中間テスト（12/9）の解答編（微積 B, 2009.12.17）

大切なお願い：各問の得点の合計 —— 特に十の位 —— は間違っている可能性が高いから，各自，一度はチェックすること．これに限らず，皆さんには採点結果に対して文句を言う権利があるから，おかしいと思ったら文句を言いなさい（もちろん，その文句通りに点が変わるかどうかはわからないけど）．

Web での公開であることを考えて，得点分布，講評などはここには載せません．12/16 の講義で述べた通りです．

問 1： a), b), c) は広義積分の定義を理解しているかの問題です．

a) この積分は $\displaystyle\lim_{L\to\infty}\int_0^L x^2\,e^{-x}\,dx$ と解釈すべし．極限の中の積分は部分積分によって（高校の範囲なので，各自で確認して下さい）$2-e^{-L}(2-2L-L^2)$ となるので，$L\to\infty$ の極限をとって，積分の答えは 2.

b) この非積分関数は $x=0$ のところがヤバいから，この積分は

$$\lim_{\delta\to-0}\int_{-1}^{\delta}\frac{1}{x}dx+\lim_{\epsilon\to+0}\int_{\epsilon}^{1}\frac{1}{x}dx$$

と解釈すべし．積分を具体的に計算するとこれは

$$\lim_{\delta\to-0}\log(\delta)+\lim_{\epsilon\to+0}\Bigl\{-\log(\epsilon)\Bigr\}$$

となる．ここで δ,ϵ は互いに無関係にゼロに行かせる必要があるが，この場合，上の 2 つの極限はそれぞれ $-\infty,+\infty$ に発散してしまう．つまり，この極限は存在せず，積分の値も存在しない．

c) 上と同じく $x=0$ で分けて考えると，今度は

$$\lim_{\delta\to-0}\int_{-1}^{\delta}x^{-1/3}dx+\lim_{\epsilon\to+0}\int_{\epsilon}^{2}x^{-1/3}dx=\lim_{\delta\to-0}\frac{3}{2}\Bigl(\delta^{2/3}-(-1)^{2/3}\Bigr)+\lim_{\epsilon\to+0}\frac{3}{2}\Bigl(2^{2/3}-\epsilon^{2/3}\Bigr)$$

となるが，ϵ の項も δ の項も極限ではゼロに行く．従って積分の値は

$$\frac{3}{2}\Bigl(-(-1)^{2/3}+2^{2/3}\Bigr)=\frac{3}{2}\Bigl(2^{2/3}-1\Bigr)$$

となる．この場合，$x=0$ で分けずに積分してしまったのと，結果は同じになる．

d) はちょっとだけ難しい（特に表面積）．簡単なのは体積なので，体積から行くと，x でのこの物体の断面は半径 $y=1/x$ の円だから，その面積は πx^{-2} である．従って，体積は

$$\int_1^{\infty}\pi x^{-2}dx=\lim_{L\to\infty}\int_1^{L}\pi x^{-2}dx=\lim_{L\to\infty}\pi(1-L^{-1})=\pi.$$

表面積は x と $x+dx$ の間にある部分の面積が（$y=1/x$）

$$2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx$$

であることから

$$\int_1^{\infty}2\pi\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx=2\pi\lim_{L\to\infty}\int_1^{L}\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx$$

であることがわかる．さて，この積分はまともに計算しにくそうだが，平方根の中身が常に 1 より大きいことを使うと，

$$\geq 2\pi\lim_{L\to\infty}\int_1^{L}\frac{1}{x}\,dx=2\pi\lim_{L\to\infty}\log L=+\infty$$

とわかる．つまり，表面積は無限大（数学としての正しい表現は「表面積は発散している」かな？）．

問 2：

a) この積分は極限 $\displaystyle\lim_{L\to\infty}\int_0^L \frac{1}{x^3+2x+1}dx$ と解釈すべきである．

