2009.04.22.

# 数学 I （理系コア科目）

担当：原　隆（数理学研究院）：六本松 3-312 号室，phone: 092-726-4774,　e-mail: hara@math.kyushu-u.ac.jp
http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html

Office hours: 原のオフィスが六本松にあるため，office hour は設けません．講義終了後には質問を受け付けます．また，メイルでの質問にも対応しますので，遠慮しないでください．更に，メイルで appointment をとってくれれば，別に時間を設けての質問にも対応できます．

## 講義の暫定的計画：

数学は本来，この世界の様々な現象を解析・理解・予言するために，様々な自然科学・社会科学と手を携えつつ発達してきたものである．しかしながら，現在の日本の高校までの教育では，その密接な関係にはほとんど触れられることはない．(「理数科の物理においても微積分をもちいるのは御法度とされている」ことなどは，その悪しき一例である．)

これは数学についての誤解や偏見を拡める可能性があるのみならず，人類のこれまでの知的活動に対する裏切りともいえると思う．

この講義では，このような現状を少しでも改善すべく,「大学では数学が必修になっていない学生さん」を対象に，数学と自然科学・社会科学の接点について述べる．題材としては未来を予測するための手段として発達してきた「微分方程式」と「線型写像」を取り，これらに登場する数学（微分積分と線形代数）の解説を試みる．

### 第一部：微分方程式と微積分

1. （ニュートン力学）ニュートンの運動方程式
2. 微分方程式論
   (a) 微分方程式とは
   (b) 微分方程式の性質：解の存在と一意性
   (c) 微分方程式の解法
   (d) 線型微分方程式の性質と解法

### 第二部：線型写像と線形代数

1. 線型写像の例
2. 線型写像の性質 — 線形性とは？
3. 線型写像の解析

**評価方法：**　受講者数などを見て判断する予定なので，現時点では未定とせざるを得ません．ただし，いくら受講者数が多くとも，ある程度しっかりした数学の試験（たんなるエッセイではなく,「以下の微分方程式を解きなさい」「以下の線型写像を解析しなさい」など）を期末試験として行う予定です．そのような数学の試験をちゃんと受ける覚悟のある方のみ，受講することをお勧めします．

**注意：**　初回にも述べたことですが，この講義の題材の多くは物理現象から持ってきます（特に第一部）．物理と聞いただけでジンマシンの出る人は取らない方が良いかもしれません．ただし，物理の予備知識は一切，仮定しません．

**一般的な注意：**　この大学では「GPA 制度」というものを導入しています．この制度では，一旦「履修登録」した後に「やっぱり履修をやめよう」と思った科目には，新たに「取り消し」をする必要があります.(「取り消し」をしなかった場合，その科目は零点とカウントされ，成績の平均点が下がります.）ところが，この「取り消し」期間はかなり限定されたものになっています．忘れないようにしてください．

微分方程式の一般的性質（解の存在と一意性）についてのまとめ

独立変数を $t$，未知函数を $x(t)$ とする．$t$ に関する微分は上つきのドットで表す：$\dot{x}(t)$．微分方程式

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \tag{1}$$

を初期条件 $x(t_0) = x_0$ の下で解きたい（解を探したい）．このとき，解の存在や一意性に関して，以下の定理がなりたつ：

**Theorem 1** 正の数 $a, b$ を決め，$(t, x)$-平面において，$(t_0, x_0)$ を中心とする $t$-方向の幅 $2a$，$x$-方向の幅 $2b$ の長方形とその内部を $D$ とする．$D$ において，上の微分方程式の右辺の $f$ が以下を満たすとする：
*(i)* $f(t, x)$ は $t$ と $x$ のそれぞれについて連続である．
*(ii)* $f(t, x)$ は $t$ を止めるごとに，$x$ について *Lipschitz* 連続である．すなわち，大きな定数 $K$ が存在して，

$$\big|\, f(t, x) - f(t, y) \,\big| \leq K|x - y| \tag{2}$$

がなりたつ．
*(iii)* $|f(t, x)|$ の $D$ における最大値を $M$ とする．
このとき，初期条件 $x(t_0) = x_0$ に対する (1) の解は，

$$|t - t_0| \leq \min\Big\{a, \frac{b}{M}\Big\} \tag{3}$$

の範囲で存在し，かつその解は一通りに定まる（解は一意である）．
また，その解は $x_0$ に連続的に依存する（つまり，$x_0$ を少し変えると，解も少しだけ変わる）．

数学 I 期末試験などについて（2009.07.15 原）

先々週，大雨のために休講になってしまい，講義計画をいよいよ縮小せざるを得なくなりました．仕方ないので，今日は微分方程式関係の締めとして「非線型のばあい」を論じます．

