はレポートの課題からは抜いてあります．)

さて最後に 表現行列 ですが... 先週までの講義結果によると，$\boldsymbol{e}_j$ を基本ベクトルとして

$$A = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_3) \end{bmatrix} \tag{11}$$

が表現行列のはず．そこで，標準基底 $\boldsymbol{e}_j$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線型結合として表し，(3) と (4) を用いれば，計算できるはずだ．

これはまあ，地道にやるしかない（逆行列を使えば少しは見通しが良くなるけど）．$\boldsymbol{e}_1$ なら

$$x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2 + z\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{e}_1 \qquad \text{つまり} \qquad \begin{bmatrix} x+z \\ x+y \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

を解けば良い．がんばってやると，

$$x = z = 1/2,\ y = -1/2, \qquad \text{つまり} \qquad \boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) \tag{13}$$

がわかる．同様に計算すると

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3), \qquad \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) \tag{14}$$

もわかる．そこで (4) を用いると，

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 + 3\boldsymbol{b}_3) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{e}_2) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -11 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{e}_3) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{15}$$

となる．よって，表現行列は

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 11 & -11 & 7 \\ 7 & -5 & 5 \end{bmatrix} \tag{16}$$

と求められる．なお，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{x}$ の全体を求めると $\mathrm{Ker}\ f$ がわかるが，これはもちろん，上で求めたものに一致する．

問 18： 大変，申し訳なし．F は基底になっていないから，問題そのものが意味をなしません．3 番目のベクトルを適当なものに入れ替えるつもりで，忘れてしまいました．混乱した方がいたら，申し訳ないです．(何人か，基底になってない，と指摘した人がいるので，これはこれで大変に良かったと思います．)

これだけでは元々の出題意図がわからないでしょうから，元々はどういう問題のつもりだったか，および，その解答例を書いておきます．

本来の問 18 で聞きたかったこと：問 17 の状況で，X と Y の基底として

$$E = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \qquad F = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} * \\ \star \\ ** \end{bmatrix} \right\rangle$$

を採用した場合，この基底に関する f の表現行列を求めよ．ここで F の最後のベクトルは，F の前 2 つのベクトルと一次独立なベクトルである．(僕の間違った出題との相違点は F の 3 つ目のベクトルである．)

上の本来の問 18 の解答例： 上の E, F の定義は，今までのベクトルを用いると

$$E = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle, \qquad F = \langle \boldsymbol{b}_1, \frac{1}{2}\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{g} \rangle$$

と書ける（$\boldsymbol{g}$ が F の最後のベクトルを表し，これは $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ と独立である）．

さて，基底 E, F に関する表現行列とは，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ の基底 E に関する表現ベクトルを $[\boldsymbol{x}]_E$，行き先 $f(\boldsymbol{x})$ の基底 F に関する表現ベクトルを $[f(\boldsymbol{x})]_F$ とした場合に，この 2 つの縦ベクトルをつなぐような，つまり

$$(**) \qquad [f(\boldsymbol{x})]_F = A\,[\boldsymbol{x}]_E$$

となるような行列 A のことだった．今，問 17 の小問群を解いた時に，(3) のように $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3$ と表した．またこの行き先は (4) のように $f(\boldsymbol{x}) = c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3$ と書けるが，これは基底 F のベクトルで書けば（$\boldsymbol{b}_3 = 6\boldsymbol{b}_1 - \frac{9}{2}\boldsymbol{b}_2$ であるから）

$$f(\boldsymbol{x}) = c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 = (c_1 + 6c_3)\boldsymbol{b}_1 + \left(c_2 - \frac{9}{2}c_3\right)\boldsymbol{b}_2 = (c_1 + 6c_3)\boldsymbol{b}_1 + (2c_2 - 9c_3)\frac{1}{2}\boldsymbol{b}_2 + 0\boldsymbol{g}$$

と表される．これは表現ベクトルの言葉で言えば，

$$[\boldsymbol{x}]_E = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \qquad [f(\boldsymbol{x})]_F = \begin{bmatrix} c_1 + 6c_3 \\ 2c_2 - 9c_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ということである．ということで，

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

というのが，答えである．

本来の問 18 の解答例，終わり．

7 月 16 日：今日は線型写像の合成をまとめた後，連立方程式の解法に入ります．
今日のキーワード：線型写像の合成、連立方程式を解くこと
TA の人が大分頑張ってはくれましたが，まだ採点が終わらず，今週の月曜に集めたレポートは再来週の月曜に返却となります．
期末試験は期末試験期間中に，教務課の掲示通りに行います．範囲は今学期のところすべてです．

先週のレポートの略解

問 19： この解答は問 17 のと本質的に同じ．いちいち縦ベクトルを書くのは大変なので，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix}0\\-1\\-2\end{bmatrix} \tag{17}$$

とおく．問題の条件は，f が

$$f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{b}_1, \qquad f(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{b}_2, \qquad f(\boldsymbol{a}_3) = \boldsymbol{b}_3 \tag{18}$$