極限の中身の積分は，(非積分関数が正であるので）L の単調増加関数である．また，この積分自身は

$$\int_0^L \frac{1}{x^3+2x+1}dx=\int_0^1 \frac{1}{x^3+2x+1}dx+\int_1^L \frac{1}{x^3+2x+1}dx\le\int_0^1 1dx+\int_1^L \frac{1}{x^3}dx=1+\frac{1}{2}$$

などとすればわかるように，上に有界である．単調増加，かつ上に有界な関数は収束するから，上の極限は存在し，広義積分も存在する．

b) この問題はレポート問題と酷似しているので簡単に済ませる．問題の積分を

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx=\int_1^{2\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx+\int_{2\pi}^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx=\int_1^{2\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx+\lim_{L\to\infty}\int_{2\pi}^L \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$$

と書くと，第一項は有界な連続関数の有限区間での積分ゆえ，存在する．よって，問題は第二項の極限が存在するかである．

そこでまず，

$$a_n:=\int_{2\pi}^{2\pi n}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$$

を考える．この a_n は，部分積分によって

$$a_n=\left[\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right]_{2\pi}^{2\pi n}+\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{2\pi n}x^{-3/2}\,\sin x\,dx=\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{2\pi n}x^{-3/2}\,\sin x\,dx$$

であるので，

$$|a_n|\le\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{2\pi n}x^{-3/2}\,|\sin x|\,dx\le\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{2\pi n}x^{-3/2}\,dx\le\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{\infty}x^{-3/2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

となり，有界である．

更に，

$$\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n&=\frac{1}{2}\int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)}x^{-3/2}\,\sin x\,dx=\frac{1}{2}\left[\int_{2\pi n}^{(2n+1)\pi}x^{-3/2}\,\sin x\,dx+\int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi}x^{-3/2}\,\sin x\,dx\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\int_0^\pi(2n\pi+u)^{-3/2}\,\sin u\,du-\int_0^\pi((2n+1)\pi+u)^{-3/2}\,\sin u\,du\right]\\
&=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left\{(2n\pi+u)^{-3/2}-((2n+1)\pi+u)^{-3/2}\right\}\,\sin u\,du\ge 0
\end{aligned}$$

となるので，a_n は n について単調増加．

有界で単調増加な数列は収束するから，a_n は何かの値に収束する．

最後に，$2n\pi<L\le(2n+2)\pi$ の時，

$$\int_{2\pi}^L\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx-a_n=\int_{2\pi n}^L\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$$

の絶対値をとって

$$\left|\int_{2\pi}^L\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx-a_n\right|\le\int_{2\pi n}^L\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\le\frac{2\pi}{\sqrt{2\pi n}}$$

が得られる．これは，$\displaystyle\int_{2\pi}^L\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ の $L\to\infty$ での極限が a_n の極限に等しいことを意味する．

よって，$\displaystyle\lim_{L\to\infty}\int_{2\pi}^L\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ は存在する．従って，問題の積分も存在する．

問 3： ともかく解きます．

a) 微分方程式は $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y+2}$ であるから，典型的な変数分離型で，

$$\int (y+2)dy = \int 1dx \qquad \frac{y^2}{2} + 2y = x + C$$

が一般解である（C は定数）．初期条件を代入して $C = 3/2$ とわかる．ので，

$$y^2 + 4y = 2x + 3$$

が解のはず．これを y について解くと

$$y = -2 \pm \sqrt{2x+7}$$

となるが，初期条件にあうのは $+$ のほうだけだ．よって最終的な答えは

$$y(x) = -2 + \sqrt{2x+7}$$

である．

b) 上と同様に変数分離型なので，一般解が

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$$

と求まる．初期条件から C を決めて整理すると，

$$y(x) = \frac{2}{3-x^2}$$

が最終的な答えとわかる．

（講評）

- 何人か，非常にショウモナイ計算ミス（積分のミス）をしていたのが気になります．微分方程式は，得られた解をもとの微分方程式に代入し，初期条件もチェックすることで間違いを発見しやすいものです．これからはできるだけ検算をするように！