来週は，かねてからの予告通り,「科学とは何か？科学と疑似科学の間」について，簡単に論じます．

**期末試験について：**

以前からの予告通り，期末試験は簡単な「微分方程式を解け」の問題が主となります．この講義では結局，微分方程式の解法に一番の力を注いだし，それ以外についてはあまりやっていないので，これが一番自然でしょう．

ただ，今の状態で試験に突入するのは不安でしょうから,「このような問題が解けるようになって下さい」という例題（と簡単な解答例）を後から僕の web に上げておきます（今日の深夜までに）．各自でダウンロードしてみて下さい．URL は

http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/09/suugakuI.html

です．このページは全学教育のこの科目（数学 I）のページの一番下からもたどれます．

なお，補足的に，ある程度の「エッセイ」を出題するかもしれません．この点については未だに考えています．来週のこの時間には確定してアナウンスします．

**この講義とは全く関係のない注意：** 皆さんもご存じのように，来週の水曜に日食があり，福岡ではかなりの食が予想されます．見てみたいと思う人も多いでしょうが，**以下のページなどを参考にして，決して間違った見方をしないようにして下さい．少しの不注意でも網膜が焼けて，失明や視力低下が簡単に起こりえますよ！** 日食の観測については国立天文台のページ http://www.nao.ac.jp/phenomena/20090722/index.html などが信頼できます（このページの下の方に「日食を観測する方法」があります）．このページ自身は「日食　国立天文台」などで検索すると容易に見つかります．

**数学 I 練習問題**

以下に掲げるものは，この科目で学んだ数学的内容の一部に関する練習問題である．後ろの方に略解もつけたので，自学の参考にしてほしい．

| |
|---|
| 以下の略解にもミスがある可能性は否定できない．もし，おかしいと思ったら，遠慮せずに僕までメイルをください． |

**問題**　次の微分方程式を，与えられた初期条件の下で解け（与えられた初期条件を満たす解を求めよ）．

(1) 微分方程式は $\dot{x} = x^2$，初期条件は $x(0) = 4$

(2) 微分方程式は $\dot{x} = x^3\,t^2$，初期条件は $x(0) = 1$

(3) 微分方程式は $\dot{x} = x^2(t^2+1)$，初期条件は $x(1) = -1$

(4) 微分方程式は $\dot{x} = \dfrac{t}{x}$，初期条件は $x(2) = 3$

(5) 微分方程式は $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$，初期条件は $x(0) = 3, \dot{x}(0) = 0.$

(6) 微分方程式は $\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0$，初期条件は $x(0) = 2, \dot{x}(0) = 5.$

(7) 微分方程式は $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0$，初期条件は $x(0) = 3, \dot{x}(0) = 1.$

(8) 微分方程式は $\dddot{x} - 6\ddot{x} + 11\dot{x} - 6x = 0$，初期条件は $x(0) = 3, \dot{x}(0) = 3, \ddot{x}(0) = 1.$

(9) 微分方程式は $\dddot{x} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0$，初期条件は $x(0) = 3, \dot{x}(0) = 1, \ddot{x}(0) = 0.$

(10*) 微分方程式は $\dddot{x} - \ddot{x} - \dot{x} + x = 0$，初期条件は $x(0) = 3, \dot{x}(0) = 1, \ddot{x}(0) = 1.$

**解答例**　(1)–(4) は変数分離形の問題，(5)–(10) は線型斉次の問題である．

(1) 微分方程式は $\dfrac{dx}{dt} = x^2$ だから，これを $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}dx = \int dt$ として，両辺を積分すると

$$-\frac{1}{x} = t + C \qquad (C\ \text{は定数})$$

という解が得られる．初期条件を代入して

$$-\frac{1}{4} = C$$

とわかるので，求める解は

$$-\frac{1}{x} = t - \frac{1}{4}$$

これを整理して

$$x(t) = \frac{4}{1-4t}$$

が答え．

(2) 微分方程式は $\dfrac{dx}{dt} = x^3\,t^2$ だから，これを $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}dx = \int t^2 dt$ として，両辺を積分すると

$$-\frac{1}{2x^2} = \frac{t^3}{3} + C \qquad (C\ \text{は定数})$$

という解が得られる．初期条件を代入して

$$-\frac{1}{2} = C$$

とわかるので，求める解は

$$-\frac{1}{2x^2} = \frac{t^3}{3} - \frac{1}{2} \qquad \text{である．これを整理して} \qquad x(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2}{3}t^3}}$$