を満たしている，ということである．

まず $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$ は一次独立であり，３本からなっているので，$\mathbb{R}^3$ の基底をなすことに注意．よって $\mathbb{R}^3$ の任意の元を $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$ の線型結合で書けて，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $f(\boldsymbol{x})$ が計算できる．具体的に書くと，$\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 \tag{19}$$

と線型結合の形で表すと，

$$f(\boldsymbol{x}) = f(c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3) = c_1 f(\boldsymbol{a}_1) + c_2 f(\boldsymbol{a}_2) + c_3 f(\boldsymbol{a}_3) = c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 \tag{20}$$

となるはずなのだ．

また，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ も一次独立かどうかを見ておこう．これは

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0} \tag{21}$$

を解けばわかるが，今回は $\boldsymbol{b}_2 = 2\boldsymbol{b}_1$ に気づけば簡単である（$\boldsymbol{b}_3$ は $\boldsymbol{b}_1$ の定数倍ではないから，$\boldsymbol{b}_1$ とは独立）．

(1) 像空間 からやる．任意の $\boldsymbol{x}$ に対する $f(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ の線型結合で書ける．ので，像空間はこの３つのベクトルで張られる空間だ．この３つのベクトルは $\boldsymbol{b}_2 = 2\boldsymbol{b}_1$ の関係を満たし，$\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}_3$ は明らかに一次独立である．従って像空間の基底は $\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$，その次元は 2 である．もちろん，ここは $\langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 \rangle$ を基底として採用してもよい．

核空間 をやろう．これは表現行列を求めてから出す方法もある．けども，あえて今の段階でやってみる．核空間というのは，$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ となるような $\boldsymbol{x}$ の全体だ．(19) と (20) を思い出すと，

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0} \tag{22}$$

となるような c_1, c_2, c_3 を求めた場合，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3$ の全体が Ker f なのである．ところが (22) は (21) と全く同じでその解は $c_1 = -2c_2$, $c_3 = 0$ である．よって核空間とは

$$\mathrm{Ker}\ f = \left\{ c(-2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) \,\middle|\, c \text{ は任意のスカラー} \right\} \tag{23}$$

とわかる．$\boldsymbol{d} = -2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ とおくと，この空間の基底は $\langle \boldsymbol{d} \rangle$，次元は 1 である．具体的に計算すると，

$$\boldsymbol{d} = -2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

となっている．

(2) f の階数 は像空間の次元そのものだから，2 である．

(3) さて 表現行列 は… 講義結果によると，$\boldsymbol{e}_j$ を基本ベクトルとして

$$A = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_3) \end{bmatrix} \tag{24}$$

が表現行列のはず．そこで，標準基底 $\boldsymbol{e}_j$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線型結合として表し，(19) と (20) を用いれば，計算できるはずだ．

これはまあ，地道にやるしかないが，今回のベクトルなら以下のようにやるのが良いだろう．まず，$\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{e}_2$ に注意し，これから $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1$，更に $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{e}_1 = 2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3$ を得る．そこで (20) から，

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_3) = 2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3 = -\boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{25}$$

となる．よって，表現行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{26}$$

と求められる．なお，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{x}$ の全体を求めると Ker f がわかるが，これはもちろん，上で求めたものに一致する．

表現行列の別の求め方： 表現行列というのは，今の場合，$\boldsymbol{b}_j = A\boldsymbol{a}_j$（$j = 1, 2, 3$）となる行列のことである．この 3 つは 3 つの縦ベクトルを行列の形にまとめて書くと

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}$$

の形であるから，この両辺に右から $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}$ の逆行列をかけて

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}^{-1} = A \qquad \text{具体的には} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

と求められる．機械的にやれる点ではこちらの方が簡単だが，逆行列を計算しないといけない（効率の良いやり方は秋学期にやります.）

(4) 上で求めた行列とベクトルのかけ算をすれば良い．答えは $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

問 20： 問題そのものは表現行列や像空間などの定義を訊くだけのものですが，微分演算が行列で表現できることを実感してもらいたくて出題しました．

(1) 任意の $\boldsymbol{p} \in V$ は $\boldsymbol{p} = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3$ と書ける．また，こいつを微分した結果を $\boldsymbol{p}'$ と書くと，$\boldsymbol{p}' = p_1 + 2p_2 x + 3p_3 x^2$ である．この事情を基底 $E = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ に関する表現ベクトルの言葉で書けば，

$$[\boldsymbol{p}']_E = \begin{bmatrix} p_1 \\ 2p_2 \\ 3p_3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{p}]_E = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, \qquad \text{となっているので，表現行列は} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と求められる．

(2) 像空間は (1) での $\boldsymbol{p}'$ の表式からもわかるように「２次以下の多項式全体」だ．よってこの基底の例は $\langle 1, x, x^2 \rangle$，次元は 3.

核空間の方は，「微分したらゼロになる多項式の全体」ということだ.（もちろん，上の $\boldsymbol{p}'$ の表式から具体的に求めてもよい.）これは要するに，$p(x) =$ 定数 ということ．従って基底の例は $\langle 1 \rangle$，次元は 1.

(3) 像空間の次元が 3 なので，階数も 3.