問 4： ともかく微分します．答えだけ書くと

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(x+xy) + (x+xy)\cos(x+xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2\ \cos(x+xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 2x\cos(x+xy) - x^2(1+y)\sin(x+xy)$$

問 5：

テイラーの公式に当てはめて，一生懸命計算すると，答えが出ます．以下の答えに会わない人は，どこかで間違っている訳ですから，ご自身で間違いを見つけて下さい（いい加減，タイピングに疲れて来たので手抜き）．

$$1 + x + xy + \frac{x^2}{2} + x^2 y + \frac{x^3}{6}.$$

（別解）とは言っても，もっと簡単な別解がある訳です（講義の時に少し言った通り）．要するに問題の関数は普通の指数関数で，$X = x + xy$ の小さいときの展開を知りたい訳だ．だから，普通に指数関数をテイラー展開して

$$f(x,y) = e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3!} + (\text{更に高次}) = 1 + x + xy + \frac{(x+xy)^2}{2} + \frac{(x+xy)^3}{6} + (\text{更に高次})$$

を得て，$(x+xy)^2$ などを展開して 3 次までをとると

$$= 1 + x + xy + \frac{x^2 + 2x^2 y}{2} + \frac{x^3}{6}$$

となる．これを整理すれば，初めに書いた解と一致します．

（講評）

- 両方のやり方をやった人にはボーナス点 5 点を加えて問 5 には 20 点をあげました．1/4 くらいの人は両方やってたかもしれません．大変に良いことと思います．

問 6： ある程度予想できたことですが，皆さん，非常に苦戦していました．出題意図の微妙な点は 12/16 の講義中に説明した通りです．以下では技術的な面に重きをおいて解説します．

まず，この問題では，(x,y) と (r,θ) に問題で与えられたような関係があるから，問題にある通り，x,y を r,θ で表すこともできるし，その逆に，r,θ を x,y で表すこともできることに注意しよう．実際にやってみると，

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (*)$$

となる．(厳密にいうと，θ をどのようにとるか —— arctan の値は $n\pi$ の不定性がある —— のは少し気をつけるべきである．が，以下のように微分の関係を見て行くだけなら，あまり気にする必要はない．)

問題に与えられている「x,y を r,θ で表す表式」を用いると，色々な偏微分が簡単に計算できる．

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta,$$

同様に，(*) からは以下がすぐにわかる：

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\sin\theta}{r}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}.$$

以下，これらの関係式を利用して解いて行く．

a) (*) のように x,y を r,θ で表してしまうと，$\frac{\partial f}{\partial x}$ の間に r,θ を挟んだ形の連鎖律が書けるはずだ[1]：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

ここに，上で求めた偏微分の値を代入して

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r} \times \cos\theta - \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\sin\theta}{r}$$

が求まる．

b) 上で求めた表式を x で偏微分する．ただしこの際，$r, \cos\theta$ などは x に依存している訳で，それらの微分も出てくることを忘れない：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial r} \times \cos\theta - \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\sin\theta}{r}\right) \\
&\overset{\text{積の微分}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right) \times \cos\theta + \frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\theta\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) \times \frac{\sin\theta}{r} - \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right) \qquad (**)
\end{aligned}$$

上の x 微分を計算したいのだが，微分されてる中身は r,θ の関数であるから，連鎖律を用いよう．例えば，$\frac{\partial g}{\partial r}$ が新しい関数 $h(r,\theta)$ だと思って連鎖律を使って

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right) = \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \theta} \times \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \times \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta} \times \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \times \cos\theta - \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta} \times \frac{\sin\theta}{r}$$

---

[1] 2 つ以上の微分が重なると見にくくなるので，微分の積の間などには「かける」の記号 $\times$ を入れることにする