(3) 微分方程式は $\dfrac{dx}{dt} = x^2(t^2+1)$ だから，これを $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}dx = \int (t^2+1)dt$ として，両辺を積分すると

$$-\frac{1}{x} = \frac{t^3}{3} + t + C \qquad (C \text{ は定数})$$

という解が得られる．初期条件を代入して

$$1 = \frac{4}{3} + C \qquad \text{つまり} \qquad C = -\frac{1}{3}$$

とわかるので，求める解は

$$-\frac{1}{x} = \frac{t^3}{3} + t - \frac{1}{3} \qquad \text{である．これを整理して} \qquad x(t) = \frac{3}{1 - 3t - t^3}$$

(4) 微分方程式は $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{x}$ だから，これを $\displaystyle\int x dx = \int t dt$ として，両辺を積分すると

$$x^2 = t^2 + C \qquad (C \text{ は定数})$$

という解が得られる．初期条件を代入して

$$9 = 4 + C$$

とわかるので，求める解は

$$x^2 = 5 + t^2 \qquad \text{である．これを整理して} \qquad x(t) = \sqrt{t^2 + 5}$$

(5)-(10) は定数係数，線型斉次の問題である．以下，すべて $e^{\lambda t}$ の形の解を探すところから始める．

(5) $x(t) = e^{\lambda t}$ を元の方程式に代入すると

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

が得られる．この解は $\lambda = -1, -2$ だから，求める解は

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \qquad c_1,\ c_2 \quad \text{は定数}$$

の形に書けるはずである．後は初期条件にあうように $c_1, c_2$ を決めればよい．初期条件を代入すると

$$c_1 + c_2 = x(0) = 3, \qquad -c_1 - 2c_2 = \dot{x}(0) = 0$$

となる．これを解いて

$$c_2 = -3, \qquad c_1 = 6$$

を得るので，

$$x(t) = 6e^{-t} - 3e^{-2t}$$

というのが答え．

(6) $x(t) = e^{\lambda t}$ を元の方程式に代入すると

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

が得られる．この解は $\lambda = -1, 3$ だから，求める解は

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \qquad c_1,\ c_2 \quad \text{は定数}$$

の形に書けるはずである．後は初期条件にあうように $c_1, c_2$ を決めればよい．初期条件を代入すると

$$c_1 + c_2 = x(0) = 2, \qquad -c_1 + 3c_2 = \dot{x}(0) = 5$$

となる．これを解いて

$$c_2 = \frac{7}{4}, \qquad c_1 = \frac{1}{4}$$

を得るので，

$$x(t) = \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{7}{4}e^{3t}$$

というのが答え．

(7) $x(t) = e^{\lambda t}$ を元の方程式に代入すると

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

が得られる．この解は $\lambda = -2, 1$ だから，求める解は

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t} \qquad c_1,\, c_2 \quad \text{は定数}$$

の形に書けるはずである．後は初期条件にあうように $c_1, c_2$ を決めればよい．初期条件を代入すると

$$c_1 + c_2 = x(0) = 3, \qquad -2c_1 + c_2 = \dot{x}(0) = 1$$

となる．これを解いて

$$c_2 = \frac{7}{3}, \qquad c_1 = \frac{2}{3}$$

を得るので，

$$x(t) = \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{7}{3}e^{t}$$

というのが答え．

(8) $x(t) = e^{\lambda t}$ を元の方程式に代入すると

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

が得られる．この解は $\lambda = 1, 2, 3$ だから，求める解は

$$x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} \qquad c_1,\, c_2,\, c_3 \quad \text{は定数}$$

の形に書けるはずである．後は初期条件にあうように $c_1, c_2, c_3$ を決めればよい．途中の計算は省略して結果だけ書くと：

$$x(t) = 2e^{t} + 2e^{2t} - e^{3t}$$

というのが答え．

(9) $x(t) = e^{\lambda t}$ を元の方程式に代入すると

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

が得られる．この解は $\lambda = -1, 1, 2$ だから，求める解は

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{2t} \qquad c_1,\, c_2,\, c_3 \quad \text{は定数}$$

の形に書けるはずである．後は初期条件にあうように $c_1, c_2, c_3$ を決めればよい．途中の計算は省略して結果だけ書くと：

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{7}{2}e^{t} - e^{2t}$$

というのが答え．

(10) $x(t) = e^{\lambda t}$ を元の方程式に代入すると

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

が得られる．この解は $\lambda = -1, 1$ で，1 が重根である．求める解は

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t + c_3 t e^t \qquad c_1,\, c_2,\, c_3 \quad \text{は定数}$$

の形に書けるはずである．後は初期条件にあうように $c_1, c_2, c_3$ を決めればよい．途中の計算は省略して結果だけ書くと：

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{5}{2} e^t - t e^t$$

というのが答え．